

TD : Distribution à calage variable : Corrigé

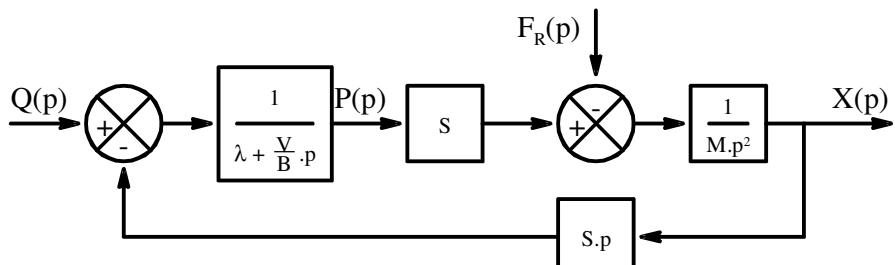
1^{ière} partie : Modélisation du système

1.1- Les transformées de Laplace des équations (a) et (b) donnent :

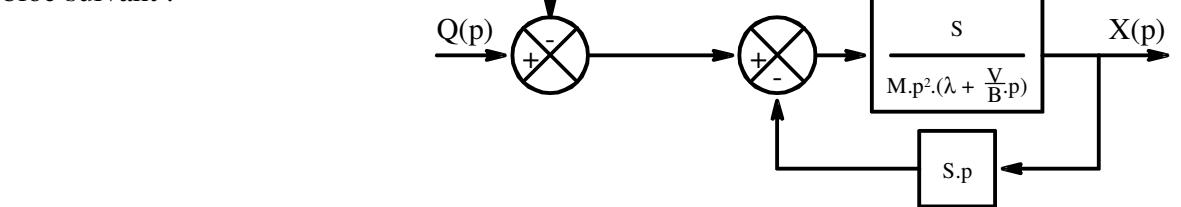
$$(a) \Rightarrow S.P(p) - F_R(p) = M.p^2.X(p) \Rightarrow X(p) = \frac{1}{M.p^2} \cdot (S.P(p) - F_R(p))$$

$$(b) \Rightarrow Q(p) - \lambda.P(p) = S.p.X(p) + \frac{V}{B}.p.P(p) \Rightarrow P(p) = \frac{1}{\lambda + \frac{V}{B}.p} (Q(p) - S.p.X(p))$$

On en déduit le schéma bloc du vérin :



1.2- Ce schéma bloc est équivalent aux deux schémas bloc suivant :



On en déduit donc :

$$H_1(p) = \frac{\frac{S}{\lambda}}{1 + \frac{V}{\lambda \cdot B} \cdot p}$$

$$\text{Et : } H_2(p) = \frac{\lambda \left(1 + \frac{V}{\lambda \cdot B} \cdot p \right)}{S} \cdot \frac{\frac{S}{\lambda \cdot M \cdot p^2 + \frac{M \cdot V}{B} \cdot p^3}}{1 + \frac{S^2 \cdot p}{\lambda \cdot M \cdot p^2 + \frac{M \cdot V}{B} \cdot p^3}}$$

Soit après calcul :

$$H_2(p) = \frac{\frac{\lambda}{S^2} \cdot \left(1 + \frac{V}{\lambda \cdot B} \cdot p \right)}{p \cdot \left(1 + \frac{\lambda \cdot M}{S^2} \cdot p + \frac{M \cdot V}{B \cdot S^2} \cdot p^2 \right)}$$

On en déduit également la FTBO non corrigée :

$$H_{\text{BONC}}(p) = \frac{\frac{1}{S}}{p \cdot \left(1 + \frac{\lambda \cdot M}{S^2} \cdot p + \frac{M \cdot V}{B \cdot S^2} \cdot p^2 \right)}$$

