

## TD : Distribution à calage variable : Corrigé

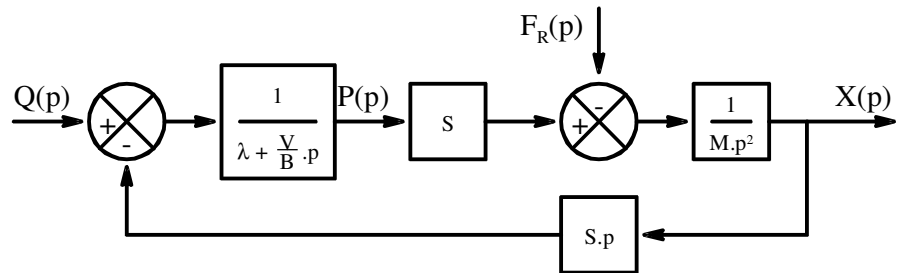
### 1<sup>ière</sup> partie : Modélisation du système

1.1- Les transformées de Laplace des équations (a) et (b) donnent :

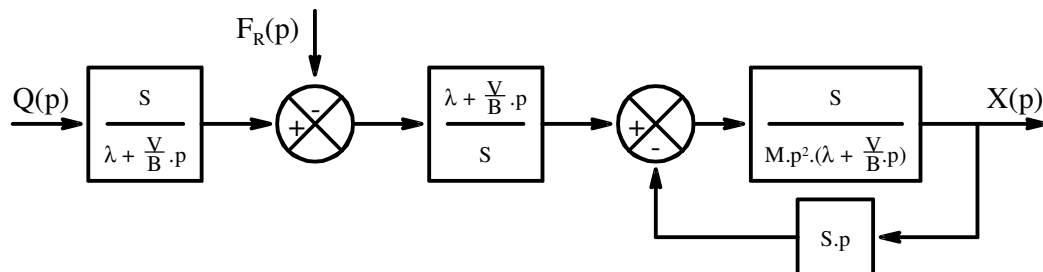
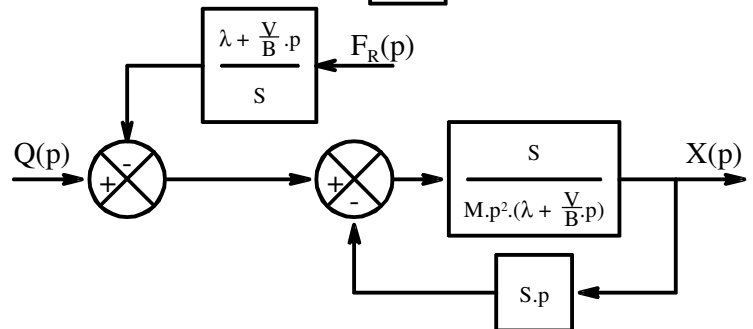
$$(a) \Rightarrow S \cdot P(p) - F_R(p) = M \cdot p^2 \cdot X(p) \quad \Rightarrow \quad X(p) = \frac{1}{M \cdot p^2} \cdot (S \cdot P(p) - F_R(p))$$

$$(b) \Rightarrow Q(p) - \lambda \cdot P(p) = S \cdot p \cdot X(p) + \frac{V}{B} \cdot p \cdot P(p) \quad \Rightarrow \quad P(p) = \frac{1}{\lambda + \frac{V}{B} \cdot p} (Q(p) - S \cdot p \cdot X(p))$$

On en déduit le schéma bloc du vérin :



1.2- Ce schéma bloc est équivalent aux deux schémas bloc suivant :



On en déduit donc :

$$H_1(p) = \frac{\frac{S}{\lambda}}{1 + \frac{V}{\lambda \cdot B} \cdot p}$$

$$\text{Et : } H_2(p) = \frac{\lambda \left( 1 + \frac{V}{\lambda \cdot B} \cdot p \right)}{S} \cdot \frac{\frac{S}{\lambda \cdot M \cdot p^2 + \frac{M \cdot V}{B} \cdot p^3}}{1 + \frac{S^2 \cdot p}{\lambda \cdot M \cdot p^2 + \frac{M \cdot V}{B} \cdot p^3}}$$

