CCMP - PSI - 2015 Robot humanoïde Lola Corrigé

Partie 1 : Stabilité du robot

Question 1

Si le point H_S où le moment de l'action du sol sur le pied existe alors on a :

$$\overrightarrow{M_{H_S}(sol\rightarrow pied)} = \vec{0} = \overrightarrow{M_{O_S}(sol\rightarrow pied)} + \overrightarrow{H_S O_S} \wedge \overrightarrow{R_{sol\rightarrow pied}}$$

$$\vec{0} = b.\int_{(M\in\Sigma)} \overrightarrow{O_S M} \wedge [\,p(M).\overrightarrow{z_0} + t(M).\overrightarrow{y_0}\,].dy - Y_{H_S}.\overrightarrow{y_0} \wedge b.\int_{(M\in\Sigma)} [\,p(M).\overrightarrow{z_0} + t(M).\overrightarrow{y_0}\,].dy$$

$$\vec{0} = \int_{(M\in\Sigma)} y.\overrightarrow{y_0} \wedge [\,p(M).\overrightarrow{z_0} + t(M).\overrightarrow{y_0}\,].dy - Y_{H_S}.\int_{(M\in\Sigma)} \overrightarrow{y_0} \wedge [\,p(M).\overrightarrow{z_0} + t(M).\overrightarrow{y_0}\,].dy$$

$$\vec{0} = \int_{(M\in\Sigma)} y.p(M).\overrightarrow{x_0}.dy - Y_{H_S}.\int_{(M\in\Sigma)} p(M).\overrightarrow{x_0}.dy = \left[\int_{(M\in\Sigma)} y.p(M).dy - Y_{H_S}.\int_{(M\in\Sigma)} p(M).dy\right].\overrightarrow{x_0}$$

Or $\forall\, M \in \Sigma$, $p(M) > 0$ Donc : $\int_{(M\in\Sigma)} p(M).dy > 0$ Donc le poitn H_S existe bien et on a :

$$\mathbf{Y_{H_S} = \dfrac{\int_{(M\in\Sigma)} y.p(M).dy}{\int_{(M\in\Sigma)} p(M).dy}}$$

Donc le torseur de l'action du sol sur le pied est bien un glisseur d'axe passant par H_S tel que : $\mathbf{\overrightarrow{O_S H_S} = Y_{H_S}.\overrightarrow{y_0}}$

D'autre part, $\forall\, M \in \Sigma$ on a : $y < Y_{C_S}$ et $p(M) > 0$ On en déduit que :

$$\int_{(M\in\Sigma)} y.p(M).dy < Y_{C_S}.\int_{(M\in\Sigma)} p(M).dy \quad \text{Soit :} \quad Y_{H_S} = \frac{\int_{(M\in\Sigma)} y.p(M).dy}{\int_{(M\in\Sigma)} p(M).dy} < Y_{C_S}$$

Donc ayant : $\mathbf{Y_{H_S} < Y_{C_S}}$ **on a :** $\mathbf{M \in [O_S, C_S]}$

Question 2

Les actions mécaniques extérieures s'appliquant sur le système {1 + 2} sont :

- ☞ Le poids : Une force de résultante : $\overrightarrow{P} = -\,m_1.g.\overrightarrow{z_0}$ appliquée en G
- ☞ L'action du sol sur le pied : Une force de résultante $\overrightarrow{R_{sol\rightarrow pied}}$ appliquée en H_S

On note $\overrightarrow{a_{G\in 1/Sol}}$ le vecteur accélération du centre d'inertie G de l'ensemble {1 + 2}. L'application du théorème de la résultante dynamique s'écrit donc :

$$m_1.\overrightarrow{a_{G\in 1/Sol}} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R_{sol\rightarrow pied}} \quad\Leftrightarrow\quad m_1.\frac{d^2Y_G}{dt^2}.\overrightarrow{y_0} = -\,m_1.g.\overrightarrow{z_0} + N_{Sol\rightarrow pied}.\overrightarrow{z_0} + T_{Sol\rightarrow pied}.\overrightarrow{y_0} \qquad (a)$$

