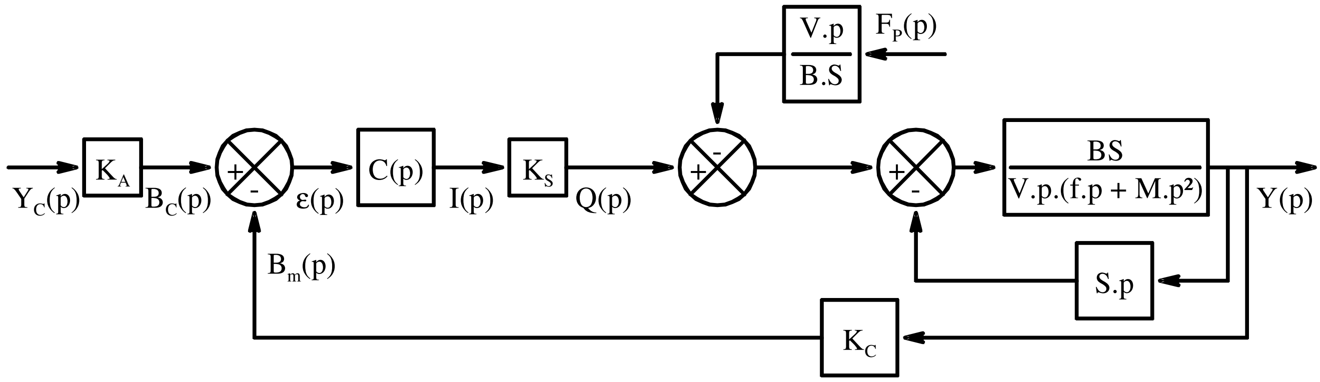
TD* : Suspension de camion - Corrigé

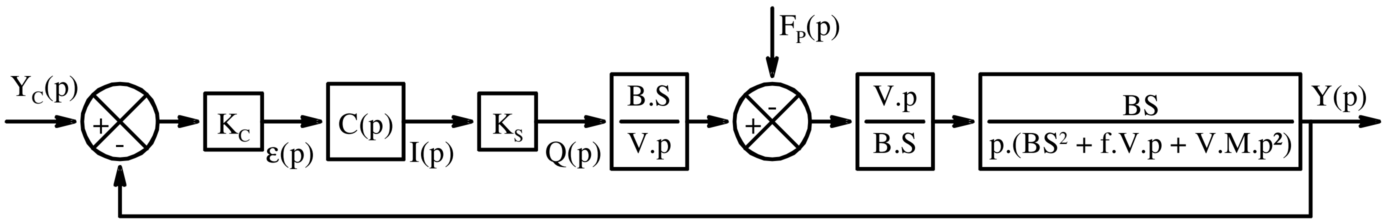
1- Modélisation

En passant la F(p) à gauche de la boucle du « Coussin » on obtient ce schéma bloc équivalent

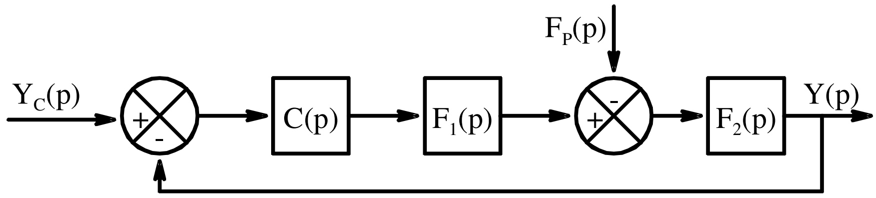


L'asservissement ayant un fonctionnement normal : $K_A = K_C$. D'autre part par la relation de Black on obtient la fonction de transfert du coussin : $H_C(p) = \dfrac{\dfrac{B.S}{V.p.(f.p + M.p^2)}}{1 + \dfrac{B.S^2}{V.(f.p + M.p^2)}} = \dfrac{B.S}{p.(B.S^2 + V.f.p. + V.M.p^2)}$

Donc, en repassant le bloc $\dfrac{V.p}{B.S}$ sur la chaine directe on obtient ce nouveau schéma bloc équivalent.