1.3- La FTBO est un troisième ordre de classe 1 soit le produit d'un intégrateur et d'un second ordre simple. Lequel second ordre a :

$$\text{☞ Une pulsation propre : } \omega_0 = S \cdot \sqrt{\frac{B}{M \cdot V}}$$

$$\text{et : } \text{☞ Un facteur d'amortissement : } \xi = \frac{1}{2} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{B}{M \cdot V}} \cdot \frac{\lambda \cdot M}{S^2} = \frac{\lambda}{2 \cdot S} \cdot \sqrt{\frac{B \cdot M}{V}}$$

La résonnance dépend du facteur ξ lequel est fonction du coefficient de débit de fuit λ . Donc en augmentant la valeur de λ on peut diminuer voir supprimer la résonnance.

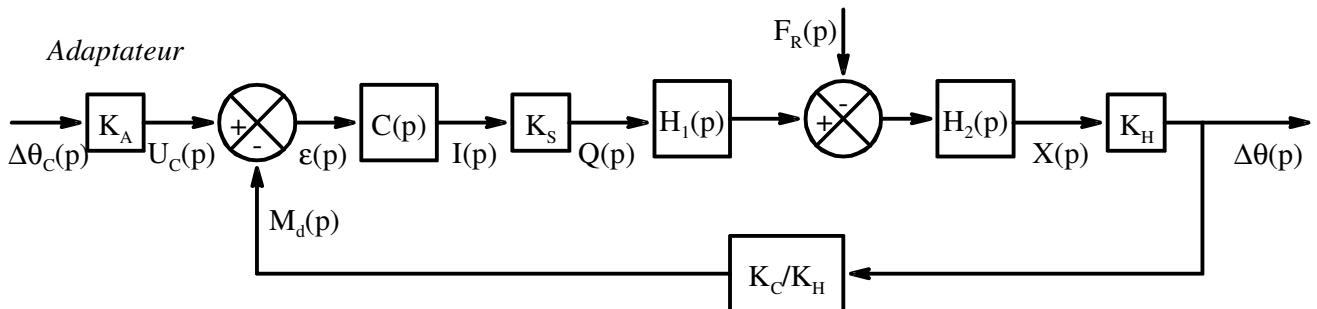
$$\text{Pour supprimer la résonnance il faut : } \xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2 \cdot S} \cdot \sqrt{\frac{B \cdot M}{V}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \lambda \geq S \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot V}{B \cdot M}}$$

$$\text{A.N. : } \lambda \geq 9,4 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{2 \times 48 \cdot 10^{-6}}{1,5 \cdot 10^9 \times 0,5}} = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1} = 0,031 \text{ l.s}^{-1} \cdot \text{b}^{-1}$$

1.4- Avec un coefficient de débit de fuite de $\lambda = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}$. on obtient :

$$\xi = \frac{5 \cdot 10^{-10}}{2 \times 9,4 \cdot 10^{-4}} \cdot \sqrt{\frac{1,5 \cdot 10^9 \times 0,5}{48 \cdot 10^{-6}}} = 1,03 \quad \text{et : } \omega_0 = 9,4 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{1,5 \cdot 10^9}{0,5 \times 48 \cdot 10^{-6}}} = 7600 \text{ rad.s}^{-1}$$

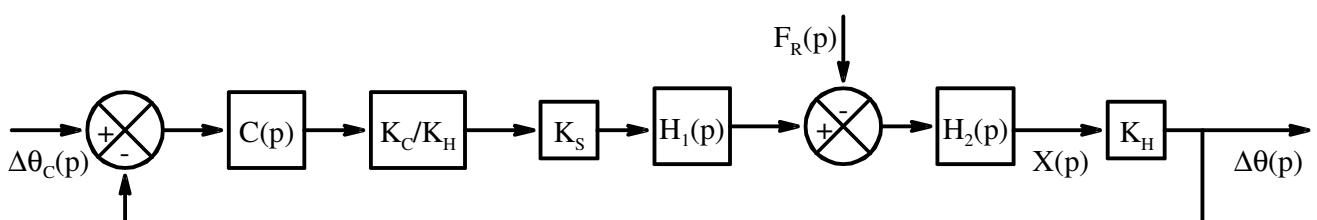
1.5- Le schéma bloc simplifié est équivalent au schéma bloc suivant :