D'autre part le non basculement du robot se traduit par le fait que le torse reste en mouvement de translation par rapport au sol. Donc cela se traduit par le fait que le moment dynamique au centre d'inertie G de l'ensemble {1 + 2} dans son mouvement par rapport au sol est nul. Soit, par application du théorème du moment dynamique au cente d'inertie G de {1 + 2} :

$$\vec{0} = \overrightarrow{GG} \wedge \overrightarrow{P} + \overrightarrow{GH_S} \wedge \overrightarrow{R_{sol\rightarrow pied}} = \vec{0} + [\overrightarrow{GO_S} \wedge \overrightarrow{O_S H_S}] \wedge \overrightarrow{R_{sol\rightarrow pied}}$$

$$[-\,y_G(t).\overrightarrow{y_0} + z_G.\overrightarrow{z_0} + Y_{H_S}.\overrightarrow{y_0}] \wedge [N_{Sol\rightarrow pied}.\overrightarrow{z_0} + T_{Sol\rightarrow pied}.\overrightarrow{y_0}\,] = \vec{0} \qquad (b)$$

On obtient donc :

- ☞ Par projection de (a) sur $\overrightarrow{y_0}$: $T_{Sol\rightarrow pied} = m_1.\dfrac{d^2Y_G}{dt^2}$
- ☞ Par projection de (a) sur $\overrightarrow{z_0}$: $N_{Sol\rightarrow pied} - m_1.g = 0$
- ☞ Par projection de (b) sur $\overrightarrow{x_0}$: $(Y_{H_S} - y_G(t)).N_{Sol\rightarrow pied} + z_G.T_{Sol\rightarrow pied} = 0$

De ces trois équations on en déduit que la condition de non basculement s'écrit :

$$\mathbf{Y_{H_S} = Y_G - \frac{Z_G}{g}.\frac{d^2Y_G}{dt^2}}$$

Question 3

D'autre part la condition de non glissement du pied sur le sol s'écrit : $|T_{Sol\to pied}| \le \mu.|N_{Sol\to pied}|$

Soit d'après les deux première équations précédentes : $m_1.\dfrac{d^2Y_G}{dt^2} \le \mu.m_1.g$

D'où la condition de non glissement du pied sur le sol : $\boldsymbol{\mu \ge \dfrac{1}{g}.\dfrac{d^2Y_G}{dt^2}}$

Question 4

La condition de non basculement s'écrit : $Y_{H_s} = Y_G - \dfrac{Z_G}{g}.\dfrac{d^2Y_G}{dt^2}$ Or : $-\dfrac{\text{foulée}}{4} \le Y_G \le \dfrac{\text{foulée}}{4}$

D'où la condition de non basculement s'écrit : $-\dfrac{\text{foulée}}{4} - \dfrac{Z_G}{g}.\dfrac{d^2Y_G}{dt^2} \le Y_{H_s} \le \dfrac{\text{foulée}}{4} - \dfrac{Z_G}{g}.\dfrac{d^2Y_G}{dt^2}$

Sachant que : $0 \le Y_{H_s} \le L$, le non basculement induit que :

$$-\frac{\text{foulée}}{4} - \frac{Z_G}{g}.\frac{d^2Y_G}{dt^2} \le 0 \quad \text{(toujours vérifié)}$$

Et : $L \le \dfrac{\text{foulée}}{4} - \dfrac{Z_G}{g}.\dfrac{d^2Y_G}{dt^2} \quad \Leftrightarrow \quad \text{foulée} \ge 4.\left[L + \dfrac{Z_G}{g}.\dfrac{d^2Y_G}{dt^2}\right]$

Or $4.\left[L + \dfrac{Z_G}{g}.\dfrac{d^2Y_G}{dt^2}\right] = 4 \times \left[300 + \dfrac{1\ 050}{9{,}81} \times 1{,}39\right] = 1\ 790 \text{ mm}$

Donc la condition de non basculement s'écrit : **foulée ≥ 1,79 m**

Or le cahier des charges impose une foulée maximale de 1,5 mm.

Donc la condition de non basculement n'est pas compatible avec le cahier des charges qui exige une accélération de 1,39 m.s^{-2} et une foulée inférieure à 1,5 mm

Question 5

La condition de non glissement s'écrit : $\mu \ge \dfrac{1}{g}.\dfrac{d^2Y_G}{dt^2}$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{d^2Y_G}{dt^2} \le \mu.g = 0{,}1 \times 9{,}81 = 0{,}981 \text{ m.s}^{-2}}$$

Cela n'est pas compatible avec le cahier des charges qui exige une accélération de 1,39 m.s^{-2}.