D'où finalement le schéma bloc équivalent :



Avec : $F_1(p) = \dfrac{K_C.K_S.B.S}{V.p}$

$\mathbf{F_1(p) = \dfrac{3.10^6}{p}}$ **N.bit.m^{-1}.A^{-1}**

Et : $F_2(p) = \dfrac{\dfrac{V}{B.S^2}}{1 + \dfrac{V.f}{BS^2}.p + \dfrac{V.M}{B.S^2}.p^2}$ Soit : $\mathbf{F_2(p) = \dfrac{4.10^{-6}}{1 + 0{,}1.p + 0{,}04.p^2}}$ **m.N^{-1}**

D'où la FTBO non corrigée : $\mathbf{H_{BONC}(p) = \dfrac{12}{p.(1 + 0{,}1.p + 0{,}04.p^2)}}$ **bit.A^{-1}**

La FTBO est de classe 1 avec son intégrateur placé en amont de la perturbation. Donc les critères de précision seront respectés ($\varepsilon_{st} = 0$ et $\varepsilon_{tt} \le 0{,}03$ m pour $V_0 = 0{,}03$ m.s^{-1}) à la condition cependant que : $\dfrac{0{,}03}{K_{BO}} \le 0{,}03$ où K_{BO} est le gain de la FTBO Corrigé. $\Leftrightarrow$ $K_{BO} \ge 1$

Donc il n'est pas nécessaire d'utiliser un correcteur avec un intégrateur : PI ou PID.

Un correcteur proportionnel, à avance de phase ou à retard de phase peuvent donc convenir à la condition que celui-ci puisse vérifier simultanément les critères de rapidité : $\omega_{0dB} \ge 1$ rad.s^{-1} et de stabilité $M_G \ge 10$ dB et $M_\varphi \ge 45°$ avec $12.K \ge 1$ où K est le gain du correcteur en A.bit^{-1}.

2- Etude avec un correcteur proportionnel

La FTBO non corrigée est le produit d'un intégrateur et une fonction de transfert de pulsation propre : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{0{,}04}}$ **= 5 rad.s^{-1}** et de facteur d'amortissement : $\xi = \dfrac{5}{2}.0{,}1 = 0{,}25$.

Le gain de la FTBO non corrigée à $\omega = 1$ rad.s^{-1} est donc de :

$$G_{dBBONC}(1) = 20.\log 12 - 10.\log\left(\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^2 + 4\times 0{,}25^2.\left(\frac{1}{5}\right)^2\right) = 21{,}9 \text{ dB}$$

Pour respecter le critère de rapidité ($\omega_{0dB} \geq 1$ rad.s^{-1}), il est donc nécessaire que le gain du correcteur proportionnel soit tel que : $20.\log K \geq -21{,}9$ dB $\Leftrightarrow$ **$K \geq 10^{-21{,}9/20} = 0{,}080$ A.bit^{-1}**.

D'autre part on a vu dans la première partie que pour respecter les critères de précision il fallait que : $12.K \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad K \geq \dfrac{1}{12}$ **= 0,0833 A.bit^{-1}**.

Donc pour respecter les critères de précision et de rapidité il faut que : $K \geq \dfrac{1}{12}$ A.bit^{-1}

Avec un correcteur proportionnel $C(p) = \dfrac{1}{12} = 0{,}084$ A.bit^{-1} le gain de la FTBO corrigée s'écrit :

$$G_{dBBO}(\omega) = -20.\log \omega - 10.\log\left(\left(1-\left(\frac{\omega}{5}\right)^2\right)^2 + 4\times 0{,}25^2.\left(\frac{\omega}{5}\right)^2\right)$$ On obtient donc : **$\omega_{0dB} = 1{,}04$ rad.s^{-1}**

D'où la marge de phase : **$M_\varphi = 180° - 90° - \arctan\left(\dfrac{2\times 0{,}25\times 5\times 1{,}04}{5^2 - 1{,}04^2}\right) = 83{,}8° \geq 45°$**