Soit après calcul :

$$H_2(p) = \frac{\frac{\lambda}{S^2} \cdot \left( 1 + \frac{V}{\lambda \cdot B} \cdot p \right)}{p \cdot \left( 1 + \frac{\lambda \cdot M}{S^2} \cdot p + \frac{M \cdot V}{B \cdot S^2} \cdot p^2 \right)}$$

On en déduit également la FTBO non corrigée :

$$H_{\text{BONC}}(p) = \frac{\frac{1}{S}}{p \cdot \left( 1 + \frac{\lambda \cdot M}{S^2} \cdot p + \frac{M \cdot V}{B \cdot S^2} \cdot p^2 \right)}$$

**1.3-** La FTBO est un troisième ordre de classe 1 soit le produit d'un intégrateur et d'un second ordre simple. Lequel second ordre a :  $\Rightarrow$  Une pulsation propre :  $\omega_0 = S \cdot \sqrt{\frac{B}{M \cdot V}}$

et :  $\Rightarrow$  Un facteur d'amortissement :  $\xi = \frac{1}{2} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{B}{M \cdot V}} \cdot \frac{\lambda \cdot M}{S^2} = \frac{\lambda}{2 \cdot S} \cdot \sqrt{\frac{B \cdot M}{V}}$

**La résonance dépend du facteur  $\xi$  lequel est fonction du coefficient de débit de fuit  $\lambda$ . Donc en augmentant la valeur de  $\lambda$  on peut diminuer voir supprimer la résonnance.**

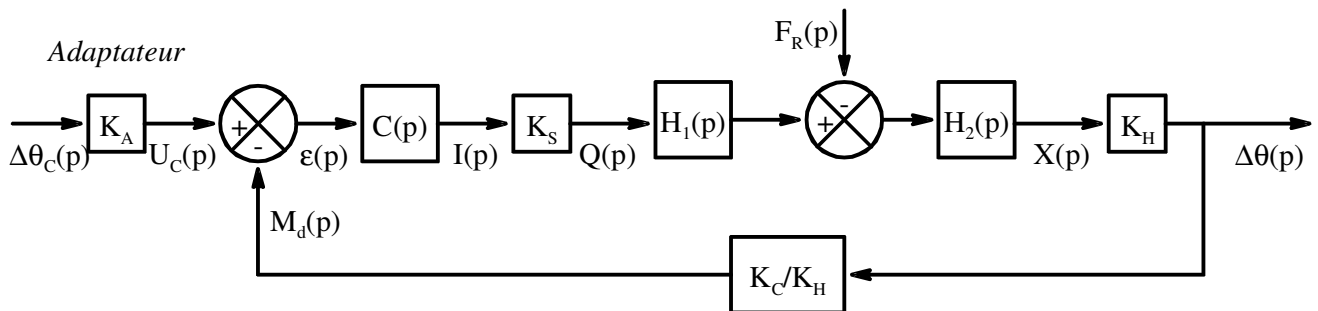
Pour supprimer la résonnance il faut :  $\xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2 \cdot S} \cdot \sqrt{\frac{B \cdot M}{V}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \lambda \geq S \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot V}{B \cdot M}}$

A.N. :  $\lambda \geq 9,4 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{2 \times 48 \cdot 10^{-6}}{1,5 \cdot 10^9 \times 0,5}} = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1} = 0,031 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{b}^{-1}$

**1.4-** Avec un coefficient de débit de fuite de  $\lambda = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}$ , on obtient :

$\xi = \frac{5 \cdot 10^{-10}}{2 \times 9,4 \cdot 10^{-4}} \cdot \sqrt{\frac{1,5 \cdot 10^9 \times 0,5}{48 \cdot 10^{-6}}} = 1,03$  et :  $\omega_0 = 9,4 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{1,5 \cdot 10^9}{0,5 \times 48 \cdot 10^{-6}}} = 7\,600 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

