Démonstrations de cinétique

1- Notations pour les démonstrations

Soit un repère R ce repère est le repère dans lequel on applique le Principe Fondamental de la Dynamique ou le Théorème de l'Energie Cinétique. Il s'agit donc d'un repère galiléen.

Soit un solide S
- ☞ de masse M
- ☞ de centre de gravité G
- ☞ auquel on associe un repère R_S
- ☞ Ce solide est constitué de masses élémentaire dm aux points P. On a donc :

$$M = \iiint_S dm \qquad \iiint_S \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$$

Soit un point A fixe dans le solide S.

Soit un point O fixe dans le solide S et dans le repère R

On note $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ la résultante cinématique (Vecteur rotation) du mouvement de S dans le repère R.

On note les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{GP}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ dans le repère R_S liée à au solide S :

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x_{AP} \\ y_{AP} \\ z_{AP} \end{pmatrix}_{R_S} \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_{OP} \\ y_{OP} \\ z_{OP} \end{pmatrix}_{R_S} \qquad \overrightarrow{GP} = \begin{pmatrix} x_{GP} \\ y_{GP} \\ z_{GP} \end{pmatrix}_{R_S} \qquad \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S}$$

2- Résultante cinétique

Par définition la résultante cinétique est le vecteur : $\overrightarrow{R_C(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm$

Selon la relation de Varignon : $\overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}$

Donc : $\overrightarrow{R_C(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{V_{G\in S/R}}.dm + \iiint_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}.dm$

Or $\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ sont liés au mouvement du solide S par rapport au repère R et donc sont indépendant du point P suivant lequel se fait l'intégration sur le solide S.

Donc : $\overrightarrow{R_C(S/R)} = \overrightarrow{V_{G\in S/R}}.\iiint_S dm + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \left[\iiint_S \overrightarrow{GP}.dm \right]$

Or : $M = \iiint_S dm$ et $\iiint_S \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$

On en déduit : $\mathbf{\overrightarrow{R_C(S/R)} = M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}$

3- Moment cinétique

Par définition le moment cinétique au point A est le vecteur : $\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm$

Selon les relations de Varignon : $\overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}$ et Chasles : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP}$

Donc : $\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}.dm + \iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}.dm + \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}.dm$

Or $\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont liés solide S ou a son mouvement du par rapport au repère R et donc sont indépendant du point P suivant lequel se fait l'intégration sur le solide S.

Donc : $\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \left[\iiint_S dm \right].\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \left[\iiint_S \overrightarrow{GP}.dm \right] \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}.dm$

Or : $M = \iiint_S dm$ et $\iiint_S \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$

On en déduit : $\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = M.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}.dm$

D'autre part : $\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\wedge\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x_{AP} \\ y_{AP} \\ z_{AP} \end{pmatrix}_{R_S} \wedge \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S} \wedge \begin{pmatrix} x_{AP} \\ y_{AP} \\ z_{AP} \end{pmatrix}_{R_S} = \begin{pmatrix} x_{AP} \\ y_{AP} \\ z_{AP} \end{pmatrix}_{R_S} \wedge \begin{pmatrix} \omega_2.z_{AP} - \omega_3.y_{AP} \\ \omega_3.x_{AP} - \omega_1.z_{AP} \\ \omega_1.y_{AP} - \omega_2.x_{AP} \end{pmatrix}_{R_S}$

$$\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\wedge\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} \omega_1.(y_{AP}^2+z_{AP}^2) - \omega_2.x_{AP}.y_{AP} - \omega_3.x_{AP}.z_{AP} \\ -\omega_1.x_{AP}.y_{AP} + \omega_2.(x_{AP}^2+z_{AP}^2) - \omega_3.y_{AP}.z_{AP} \\ -\omega_1.x_{AP}.z_{AP} - \omega_2.y_{AP}.z_{AP} + \omega_3.(x_{AP}^2+y_{AP}^2) \end{pmatrix}_{R_S}$$