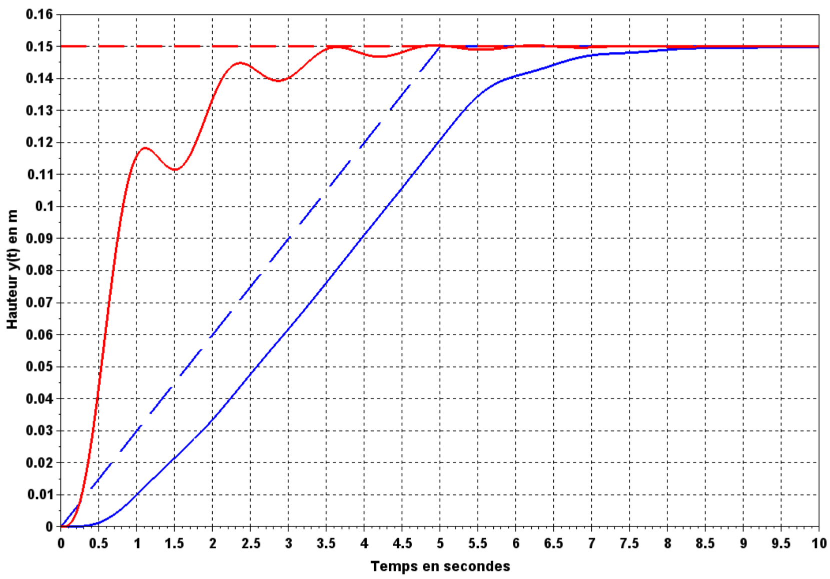
Le critère de marge de phase est donc respecté

Avec un correcteur proportionnel $C(p) = \dfrac{1}{12}$ la pulsation pour laquelle la phase de la FTBO est de $-180°$ est : $\omega_{-180°} = \omega_0 = 5$ rad.s^{-1}. Pulsation à laquelle le gain de la FTBO s'écrit :

$G_{dBBO}(\omega) = -20.\log \omega - 20.\log(2\times 0{,}25) = -8{,}0$ dB. D'où la marge de gain : **$M_G = 8{,}0$ dB < 10 dB**

Le critère de marge de gain n'est donc pas respecté

La simulation de la réponse du système (sans perturbation) à un échelon de consigne $y_C(t) = 0{,}15$ m ou à une rampe de pente 0,03 m.s^{-1} nous donne les courbes ci-contre.



On a bien ce qui était attendu :

☞ Une erreur statique nulle.

☞ Une erreur de trainage de 0,03 m.

☞ Pas de dépassement de la valeur finale car la marge de phase est proche de 90 °

☞ Un temps de réponse de 3,25 s proche de : $t_e = \dfrac{3}{\omega_{0dB}} = \dfrac{3}{1} = 3$ s

☞ Une réponse à un échelon de consigne qui progresse avec des oscillations, ce qui est caractéristique d'une marge de gain trop faible

3- Etude avec un correcteur à retard de phase

Etant donné pour la FTBO non corrigée, la pulsation propre du second ordre : $\omega_0 = 5$ rad.s^{-1} et son facteur d'amortissement $\xi = 0{,}25$. La pulsation et le facteur de résonnance sont :

$$\boldsymbol{\omega_r = \omega_0.\sqrt{1-2.\xi^2} = 4{,}68 \text{ rad.s}^{-1}} \qquad \boldsymbol{Q_{rdB} = -20.\log\left(2.\xi.\sqrt{1-\xi^2}\right) = 6{,}30 \text{ dB}}$$

Pour compenser le facteur de résonnance on choisit donc un facteur du correcteur à retard de phase de manière à ce qu'il ait un gain diminué de Q_{rdB} à la pulsation où sa phase est minimale. On a donc :

$$10.\log b = -Q_{rdB} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b = 10^{-QrdB/10} = 0{,}234} \qquad \text{et :} \qquad \boldsymbol{\tau = \frac{1}{\omega_r.\sqrt{b}} = 0{,}442 \text{ s}}$$

D'autre part son gain est choisi de façon à ce que : $\boldsymbol{\omega_{0dB} = 1}$ **rad.s**$^{-1}$. On a donc :

$$20.\log K + 10.\log(1+(\tau.b)^2) - 10.\log(1+\tau^2) + 20.\log 12 - 10.\log\left(\left(1-\left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\times\xi^2.\left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2\right) = 0$$

On obtient donc : $20.\log K = -21{,}16$ dB $\quad$ $\boldsymbol{K = 10^{-21{,}16/20} = 0{,}087}$ **A.bit**$^{-1}$

Le correcteur chois à donc une fonction de transfert : $\boldsymbol{C(p) = \dfrac{0{,}087.(1+0{,}103.p)}{1+0{,}442.p}}$

Ce correcteur est dimensionné de pour avoir : $\boldsymbol{\omega_{0dB} = 1}$ **rad.s**$^{-1}$**. ≥ 1 rad.s**$^{-1}$.