Partie 2 : Stabilité du robot

Question 6

Calculons la résultante dynamique du tronc dans son mouvement par rapport à 0

Par la relation de Varignon sur les vecteur vitesse on a : $\overrightarrow{V_{G_T\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O_T\in 1/0}} + \overrightarrow{G_TO_T} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

Du torseur cinématique du mouvement de 1 par rapport à 0 : $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha}.\overrightarrow{x_0} \\ v.\overrightarrow{y_0} \end{matrix} \right\}_{O_T}$

On en déduit : $\overrightarrow{V_{G_T\in 1/0}} = v.\overrightarrow{y_0} - Z_G.\overrightarrow{z_1} \wedge \dot{\alpha}.\overrightarrow{x_0}$ avec : $\overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{x_1}$

Soit : $\overrightarrow{V_{G_T\in 1/0}} = v.\overrightarrow{y_0} - Z_G.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1}$

Par dérivation vectorielle on en déduit le vecteur accélération du centre d'inertie du tronc ;

$$\overrightarrow{a_{G_T\in 1/0}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{G_T\in 1/0}}}{dt}\right)_{B_0} = \dot{v}.\overrightarrow{y_0} - Z_G.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - \dot{\alpha}.\overrightarrow{x_0} \wedge Z_G.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} \qquad \text{avec : } \overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{x_1}$$

D'où la résultante dynamique du tronc dans son mouvement par rapport à 0 :

$$\overrightarrow{R_D(1/0)} = m_1.\overrightarrow{a_{G_T\in 1/0}} = \boldsymbol{m_1.(\dot{v}.\overrightarrow{y_0} - Z_G.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - Z_G.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{z_1})}$$

Les actions extérieures s'appliquant sur le tronc sont :

☞ Le poids du tronc modélisé par le torseur : $\{\mathcal{T}_{pes\to 1}\} = {}_{G_T}\left\{\begin{matrix} -m_1.g.\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$

☞ L'action de la hanche sur le tronc de torseur : $\{\mathcal{T}_{han\to 1}\} = {}_{O_T}\left\{\begin{matrix} X_{h1} & 0 \\ Y_{h1} & M_{h1} \\ Z_{h1} & N_{h1} \end{matrix}\right\}_{B_0}$

☞ Le couple de redressement de torseur : $\{\mathcal{T}_{mot\to 1}\} = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ C_R.\overrightarrow{x_0} \end{matrix}\right\}$

Donc le théorème de la résultante dynamique appliquée au tronc en projection sur $\overrightarrow{y_0}$ donne :

$$\overrightarrow{R_D(1/0)}.\overrightarrow{y_0} = Y_{h1} \quad \Leftrightarrow \quad m_1.(\dot{v}.\overrightarrow{y_0} - Z_G.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - Z_G.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{z_1}).\overrightarrow{y_0} = Y_{h1}$$

Sachant que : : $\overrightarrow{y_1}.\overrightarrow{y_0} = \cos\alpha$ et : $\overrightarrow{z_1}.\overrightarrow{y_0} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha$. On obtient :

$$\mathbf{Y_{h1} = m_1.\dot{v} - m_1.Z_G.\ddot{\alpha}.\cos\alpha + m_1.Z_G.\dot{\alpha}^2.\sin\alpha}$$

Question 7

D'après le théorème de Huygens on a : $J_{(O_T,x_1)}(1) = J_{(G_T,x_1)}(1) + m_1.\overrightarrow{O_TG_T}^2$

Or : $J_{(O_T,x_1)}(1) = A_1$ et : $\overrightarrow{O_TG_T} = Z_G.\overrightarrow{z_1}$ Donc : $A_1 = J_{(G_T,x_1)}(1) + m_1.Z_G^2$

Soit finalement : $\mathbf{J_{(G_T,x_1)}(1) = A_1 - m_1.Z_G^2}$

Question 8

Calculons l'énergie cinétique du tronc dans son mouvement par rapport à 0

G_T étant le centre d'inertie de : $E_C(1/0) = \frac{1}{2}.m_1.\overrightarrow{V_{G_T\in 1/0}}^2 + \frac{1}{2}.J_{(G_T,x_1)}(1).\dot{\alpha}^2$ Soit :

$$E_C(1/0) = \frac{1}{2}m_1.(v.\overrightarrow{y_0} - Z_G.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1})^2 + \frac{1}{2}.(A_1 - m_1.Z_G^2).\dot{\alpha}^2$$

$$E_C(1/0) = \frac{1}{2}.m_1.(v^2 + Z_G.\dot{\alpha}^2 - 2.v.Z_G.\dot{\alpha}.\cos\alpha) + \frac{1}{2}.(A_1 - m_1.Z_G^2).\dot{\alpha}^2$$

Soit après simplification : $\mathbf{E_C(1/0) = \frac{1}{2}.m_1.(v^2 - 2.v.Z_G.\dot{\alpha}.\cos\alpha) + A_1.\dot{\alpha}^2}$