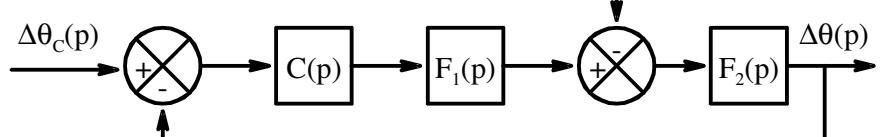
Pour avoir un fonctionnement normal ($\varepsilon(p) = 0$ pour $\Delta\theta(p) = \Delta\theta_C(p)$) il faut donc :

$$K_A = \frac{K_C}{K_H}$$

On obtient donc le schéma bloc à retour unitaire :



Soit encore :



$$\text{Avec : } F_1(p) = \frac{K_C \cdot K_S}{K_H} \cdot H_1(p) \Rightarrow$$

$$F_1(p) = \frac{\frac{S \cdot K_C \cdot K_S}{K_H \cdot \lambda}}{1 + \frac{V}{\lambda \cdot B} \cdot p}$$

$$\text{Et : } F_2(p) = H_2(p) \cdot K_H \Rightarrow$$

$$F_2(p) = \frac{\frac{\lambda \cdot K_H}{S^2} \cdot \left(1 + \frac{V}{\lambda \cdot B} \cdot p\right)}{p \cdot \left(1 + \frac{\lambda \cdot M}{S^2} \cdot p + \frac{M \cdot V}{B \cdot S^2} \cdot p^2\right)}$$

2^{ième} partie : Choix et dimensionnement d'un correcteur

2.1- Etant donné les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ (Avec les applications numériques on a la FTBO non corrigée : $H_{BONC}(p) = F_1(p).F_2(p) = \frac{66,8}{p.(1 + 2,71 \cdot 10^{-4} \cdot p + 1,73 \cdot 10^{-8} \cdot p^2)}$)

Fonction de transfert produit d'un intégrateur et d'un deuxième ordre avec un gain statique : $K_{BONC} = 66,7 \text{ V.A}^{-1}$, Une pulsation propre $\omega_0 = 7600 \text{ rad.s}^{-1}$, et un facteur d'amortissement $\xi = 1,03$.

On en déduit le tracé des diagrammes de Bode asymptotiques sur la page 4 (En bleu).

2.2- Le critère de précision du cahier des charges impose une erreur nulle en réponse à une consigne en rampe. Donc la FTBO corrigée doit être de classe 2. Or la FTBO non corrigée est de classe 1. Donc le correcteur doit être de classe 1. **Donc le correcteur doit avoir un intégrateur.**

2.3- D'où l'utilisation d'un correcteur proportionnel intégral de fonction de transfert :

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = \frac{K_i + K_p \cdot p}{p} = \frac{K_i \left(1 + \frac{K_p}{K_i} \cdot p \right)}{p} \Rightarrow C(p) = \frac{K \cdot (1 + T \cdot p)}{p} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Avec : } K = K_i \\ \text{Et : } T = \frac{K_p}{K_i} \end{array} \right.$$

2.4- Etant donné la FTBO non corrigé sa phase à 30 rad.s^{-1} est de :

$$\varphi_{BONC}(30) = -90^\circ - \arctan \left(\frac{2 \times 1,03 \cdot \frac{30}{7600}}{1 - \frac{30^2}{7600^2}} \right) = -90,5^\circ$$

On peut aussi remarquer que : $30 \text{ rad.s}^{-1} \ll \omega_0 = 7600 \text{ rad.s}^{-1}$ Donc : $\varphi_{BONC}(30) \approx -90^\circ$