Le critère de rapidité est donc respecté

A la pulsation $\omega_{0dB} = 1$ rad.s^{-1}. la phase de la FTBO corrigée est de :

$$\varphi_{BO}(\omega_{odB}) = -90° - \arctan\left(\frac{2.\xi.\omega_0\times 1}{\omega_0^2 - 1^2}\right) + \arctan(0{,}103\times 1) - \arctan(0{,}442\times 1) = -114°$$

D'où la marge de phase : $\boldsymbol{M_\varphi = 180° - 114° = 66° \geq 45°}$

Le critère de marge de phase est donc respecté

La pulsation $\omega_{-180°}$ à laquelle la phase de la FTBO est de $-180°$ est telle que :

$$-180° = -90° - \arctan\left(\frac{2.\xi.\omega_0.\omega_{-180°}}{\omega_0^2 - \omega_{-180°}^2}\right) + \arctan(0{,}103.\omega_{-180°}) - \arctan(0{,}442.\omega_{-180°})$$

On a par résolution numérique : $\boldsymbol{\omega_{-180°} = 4{,}11}$ **rad.s**$^{-1}$ A cette pulsation le gain est de :

$$20.\log\left(\frac{12\times 0{,}087}{4{,}11}\right) + 10.\log\left(\frac{1+(0{,}103\times 4{,}11)^2}{1+(0{,}442\times 4{,}11)^2}\right) - 10.\log\left(\left(1-\left(\frac{4{,}11}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\times\xi^2.\left(\frac{4{,}11}{\omega_0}\right)^2\right) = -11{,}9 \text{ dB}$$

D'où la marge de gain : $\boldsymbol{M_G = -G_{dbBO}(\omega_{-180°}) = +11{,}9 \text{ dB} \geq 10 \text{ dB}}$

Le critère de marge de gain est donc respecté

Le gain du correcteur étant de 0,087 A.bit^{-1}, le gain de la FTBO corrigé est de $12\times 0{,}087 = 1{,}044$

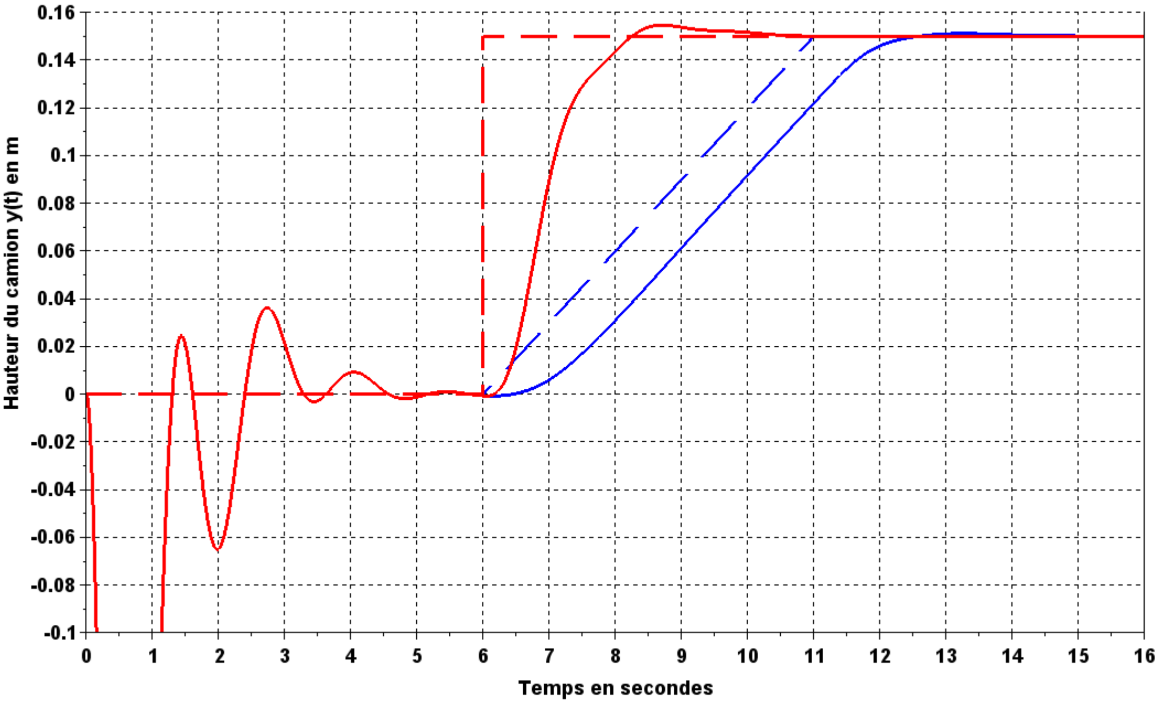
D'autre part la FTBO est de classe 1 avec son intégrateur en amont de la perturbation. Donc l'erreur statique (avec perturbation) est nulle et l'erreur de trainage avec une rampe de pente 0,03 m.s^{-1} (avec perturbation) est de : $\boldsymbol{\varepsilon_{tt} = \dfrac{0{,}03}{1{,}04} = 0{,}029 \text{ m} \leq 0{,}03 \text{ m}}$