Les puissances des actions extérieures (voir inventaire ci-dessus) s'appliquant sur ce tronc 1 sont :

☞ $P(pes\to 1/0) = {}_{G_T}\left\{\begin{matrix} -m_1.g.\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\} \otimes {}_{G_T}\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{G_T\in 1/0}} \end{matrix}\right\} = -m_1.g.\overrightarrow{z_0}.(v.\overrightarrow{y_0} - Z_G.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1})$

$P(pes\to 1/0) = m_1.g.Z_G.\dot{\alpha}.\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ $\quad$ $\mathbf{P(pes\to 1/0) = m_1.g.Z_G.\dot{\alpha}.\sin\alpha}$

☞ $P(han\to 1/0) = {}_{O_T}\left\{\begin{matrix} X_{h1} & 0 \\ Y_{h1} & M_{h1} \\ Z_{h1} & N_{h1} \end{matrix}\right\}_{B_0} \otimes {}_{O_T}\left\{\begin{matrix} \dot{\alpha} & 0 \\ 0 & v \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{B_0}$ $\quad$ $\mathbf{P(han\to 1/0) = Y_{h1}.v}$

☞ $P(mot\to 1/0) = {}_{G_T}\left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ C_R.\overrightarrow{x_0} \end{matrix}\right\} \otimes {}_{G_T}\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{G_T\in 1/0}} \end{matrix}\right\} = C_R.\overrightarrow{x_0}.\dot{\alpha}.\overrightarrow{x_0}$ $\quad$ $\mathbf{P(mot\to 1/0) = C_R.\dot{\alpha}}$

Le tronc 1 étant un solide, la somme des puissances des actions intérieures est nulle

D'où la somme des puissances des actions extérieures et intérieures appliquées à ce tronc dans son mouvement par rapport au sol 0 est :

$$\Sigma\, P(Ext\rightarrow 1/0) + \Sigma\, P(Int\rightarrow 1/0) = m_1.g.Z_G.\dot{\alpha}.\sin\alpha + Y_{h1}.v + C_R.\dot{\alpha}$$

De l'expression de Y_{h1} obtenue à la question 6 on obtient :

$$\mathbf{\Sigma\, P(Ext\rightarrow 1/0) + \Sigma\, P(Int\rightarrow 1/0) = C_R.\dot{\alpha} + m_1.(v.\dot{v} - Z_G.\ddot{\alpha}.v.\cos\alpha - Z_G.\dot{\alpha}^2.v.\sin\alpha + g.Z_G.\dot{\alpha}.\sin\alpha)}$$

L'application du théorème de l'énergie cinétique nous donne alors :

$$\frac{d\,E_C(1/0)}{dt} = \Sigma\, P(Ext\rightarrow 1/0) + \Sigma\, P(Int\rightarrow 1/0)$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}.\,m_1.(v^2 - 2.Z_G.\dot{\alpha}.v.\cos\alpha) + A_1.\dot{\alpha}^2\right)}{dt} = C_R.\dot{\alpha} + m_1.(v.\dot{v} - Z_G.\ddot{\alpha}.v.\cos\alpha - Z_G.\dot{\alpha}^2.v.\sin\alpha + g.Z_G.\dot{\alpha}.\sin\alpha)$$

$$m_1.(v.\dot{v} - Z_G.\ddot{\alpha}.v.\cos\alpha - Z_G.\dot{\alpha}.\dot{v}.\cos\alpha + Z_G.\dot{\alpha}^2.v.\sin\alpha) + A_1.\dot{\alpha}.\ddot{\alpha} =$$
$$C_R.\dot{\alpha} + m_1.(v.\dot{v} - Z_G.\ddot{\alpha}.v.\cos\alpha + Z_G.\dot{\alpha}^2.v.\sin\alpha + g.Z_G.\dot{\alpha}.\sin\alpha)$$

Soit après simplification : $\mathbf{A_1.\ddot{\alpha} = C_R + m_1.g.Z_G.\sin\alpha + m_1.Z_G.\dot{v}.\cos\alpha}$

Question 9

Remarque : Avec l'équation précédente linéarisée ($\cos\alpha \approx 1$ et $\sin\alpha \approx \alpha$) et sachant que l'on a : $C_R = \frac{C_m}{r} - \frac{J_m}{r^2}.\,\ddot{\alpha}$. On retrouve l'équation différentielle donnée dans l'énoncé :

$$J_{eq}\,.\ddot{\alpha}(t) = m_1.g.Z_G.\alpha(t) + m_1.Z_G.\dot{v}(t) + \frac{C_m(t)}{r}$$

$$\text{Avec } J_{eq} = A_1 + \frac{J_m}{r^2} \qquad \text{Et : } \dot{v}(t) = \gamma(t)$$