Donc : $\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\wedge\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} y_{AP}^2 + z_{AP}^2 & -x_{AP}.y_{AP} & -x_{AP}.z_{AP} \\ -x_{AP}.y_{AP} & x_{AP}^2 + z_{AP}^2 & -y_{AP}.z_{AP} \\ -x_{AP}.z_{AP} & -y_{AP}.z_{AP} & x_{AP}^2 + y_{AP}^2 \end{pmatrix}_{R_S} . \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S}$

d'où : $\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = M.\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \iiint_S \begin{pmatrix} y_{AP}^2 + z_{AP}^2 & -x_{AP}.y_{AP} & -x_{AP}.z_{AP} \\ -x_{AP}.y_{AP} & x_{AP}^2 + z_{AP}^2 & -y_{AP}.z_{AP} \\ -x_{AP}.z_{AP} & -y_{AP}.z_{AP} & x_{AP}^2 + y_{AP}^2 \end{pmatrix}_{R_S} . \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S} .dm$

Or $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ est lié au mouvement du solide S par rapport au repère R et donc est indépendant du point P suivant lequel se fait l'intégration sur le solide S.

Donc : $\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = M.\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \left[\iiint_S \begin{pmatrix} y_{AP}^2 + z_{AP}^2 & -x_{AP}.y_{AP} & -x_{AP}.z_{AP} \\ -x_{AP}.y_{AP} & x_{AP}^2 + z_{AP}^2 & -y_{AP}.z_{AP} \\ -x_{AP}.z_{AP} & -y_{AP}.z_{AP} & x_{AP}^2 + y_{AP}^2 \end{pmatrix}_{R_S} .dm \right] . \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S}$

En posant : $\overline{\overline{J_A(S)}} = \begin{pmatrix} \iiint_S (y_{AP}^2 + z_{AP}^2).dm & \iiint_S -x_{AP}.y_{AP}.dm & \iiint_S -x_{AP}.z_{AP}.dm \\ \iiint_S -x_{AP}.y_{AP}.dm & \iiint_S (x_{AP}^2 + z_{AP}^2).dm & \iiint_S -y_{AP}.z_{AP}.dm \\ \iiint_S -x_{AP}.z_{AP}.dm & \iiint_S -y_{AP}.z_{AP}.dm & \iiint_S (x_{AP}^2 + y_{AP}^2).dm \end{pmatrix}_{R_S}$

On obtient : $\mathbf{\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = M.\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overline{\overline{J_A(S)}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$

<u>Calcul au centre de gravité G ou en un point fixe O dans R</u>

Dans le cas où on prend pour le point A, le point G centre de gravité ou O point fixe dans R, on a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \overrightarrow{V_{O\in S/R}} = \vec{0}$. On obtient donc :

$$\mathbf{\overrightarrow{\sigma_G(S/R)} = \overline{\overline{J_G(S)}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}} \qquad \text{et:} \qquad \mathbf{\overrightarrow{\sigma_O(S/R)} = \overline{\overline{J_O(S)}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$$

4- Théorème de Huygens généralisé

Quelque soit le vecteur $\vec{U}$ et le point A, on peut définir une rotation d'axe $(A, \vec{U})$ et de vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \vec{U}$ du solide S par rapport au repère R.

On a alors : $\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \vec{0}$ et donc : $\mathbf{\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \overline{\overline{J_A(S)}}.\vec{U}}$

D'autre part de la relation de Varignon sur le torseur cinétique : $\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \overrightarrow{\sigma_G(S/R)} + \overrightarrow{AG}\wedge M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}}$

On obtient donc : $\overline{\overline{J_A(S)}}.\vec{U} = \overline{\overline{J_G(S)}}.\vec{U} + M.\overrightarrow{AG}\wedge.\overrightarrow{V_{G\in S/R}}$

Or pour cette rotation d'axe $(A, \vec{U})$ et de vecteur $\vec{U}$: $\overrightarrow{V_{G\in S/R}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \vec{U}\wedge\overrightarrow{AG}$

avec : $\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \vec{0}$

On a donc la relation de Huygens généralisées applicable quelque soit le vecteur $\vec{U}$:

$$\mathbf{\overline{\overline{J_A(S)}}.\vec{U} = \overline{\overline{J_G(S)}}.\vec{U} + M.\overrightarrow{AG}\wedge\vec{U}\wedge\overrightarrow{AG}}$$

On note les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans le repère R_S : $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S}$. Avec : $\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S}$