Pour une marge de phase de 60° (critère de stabilité) à la pulsation de coupure $\omega_{0dB} = 30 \text{ rad.s}^{-1}$ (critère de rapidité) il faut donc un correcteur dont $\varphi_{Cor}(30)$ la phase à 30 rad.s^{-1} est telle que :

$$60^\circ = 180^\circ - 90,5^\circ + \varphi_{Cor}(30) \Leftrightarrow \varphi_{Cor}(30) = 60^\circ + 90,5^\circ - 180^\circ = -29,5^\circ$$

Or un correcteur PI a une phase variant de -90° à 0° . Donc ce correcteur peut convenir.

La phase de ce correcteur est de : $\varphi_{Cor}(\omega) = -90^\circ + \arctan(T \cdot \omega)$

Il faut donc :

$$\varphi_{Cor}(30) = -29,5^\circ = -90^\circ + \arctan(30 \cdot T) \Leftrightarrow T = \frac{\tan(90^\circ - 29,5^\circ)}{30} = 0,059 \text{ s}$$

2.4- Etant donné la FTBO non corrigé son gain dynamique à 30 rad.s^{-1} est de :

$$G_{dBBONC}(30) = 20 \cdot \log 66,8 - 20 \cdot \log 30 - 10 \cdot \log \left(\left(1 - \frac{30^2}{7600^2} \right)^2 + 4 \times 1,03^2 \cdot \frac{30^2}{7600^2} \right) = 6,95 \text{ dB}$$

Où ayant : $30 \text{ rad.s}^{-1} \ll \omega_0 = 7600 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow G_{dBBONC}(30) \approx 20 \cdot \log 66,8 - 20 \cdot \log 30 = 6,95 \text{ dB}$

2.5- Pour avoir une pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO corrigée il faut $G_{dBCor}(30)$ le gain dynamique du correcteur tel que : $G_{dBCor}(30) + G_{dBBONC}(30) = 0 \Rightarrow G_{dBCor}(30) = -6,95 \text{ dB}$

Or le gain dynamique du correcteur PI est : $G_{dBCor}(\omega) = 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log \omega + 10 \cdot \log(1 + (T \cdot \omega)^2)$