Les conditions d'Heaviside étant vérifiées cette équation dans le domaine de Laplace donne :

$$\mathbf{\alpha(p) = \frac{1}{J_{eq}.p^2}.\left[\, m_1.g.Z_G.\alpha(p) + m_1.Z_G.\Gamma(p) + \frac{1}{r}.C_m(p)\,\right]}$$

D'autre part les autres équations différentielles passées dans le domaine de Laplace donnent :

$I(p) = \frac{1}{R + L.p}\,(U_C(p) - E(p))$ et : $C_m(p) = k_c.I(p)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{C_m(p) = k_c\,.\,\frac{1}{R + L.p}\,(U_C(p) - E(p))}$

$\mathbf{E(p) = k_e.\Omega_m(p)}$ Et enfin : $r = \frac{\dot{\alpha}(t)}{\omega_m(t)}$ Donc : $\mathbf{\omega_m(p) = \frac{1}{r}.p.\alpha(p)}$

Or d'après le schéma bloc : $\mathbf{\alpha(p) = \frac{B_7}{p^2}\,.\,[\, B_2.\alpha(p) + B_1.\Gamma(p) + B_3.C_m(p)\,]}$

$\mathbf{C_m(p) = B_5.H_1(p).\,(U_C(p) - E(p))}$

Et enfin : $\mathbf{E(p) = B_6.\omega_m(p)}$ $\mathbf{\omega_m(p) = B_4.p.\alpha(p)}$

On en déduit : $\mathbf{B_1 = m_1.Z_G}$ $\mathbf{B_2 = m_1.g.Z_G}$ $\mathbf{B_3 = \frac{1}{r}}$ $\mathbf{B_4 = \frac{1}{r}}$

$\mathbf{B_5 = k_c}$ $\mathbf{B_6 = k_e}$ $\mathbf{B_7 = \frac{1}{J_{eq}}}$ $\mathbf{H_1(p) = \frac{1}{R + L.p}}$

Question 10

A partir du schéma bloc et en appliquant la formule de Black on obtient :

$$H_{dyn}(p) = \frac{\frac{B_3.B_7}{p^2}}{1 - \frac{B_2.B_7}{p^2}} \qquad \text{Soit :} \qquad \mathbf{H_{dyn}(p) = \frac{B_3.B_7}{-B_2.B_7 + p^2}}$$

Ou encore : $$H_{dyn}(p) = \frac{\frac{1}{r.J_{eq}}}{\frac{-m_1.g.Z_G}{J_{eq}} + p^2} \qquad \text{Soit :} \qquad \mathbf{H_{dyn}(p) = \frac{1}{-r.m_1.g.Z_G + r.J_{eq}.p^2}}$$

Question 11

A partir du schéma bloc et en appliquant la formule de Black on obtient :

$$F(p) = \frac{B_5.H_1(p).H_{dyn}(p)}{1 + B_4.B_5.B_6.H_1(p).H_{dyn}(p).p} = \frac{B_5 \cdot \frac{1}{R + L.p} \cdot \frac{B_3.B_7}{-B_2.B_7 + p^2}}{1 + B_4.B_5B_6 \cdot \frac{1}{R + L.p} \cdot \frac{B_3.B_7}{-B_2.B_7 + p^2} \cdot p}$$

Soit : $$\mathbf{F(p) = \frac{B_3.B_5.B_7}{-R.B_2.B_7 + (B_3.B_4.B_5.B_6.B_7 - L.B_2.B_7).p + R.p^2 + L.p^3}}$$

Ou encore : $$F(p) = \frac{\frac{k_c}{r.J_{eq}}}{-\frac{R.m_1.g.Z_G}{J_{eq}} + \left(\frac{k_c.k_e}{r^2.J_{eq}} - \frac{L.m_1.g.Z_G}{J_{eq}}\right).p + R.p^2 + L.p^3}$$

Soit sous forme canonique : $$\mathbf{F(p) = \frac{-\frac{k_c}{r.R.m_1.g.Z_G}}{1 + \frac{r^2.L.m_1.g.Z_G - k_c.k_e}{r^2.R.m_1.g.Z_G} \cdot p - \frac{J_{eq}}{m_1.g.Z_G} \cdot p^2 - \frac{L.J_{eq}}{R.m_1.g.Z_G} \cdot p^3}}$$

Il s'agit d'une fonction de transfert : **D'ordre 3** **de Classe 0** De gain statique $\mathbf{-\frac{k_c}{r.R.m_1.g.Z_G}}$