On a alors : $$M.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AG} = M.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S} \wedge \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S} = M.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S} \wedge \begin{pmatrix} c.\omega_2 - b.\omega_3 \\ a.\omega_3 - c.\omega_1 \\ b.\omega_1 - a.\omega_2 \end{pmatrix}_{R_S}$$

ou : $$M.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AG} = M.\begin{pmatrix} (b^2 + c^2).\omega_1 - a.b.\omega_2 - a.c.\omega_3 \\ - a.b.\omega_1 + (a^2 + c^2).\omega_2 - b.c.\omega_3 \\ - a.c.\omega_1 - b.c.\omega_2 + (a^2 + b^2).\omega_3 \end{pmatrix}_{R_S}$$

ou encore : $$M.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AG} = M.\begin{pmatrix} b^2 + c^2 & - a.b & - a.c \\ - a.b & a^2 + c^2 & - b.c \\ - a.c & - b.c & a^2 + b^2 \end{pmatrix}_{R_S} . \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{R_S}$$

On obtient donc : $$\overline{\overline{J_A(S)}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \overline{\overline{J_G(S)}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}} + M.\begin{pmatrix} b^2 + c^2 & - a.b & - a.c \\ - a.b & a^2 + c^2 & - b.c \\ - a.c & - b.c & a^2 + b^2 \end{pmatrix}_{R_S} .\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Cette relation étant vérifiées quelque soit le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ on en déduit :

$$\mathbf{\overline{\overline{J_A(S)}}_{R_S} = \overline{\overline{J_G(S)}}_{R_S} + M.\begin{pmatrix} b^2 + c^2 & - a.b & - a.c \\ - a.b & a^2 + c^2 & - b.c \\ - a.c & - b.c & a^2 + b^2 \end{pmatrix}_{R_S}} \qquad \textbf{où :} \quad \mathbf{\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S}}$$

5- Energie cinétique

Calcul par le comoment des torseurs cinétique et cinématique

Calculons le comoment du torseur cinétique et cinématique d'un solide S par rapport à un repère R.

Quelque soit le point A appartenant au solide S on a :

$$\{\mathcal{C}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm \\ \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm \end{matrix}\right\} \otimes {}_A\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{matrix}\right\}$$

$$\{\mathcal{C}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm\ .\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm.$$

$$\{\mathcal{C}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.(\overrightarrow{V_{P\in S/R}} + \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}).dm + \iiint_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm$$

$$\{\mathcal{C}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}^2.dm + \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.dm + \iiint_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm$$

$$\{\mathcal{C}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}^2.dm + \iiint_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{V_{P\in S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}.dm - \iiint_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overrightarrow{V_{P\in S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}.dm$$

$$\{\mathcal{C}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\} = \iiint_S \overrightarrow{V_{P\in S/R}}^2.dm$$

or l'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport au repère R est le réel :

$$E_C(S/R) = \iiint_S \frac{1}{2}.\overrightarrow{V_{P\in S/R}}^2.dm$$

Donc l'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport au repère R est le demi comoment des torseurs cinétique et cinématique de ce solide S dans son mouvement par rapport à R :

$$\mathbf{E_C(S/R) = \frac{1}{2}.\{\mathcal{C}(S/R)\} \otimes \{\mathcal{V}(S/R)\}}$$

On en déduit : $E_C(S/R) = \frac{1}{2}.M.\overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 + M.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}} + \frac{1}{2}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overline{\overline{J_A(S)}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

Calcul par le centre de gravité G

Au centre de gravité G les torseurs cinétique et cinématique du solide S dans son mouvement par rapport au repère R, ont pour expression : $\{\mathcal{C}(S/R)\} = {}_G\left\{\begin{matrix} M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ \overline{\overline{J_G(S)}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \end{matrix}\right\}$ et : $\{\mathcal{V}(S/R)\} = {}_G\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{G\in S/R}} \end{matrix}\right\}$

D'où l'expression de l'énergie cinétique : $\mathbf{E_C(S/R) = \frac{1}{2}.M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}}^2 + \frac{1}{2}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overline{\overline{J_G(S)}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$