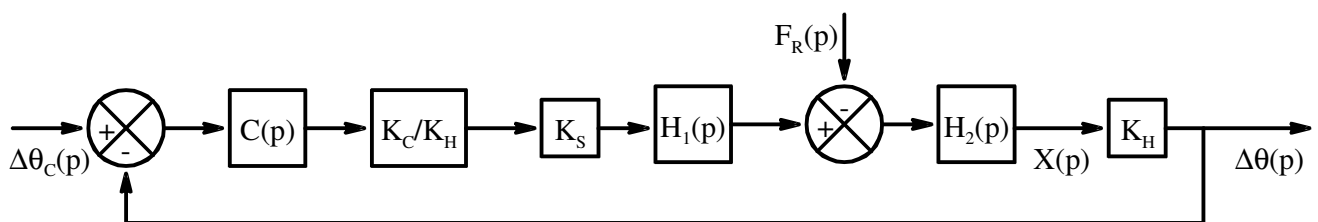
**1.5-** Le schéma bloc simplifié est équivalent au schéma bloc suivant :



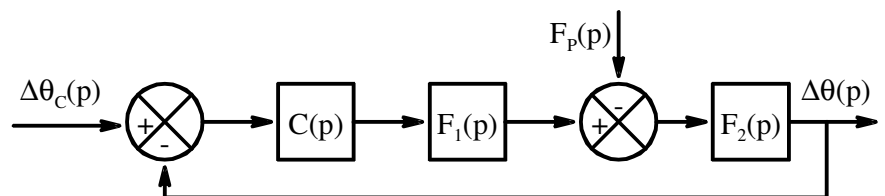
Pour avoir un fonctionnement normal ( $\varepsilon(p) = 0$  pour  $\Delta\theta(p) = \Delta\theta_c(p)$ ) il faut donc :

$$K_A = \frac{K_C}{K_H}$$

On obtient donc le schéma bloc à retour unitaire :



Soit encore :



Avec :  $F_1(p) = \frac{K_C \cdot K_S}{K_H} \cdot H_1(p) \Rightarrow$

$$F_1(p) = \frac{\frac{S \cdot K_C \cdot K_S}{K_H \cdot \lambda}}{1 + \frac{V}{\lambda \cdot B} \cdot p}$$

Et :  $F_2(p) = H_2(p) \cdot K_H \Rightarrow$

$$F_2(p) = \frac{\frac{\lambda \cdot K_H}{S^2} \cdot \left(1 + \frac{V}{\lambda \cdot B} \cdot p\right)}{p \cdot \left(1 + \frac{\lambda \cdot M}{S^2} \cdot p + \frac{M \cdot V}{B \cdot S^2} \cdot p^2\right)}$$

**2<sup>ème</sup> partie : Choix et dimensionnement d'un correcteur**

**2.1-** Etant donné les fonctions  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  (Avec les applications numérique on a la FTBO non corrigée :  $H_{BONC}(p) = F_1(p).F_2(p) = \frac{66,8}{p.(1 + 2,71.10^{-4}.p + 1,73.10^{-8}.p^2)}$

Fonction de transfert produit d'un intégrateur et d'un deuxième ordre avec un gain statique :  $K_{BONC} = 66,7 \text{ V.A}^{-1}$ , Une pulsation propre  $\omega_0 = 7\,600 \text{ rad.s}^{-1}$ , et un facteur d'amortissement  $\xi = 1,03$ .

On en déduit le tracé des diagrammes de Bode asymptotiques sur la page 4 (En bleu).

**2.2-** Le critère de précision du cahier des charges impose une erreur nulle en réponse à une consigne en rampe. Donc la FTBO corrigée doit être de classe 2. Or la FTBO non corrigée est de classe 1. Donc le correcteur doit être de classe 1. **Donc le correcteur doit avoir un intégrateur.**

**2.3-** D'où l'utilisation d'un correcteur proportionnel intégral de fonction de transfert :

$$C(p) = K_P + \frac{K_i}{p} = \frac{K_i + K_P.p}{p} = \frac{K_i \left(1 + \frac{K_P}{K_i}.p\right)}{p} \Rightarrow C(p) = \frac{K.(1 + T.p)}{p} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Avec : } K = K_i \\ \text{Et : } T = \frac{K_P}{K_i} \end{array} \right.$$