Question 12

Etant donné l'approximation on a : $$F(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1.p).(-1 + \tau_1.p)} \cdot \frac{1}{1 + \tau_2.p} = H_A(p) \cdot H_B(p)$$

Avec : $H_B(p) = \frac{1}{1 + \tau_2.p}$ et : $H_A(p) = \frac{-K}{1 - \tau_1^2.p^2}$ Soit : $H_A(j.\omega) = \frac{-K}{1 + \tau^2.\omega^2}$ $\Rightarrow$ (réel < 0)

Le gain de $H_A(p)$ est donc de : $G_{dBA}(\omega) = 20.\log K - 20.\log(1 + \tau_1^2.\omega^2)$

Deux asymptotes à la courbe de gain de pentes 0 dB/dec et – 40 dB/dec se coupant à $\frac{1}{\tau_1^2}$

Et sa phase de : $\varphi_A(\omega) = -180°$ Phase constante de – 180°

Quant à $H_B(p)$, il s'agit d'un premier ordre dont la phase est de – 45° à la pulsation $\frac{1}{\tau_2}$

A la pulsation de coupure $\frac{1}{\tau_2}$ La phase de F(p) est donc de $-180° - 45° = -225°$

Soit par lecture graphique : $\frac{1}{\tau_2} = 10^3$ Soit : $\mathbf{\tau_2 = 10^{-3}}$ **s**.

D'autre part les asymptotes à la courbe de pentes 0 dB/dec et – 40 dB/dec se coupent à la pulsation de coupure de 1 rad/s égale à $\frac{1}{\tau_1^2}$. Donc : $\mathbf{\tau_1 = 1}$ **s**

Enfin l'asymptote de pente 0 dB/dec a pour ordonnée – 37 dB.

Donc le gain statique – K est tel que 20.log K = – 37 dB Soit : $\mathbf{K = 10^{-\frac{37}{20}} = 1{,}4.10^{-2}\ rad.V^{-1}}$

Question 13

On a $\tau_2 << \tau_1$ donc pour des pulsations petites devant $\frac{1}{\tau_2}$ la fonction $H_B(p) = \frac{1}{1 + \tau_2.p}$ est négligeable (Gain dynamique égal à 0 dB et phase égale à 0°). Or la bande passante visée pour la FTBO est bien petite devant $\frac{1}{\tau_2}$: $\omega_{BP} = 50\ rad.s^{-1} << 10^3\ rad.s^{-1} = \frac{1}{\tau_2}$.

On peut donc faire l'approximation : $\mathbf{F(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1.p).(-1 + \tau_1.p)}}$

Question 14

Les pôles de cette FTBO sont : $-\frac{1}{\tau_1}$ et $\frac{1}{\tau_1}$. **Deux pôles réels dont un est positif. La FTBO est donc instable et par conséquent la FTBF est également instable.**

Question 15

a) Notons $H_{BONC}(p)$ cette FTBO non corrigée. On a alors : $H_{BONC}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p).H_{ci}(p)}$

$$H_{BONC}(p) = \frac{\frac{K}{(1 + \tau_1.p).(-1 + \tau_1.p)}}{1 + \frac{K.K_1.(1 + T.p)}{(1 + \tau_1.p).(-1 + \tau_1.p)}} \quad \Rightarrow \quad H_{BONC}(p) = \frac{K}{K.K_1 - 1 + K.K_1.T.p + \tau_1^2.p^2}$$

b) Le premier coefficient : τ_1^2 est positif tout comme le second : $K.K_1.T$. Donc pour que cette nouvelle FTBO soit stable il faut que le troisième $K.K_1 - 1$ soit également positif.

Soit : $K.K_1 - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{K_1 > \frac{1}{K}}$ A.N. $\mathbf{K_1 > 71\ V.rad^{-1}}$

Question 16

La FTBO sous sa forme canonique s'écrit : $H_{BONC}(p) = \dfrac{\frac{K}{K.K_1 - 1}}{1 + \frac{K.K_1.T}{K.K_1 - 1}.p + \frac{\tau_1^2}{K.K_1 - 1}.p^2}$

D'où La pulsation propre et le facteur d'amortissement de cette FTBO :

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{K.K_1 - 1}}{\tau_1} \qquad \text{Et :} \qquad \xi = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{K.K_1 - 1}}{\tau_1}.\frac{K.K_1.T}{K.K_1 - 1} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{K.K_1.T}{2.\tau_1.\sqrt{K.K_1 - 1}}$$