Calcul par un point fixe O dans R

En un point O fixe danss R les torseurs cinétique et cinématique du solide S dans son mouvement par rapport au repère R, ont pour expression : $\{\mathcal{C}(S/R)\} = {}_O\left\{\begin{matrix} M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ \overline{\overline{J_O(S)}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \end{matrix}\right\}$ et : $\{\mathcal{V}(S/R)\} = {}_O\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$

D'où l'expression de l'énergie cinétique : $\mathbf{E_C(S/R) = \frac{1}{2}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\overline{\overline{J_O(S)}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$

6- Résultante dynamique

Par définition la résultante dynamique est le vecteur : $\overrightarrow{R_D(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{a_{P\in S/R}}.dm$

Selon la relation de Varignon : $\overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}$

Sachant que : $\overrightarrow{a_{P\in S/R}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{P\in S/R}}}{dt}\right)_R$ et : $\overrightarrow{a_{G\in S/R}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}{dt}\right)_R$ on a :

$$\overrightarrow{a_{P\in S/R}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{P\in S/R}}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\,(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP})}{dt}\right)_R$$

$$\overrightarrow{a_{P\in S/R}} = \overrightarrow{a_{G\in S/R}} + \left(\frac{d\,\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R$$

Or d'après la relation de Bour : $\left(\frac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_{R_S} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}$

Or les point P et G sont fixes dans R_S donc $\left(\frac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_{R_S} = \vec{0}$ donc : $\left(\frac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

Donc : $\overrightarrow{a_{P\in S/R}} = \overrightarrow{a_{G\in S/R}} + \left(\frac{d\,\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

Soit : $\overrightarrow{R_D(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{a_{G\in S/R}}.dm + \iiint_S \left(\frac{d\,\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{GP}.dm + \iiint_S \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.dm$

Or $\overrightarrow{a_{G\in S/R}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ sont liés au mouvement du solide S par rapport au repère R et donc sont indépendant du point P suivant lequel se fait l'intégration sur le solide S.

D'où : $\overrightarrow{R_D(S/R)} = \overrightarrow{a_{G\in S/R}}.\left[\iiint_S dm\right] + \left(\frac{d\,\overrightarrow{\Omega_{S/R}}}{dt}\right)_R \wedge \left[\iiint_S \overrightarrow{GP}.dm\right] + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \left[\iiint_S \overrightarrow{GP}.dm\right] \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

Sachant que définition de la masse et du centre de gravité d'un solide S :

$$M = \iiint_S dm \qquad \text{et :} \qquad \iiint_S \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$$

On en déduit : $\mathbf{\overrightarrow{R_D(S/R)} = M.\overrightarrow{a_{G\in S/R}}}$

7- Moment dynamique

Calcul au centre de gravité G

Par définition le moment dynamique en G est le vecteur : $\overrightarrow{\delta_G(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{a_{P\in S/R}}\,.dm$

Selon la relation de Varignon : $\overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{G\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}$

Sachant que : $\overrightarrow{a_{P\in S/R}} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{V_{P\in S/R}}}{dt}\right)_R$ et : $\overrightarrow{a_{G\in S/R}} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}{dt}\right)_R$

on a : $\overrightarrow{a_{P\in S/R}} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{V_{P\in S/R}}}{dt}\right)_R + \left(\dfrac{d\,(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP})}{dt}\right)_R = \overrightarrow{a_{G\in S/R}} + \left(\dfrac{d\,(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP})}{dt}\right)_R$

soit : $\overrightarrow{\delta_G(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{a_{G\in S/R}}.dm + \iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \left(\dfrac{d\,(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP})}{dt}\right)_R .dm$

Or $\overrightarrow{a_{G\in S/R}}$ est lié au mouvement du solide S par rapport au repère R et donc sont indépendant du point P suivant lequel se fait l'intégration sur le solide S.

donc : $\iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{a_{G\in S/R}}.dm = \left[\int_S \overrightarrow{GP}.dm\right] \wedge \overrightarrow{a_{G\in S/R}}$ avec : $\iiint_S \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$

On en déduit : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_G(S/R)} = \iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \left(\dfrac{d\,(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP})}{dt}\right)_R .dm}$ **(a)**

D'après la relation de Bour : $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_{R_S} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}$

Or les point P et G sont fixes dans R_S donc $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_{R_S} = \vec{0}$ donc : $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