**2.4-** Etant donné la FTBO non corrigé sa phase à  $30 \text{ rad.s}^{-1}$  est de :

$$\varphi_{BONC}(30) = -90^\circ - \arctan\left(\frac{2 \times 1,03 \cdot \frac{30}{7\,600}}{1 - \frac{30^2}{7\,600^2}}\right) = -90,5^\circ$$

On peut aussi remarquer que :  $30 \text{ rad.s}^{-1} \ll \omega_0 = 7\,600 \text{ rad.s}^{-1}$  Donc :  $\varphi_{BONC}(30) \approx -90^\circ$

Pour une marge de phase de  $60^\circ$  (critère de stabilité) à la pulsation de coupure  $\omega_{0dB} = 30 \text{ rad.s}^{-1}$  (critère de rapidité) il faut donc un correcteur dont  $\varphi_{Cor}(30)$  la phase à  $30 \text{ rad.s}^{-1}$  est telle que :

$$60^\circ = 180^\circ - 90,5^\circ + \varphi_{Cor}(30) \Leftrightarrow \varphi_{Cor}(30) = 60^\circ + 90,5^\circ - 180^\circ = -29,5^\circ$$

**Or un correcteur PI a une phase variant de  $-90^\circ$  à  $0^\circ$ . Donc ce correcteur peut convenir.**

La phase de ce correcteur est de :  $\varphi_{Cor}(\omega) = -90^\circ + \arctan(T.\omega)$

Il faut donc :

$$\varphi_{Cor}(30) = -29,5^\circ = -90^\circ + \arctan(30.T) \Leftrightarrow T = \frac{\tan(90^\circ - 29,5^\circ)}{30} = 0,059 \text{ s}$$

**2.4-** Etant donné la FTBO non corrigé son gain dynamique à  $30 \text{ rad.s}^{-1}$  est de :

$$G_{dBONC}(30) = 20.\log 66,8 - 20.\log 30 - 10.\log\left(\left(1 - \frac{30^2}{7\,600^2}\right)^2 + 4 \times 1,03^2 \cdot \frac{30^2}{7\,600^2}\right) = 6,95 \text{ dB}$$

Où ayant :  $30 \text{ rad.s}^{-1} \ll \omega_0 = 7\,600 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow G_{dBONC}(30) \approx 20.\log 66,8 - 20.\log 30 = 6,95 \text{ dB}$

**2.5-** Pour avoir une pulsation de coupure à 0dB de la FTBO corrigée il faut  $G_{dBCor}(30)$  le gain dynamique du correcteur tel que :  $G_{dBCor}(30) + G_{dBONC}(30) = 0 \Rightarrow G_{dBCor}(30) = -6,95 \text{ dB}$

Or le gain dynamique du correcteur PI est :  $G_{dBCor}(\omega) = 20.\log K - 20.\log \omega + 10.\log(1 + (T.\omega)^2)$