Les critères de précision sont donc respectés

On donne page 4 :
- ☞ La simulation de la réponse du système avec une perturbation de $f_p(t) = 100$ KN (100 KN ⇔ 10 tonnes) dès la date t = 0 s puis à la date t = 6 s un échelon de consigne $y_C(t) = 0{,}15$ m puis une rampe de pente 0,03 m.s^{-1}.
- ☞ Le diagramme de Bode de la FTBO corrigée

Réponse temporelle

Remarque : L'apparition de la perturbation à la date t = 0 s correspond au camion que l'on pose brutalement sur le sol alors que la pression dans les coussins est nulle.



On a bien ce qui était attendu :

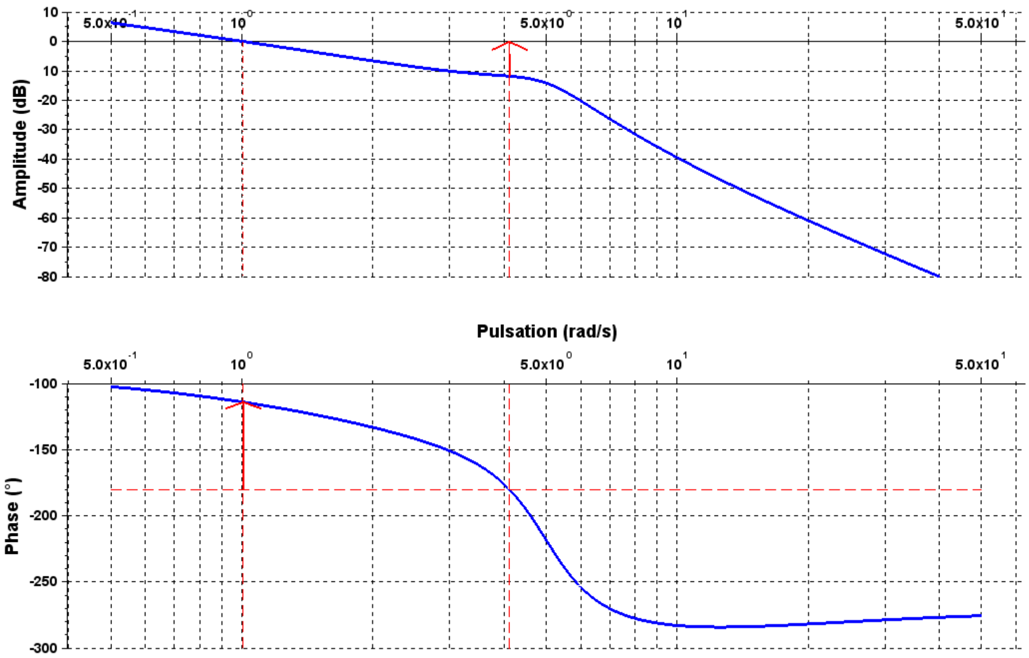
☞ Une erreur statique nulle. ☞ Une erreur de trainage de 0,029 m.

☞ Un dépassement de la valeur finale d'environ 3% car la marge de phase est proche de 66°

☞ Un temps d'établissement de 2,7 s (1ier maximum) proche de : $t_e = \dfrac{3}{\omega_{0dB}} = \dfrac{3}{1} = 3$ s ce qui donne un temps de réponse à 5 % d'environ : $t_{5\%} = 2$ s

☞ Une progression de la réponse à un échelon plus régulière car la marge de gain a été augmentée.

Diagramme de Bode de la FTBO corrigée



Marge de phase : $M_\varphi \approx 66°$ Marge de phase : $M_G \approx 12$ dB