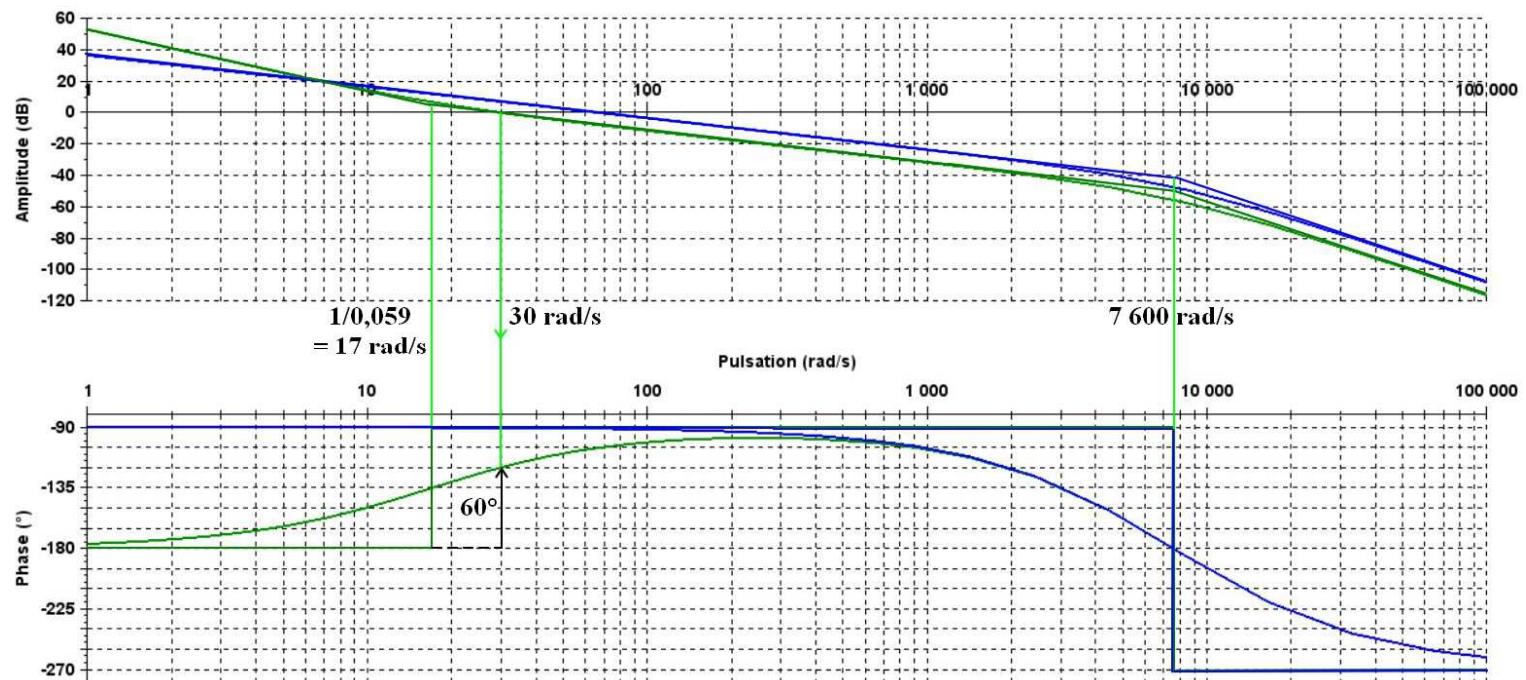
On a donc : $20 \cdot \log K = -6,95 + 20 \cdot \log 30 - 10 \cdot \log(1 + (0,059 \times 30)^2) = 16,43 \text{ dB}$

Le gain statique du correcteur doit donc être de : $K = 10^{(16,43/20)} = 6,6 \text{ A.V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

2.6- On en déduit les gains intégral et proportionnel du correcteur PI : $K_i = K = 6,6 \text{ A.V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

Et : $K_p = K_i \cdot T = 0,39 \text{ A.V}^{-1}$

$$\text{Et la FTBO corrigée : } H_{Bo}(p) = C(p) \cdot H_{BONC}(p) = \frac{441 \cdot (1 + 0,059 \cdot p)}{p^2 \cdot (1 + 2,71 \cdot 10^{-4} \cdot p + 1,73 \cdot 10^{-8} \cdot p^2)}$$

Diagrammes de Bode de la FTBO**Non corrigé en bleu****Corrigée en Vert**

2.7- Une simulation numérique avec ce correcteur donne les réponses ci-dessous à une consigne en échelon de 10° puis en rampe de pente $15^\circ/\text{s}$ avec une perturbation $f_R(t) = 50\text{N}$ démarrant à la date $t=0$.

Cela est conforme à ce qui pouvait être attendu :

- ☞ L'intégrateur du correcteur permet une FTBO de classe 2 et donc une erreur de trainage nulle.
- ☞ La pulsation de coupure à 30 rad.s^{-1} permet un temps d'établissement $T_e = 0,115 \text{ s} \approx \frac{3}{30}$
- ☞ La marge de phase de 60° limite le dépassement à environ 20 % et donc permet un temps de réponse à 5 % d'un plus de 0,1 s mais inférieure à 0,25 s.

Ainsi corrigé l'asservissement répond à tous les critères du cahier des charges :

- ☞ Une marge de phase de 60°
- ☞ Une erreur de trainage nulle en réponse à une rampe
- ☞ Un temps de réponse à 5 % de $t_{5\%} = 0,21 \text{ s} \leq 250 \text{ ms}$