Par conséquent : $\xi = 1{,}7 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{K.K_1.T}{2.\tau_1.\sqrt{K.K_1 - 1}} = 1{,}7 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3{,}4.\tau_1}{K.T} = \frac{K_1}{\sqrt{K.K_1 - 1}}$

Sachant que $T = \tau_1 = 1$ s et $K = 0{,}014\ rad.V^{-1}$ $\quad \xi = 1{,}7 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{K_1}{\sqrt{K.K_1 - 1}} = 243$

$\xi = 1{,}7 \quad \Leftrightarrow \quad K_1^2 - 243^2 \times 0{,}014.K_1 + 59\,049 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ $\mathbf{K_1 = 79\ V.rad^{-1}}$ ou $\mathbf{K_1 = 745\ V.rad^{-1}}$

Ces deux valeurs sont compatibles avec la stabilité de la FTBO car $K_1 > 71\ V.rad^{-1}$.

Pour ces deux valeurs de K_1 on alors les valeurs numériques de la FTBO :

	$K_1 = 79\ V.rad^{-1}$	$K_1 = 745\ V.rad^{-1}$

$\omega_0 = \dfrac{\sqrt{K.K_1 - 1}}{\tau_1}$	**0,33 rad.s^{-}**	**3,1 rad.s^{-1}**
$K_{BO} = \dfrac{K}{K.K_1 - 1}$	**0,132 rad.V^{-1}**	**1,5.10^{-3} rad.V^{-1}**

Question 17

Il s'agit d'un correcteur à avance de phase. Aussi appelé proportionnel dérivé filtré.

Question 18

La phase de la FTBO non corrigée pour une pulsation $\omega > \omega_0$ est de :

$\varphi_{BONC}(\omega) = -180° - \arctan\left(\dfrac{2.\xi.\omega.\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$ Soit pour : $\omega = \omega_{BP} = 50$ rad.s^{-1} $\varphi_{BONC}(\omega) = -168{,}4°$

Donc pour une marge de phase de $M_\varphi = 50°$, il faut que la phase du correcteur à la pulsation $\omega_{BP} = 50$ rad.s^{-1} soit telle que : $50° = 180° - 168{,}4° + \varphi_{Cor}(\omega_{BP})$ $\Rightarrow$ $\varphi_{Cor}(\omega_{BP}) = 38{,}4° = \varphi_m$

On en déduit donc : $\mathbf{a = \dfrac{1 + \sin 38{,}4}{1 - \sin 38{,}4} = 4{,}3}$ et : $\mathbf{T = \dfrac{1}{\omega_{BP}.\sqrt{a}} = \dfrac{1}{50.\sqrt{4{,}3}} = 9{,}6.10^{-3}\ s}$

Question 19

Le gain dynamique de la FTBO non corrigé à ω_{BP} est de :

$$G_{dBBONC}(\omega_{BP}) = 20.\log K_{BO} - 10.\log\left(\left(1 - \frac{\omega_{BP}^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4.\xi^2.\frac{\omega_{BP}^2}{\omega_0^2}\right) = -108{,}3 \text{ dB}$$

Donc pour vérifier le critère de bande passante il faut : $20.\log K_P + 10.\log a = +108{,}3$

Soit : $\mathbf{K_P = 10^{\frac{108{,}3 - 10.\log a}{20}}}$ $\mathbf{K = 10^{\frac{108{,}3 - 10.\log 4{,}3}{20}} = 1{,}25.10^5\ V.rad^{-1}}$

Question 20

Sur la première phase on a une accélération (La perturbation est donc non nulle) qui crée une erreur de 2,4.10^{-3} deg. Ensuite, à vitesse constante (perturbation nulle) l'erreur diminue fortement pour devenir nulle. On voit sur cette réponse temporelle que :

☞ Quelque soit la perturbation **l'erreur est au maximum de 2,8.10^{-3} deg** donc très inférieure à 0,5 °.

Le critère de précision est donc vérifié

☞ **Le dépassement maximal de la valeur finale est d'environ 0,4.10^{-3} deg** donc très inférieure à 1°.

Le critère de dépassement est donc vérifié.

☞ **Le temps de réponse à 5% est d'environ 35 ms** donc très inférieur à 0,2 s.

Le critère de temps de réponse est donc vérifié.

Par dimensionnement le correcteur vérifie les critères de bande passante et de marge de phase.