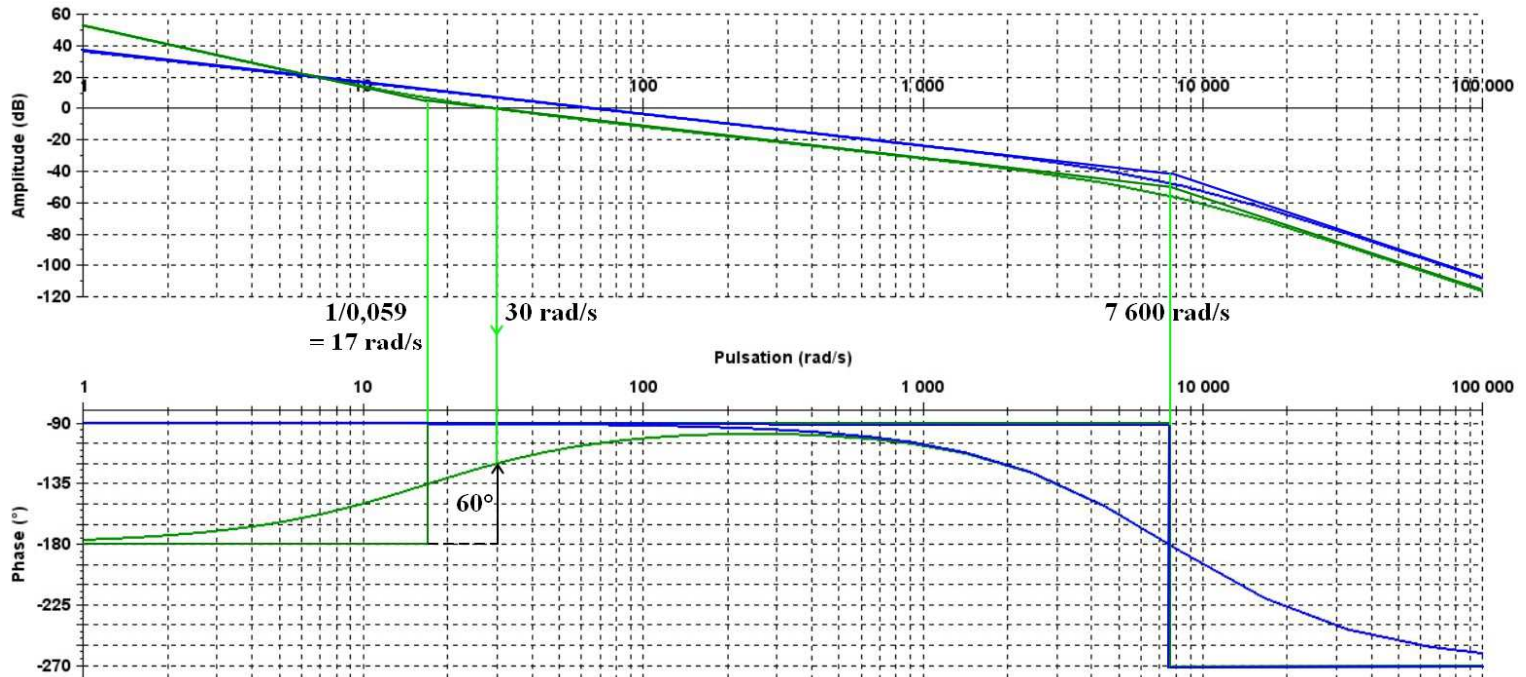
On a donc :  $20.\log K = -6,95 + 20.\log 30 - 10.\log(1 + (0,059 \times 30)^2) = 16,43 \text{ dB}$

Le gain statique du correcteur doit donc être de :  $K = 10^{(16,43/20)} = 6,6 \text{ A.V}^{-1}.\text{s}^{-1}$

**2.6-** On en déduit les gains intégral et proportionnel du correcteur PI :  $K_i = K = 6,6 \text{ A.V}^{-1}.\text{s}^{-1}$

Et :  $K_p = K_i.T = 0,39 \text{ A.V}^{-1}$

Et la FTBO corrigée :  $H_{Bo}(p) = C(p).H_{BONC}(p) = \frac{441.(1 + 0,059.p)}{p^2.(1 + 2,71.10^{-4}.p + 1,73.10^{-8}.p^2)}$

**Diagrammes de Bode de la FTBO****Non corrigée en bleu****Corrigée en Vert**

2.7- Une simulation numérique avec ce correcteur donne les réponses ci-dessous à une consigne en échelon de  $10^\circ$  puis en rampe de pente  $15^\circ/\text{s}$  avec une perturbation  $f_R(t) = 50\text{N}$  démarrant à la date  $t = 0$ .

Cela est conforme à ce qui pouvait être attendu :

☞ L'intégrateur du correcteur permet une FTBO de classe 2 et donc une erreur de trainage nulle.

☞ La pulsation de coupure à  $30 \text{ rad.s}^{-1}$  permet un temps d'établissement  $T_e = 0,115 \text{ s} \approx \frac{3}{30}$

☞ La marge de phase de  $60^\circ$  limite le dépassement à environ 20 % et donc permet un temps de réponse à 5 % d'un plus de 0,1 s mais inférieure à 0,25 s.

Ainsi corrigé l'asservissement répond à tous les critères du cahier des charges :

- ☞ Une marge de phase de  $60^\circ$
- ☞ Une erreur de trainage nulle en réponse à une rampe
- ☞ Un temps de réponse à 5 % de  $t_{5\%} = 0,21 \text{ s} \leq 250 \text{ ms}$