Donc ce correcteur permet bien de vérifier l'ensemble des critères du cahier des charges

Partie 2 : Alterner les phases d'appui sur les deux pied (marche du robot)

Question 21

A la vitesse de 5 km.h^{-1} = 1,39 m.s^{-1} pour une foulée de 1,5 m, la durée d'un cycle de marche est de : $\dfrac{1{,}5}{1{,}39} = 1{,}08$ s. **Cela est cohérent avec le cahier des charges qui stipule que la période d'un cycle de marche ne peut pas être inférieure à 1 s.**

Question 22

Pour avoir uniquement un mouvement de tangage du pied, il faut déplacer les points B et B' par rapport au tibia à la même vitesse et dans le même sens.

Pour avoir uniquement un mouvement de roulis du pied, il faut déplacer les points B et B' par rapport au tibia à la même vitesse et en sens opposés.

Donc pour obtenir un mouvement du pied uniquement : ☞ **En tangage il faut : $\omega^z_{50} = \omega^z_{5'0}$**

☞ **En roulis il faut : $\omega^z_{50} = -\,\omega^z_{5'0}$**

Question 25

a) La fermeture géométrique du cycle s'écrit : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EO} = \vec{0}$

Soit : $-\,h.\overrightarrow{z_0} - r.\overrightarrow{y_1} + \ell.\overrightarrow{z_4} + d'.\overrightarrow{y_0} + \lambda.\overrightarrow{z_0} = \vec{0}$

Avec : $\overrightarrow{y_1} = \cos\alpha\,.\,\overrightarrow{y_0} + \sin\alpha\,.\,\overrightarrow{z_0}$ et : $\overrightarrow{z_4} = -\sin\beta\,.\,\overrightarrow{y_0} + \cos\beta\,.\,\overrightarrow{z_0}$

On obtient donc : ☞ En projection sur $\overrightarrow{y_0}$: $\ell.\sin\beta = d' - r.\cos\alpha$ (a)

☞ En projection sur $\overrightarrow{z_0}$: $\ell.\cos\beta = (h-\lambda) + r.\sin\alpha$ (b)

La combinaison de ces deux équations ($(a)^2 + (b)^2$) donnne alors l'équation :

$$\ell^2 = (h-\lambda)^2 + d'^2 + r^2 + 2.r.\sin\alpha\,.\,(h-\lambda) - 2.r.d'.\cos\alpha$$

Equation de la forme : $\boldsymbol{x^2 + b.x + c = 0}$ Avec : $\boldsymbol{x = h - \lambda}$

$\boldsymbol{b = 2.r.\sin\alpha}$

$\boldsymbol{c = d'^2 + r^2 - \ell^2 - 2.r.d'.\cos\alpha}$

b) On a $-45° < \alpha < 62°$

Déterminons la valeur de x pour les deux valeurs extrêmales de α.

Pour $\alpha = -45°$ $b = -124{,}5$ mm et : $c = -111\,200$ mm^2

D'où l'équation : $x^2 - 124{,}5.x - 111\,200 = 0 \Leftrightarrow x = 401{,}5$ mm ou $x = -276{,}9$ mm

On ne retient bien sur que la solution : $x = 401{,}5$ mm

Pour $\alpha = 62°$ $b = 155{,}4$ mm et : $c = -109\,600$ mm^2

D'où l'équation : $x^2 - 155{,}4.x - 109\,600 = 0 \Leftrightarrow x = 262{,}4$ mm ou $x = -417{,}8$ mm

On ne retient bien sur que la solution : $x = 262{,}4$ mm

On en déduit la course du chariot nécessaire au débattement angulaire :

$$\boldsymbol{\Delta C = 401{,}5 - 262.4 = 139{,}1\ \text{mm}}$$

Question 26

Poulie motrice et poulie réceptrice ayant le même diamètre nominal, la roue en entrée de l'engrenage conique tourne à la même vitesse que l'arbre de sortie du moto réducteur.

De même les deux roues de l'engrenage conique ayant le même nombre dents, la vis tourne à la même vitesse que la roue en entrée de l'engrenage conique et donc à la mêm vitesse que l'arbre de sortie du moto réducteur.

La vitesse de rotation de la vis 5 est donc de : $\dfrac{2\,200 \times 2.\pi}{60} = 230{,}4$ rad.s^{-1}

La vitesse nominale du chariot est alors de : $\dfrac{230{,}4.P_V}{2.\pi} = 36{,}67.P_V$

Or pour que le pied puisse parcourir le débattement angulaire imposé par le cahier des charges en moins de 0,8 s il faut une vitesse de $\dfrac{\Delta C}{0{,}8} = 174$ mm.s^{-1}

On doit donc avoir : $36{,}67.P_V \geq 174$ Soit : $\boldsymbol{P_V \geq 4{,}75\ \text{mm}}$