Donc : $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R \wedge \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \vec{0}$ soit: $\boldsymbol{\iiint_S \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R \wedge (\overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}).dm = \vec{0}}$ **(b)**

Des équations (a) et (b) on en déduit :

$$\overrightarrow{\delta_G(S/R)} = \iiint_S \left[\overrightarrow{GP} \wedge \left(\dfrac{d\,(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP})}{dt}\right)_R + \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R \wedge (\overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}})\right].dm$$

$$\overrightarrow{\delta_G(S/R)} = \iiint_S \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}}{dt}\right)_R.dm = \left(\dfrac{d\iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}.dm}{dt}\right)_R$$

Or en page 2 on a montré que $\iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{GP}\,.dm = \overrightarrow{\sigma_G(S/R)}$

On en déduit donc : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_G(S/R)} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R)}}{dt}\right)_R}$

Calcul en un point A quelconque du solide S

D'après la relation de Varignon appliquée au torseur dynamique :

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \overrightarrow{\delta_G(S/R)} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_D(S/R)}$$

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \overrightarrow{\delta_G(S/R)} + \overrightarrow{AG} \wedge M.\,\overrightarrow{a_{G\in S/R}}$$

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R)}}{dt}\right)_R + \overrightarrow{AG} \wedge M.\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}{dt}\right)_R$$

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R)}}{dt}\right)_R + \overrightarrow{AG} \wedge M.\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}{dt}\right)_R + \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R \wedge M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} + M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R$$

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R)}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG} \wedge M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}{dt}\right)_R + M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R$$

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R)}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_C(S/R)}}{dt}\right)_R + M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R$$

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R)}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_C(S/R)}}{dt}\right)_R + M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R$$

$$\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\frac{d\left[\,\overrightarrow{\sigma_G(S/R)} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_C(S/R)}\,\right]}{dt}\right)_R + M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R$$

Or d'après la relation de Varignon appliquée au torseur cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \overrightarrow{\sigma_G(S/R)} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_C(S/R)}$$

Donc : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}}{dt}\right)_R + M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R}$ **(a)**

En prenant un point O fixe dans R on écrit, d'après la relation de Chasles :

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\,\overrightarrow{AO}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_R = -\left(\frac{d\,\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_R$$

Or le point O étant fixe dans R et le G fixe sur S :

$\left(\frac{d\,\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{V_{A/R}}$ et : $\left(\frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{V_{G\in S/R}}$

Donc : $M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R = -\,M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \overrightarrow{V_{A/R}} + M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}}$ (a)

Soit : $\boldsymbol{M.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \wedge \left(\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right)_R = M.\,\overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}}}$ **(b)**

Des équations (a) et (b) on en déduit : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}}{dt}\right)_R + M.\,\overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}}}$

<u>Calcul en un point O fixe dans R et dans S</u>

Si on applique au point O la relation précédente :

$$\overrightarrow{\delta_O(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O(S/R)}}{dt}\right)_R + M.\,\overrightarrow{V_{O/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}}$$

Or le point O est également fixe dans R. Donc : $\overrightarrow{V_{O/R}} = \vec{0}$

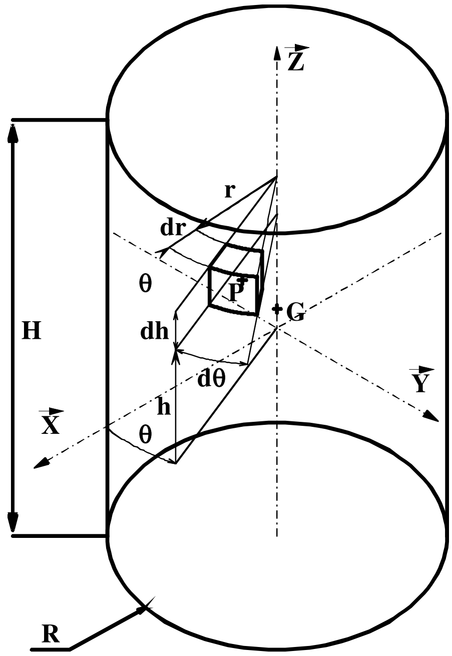
On en déduit donc : $\boldsymbol{\overrightarrow{\delta_O(S/R)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O(S/R)}}{dt}\right)_R}$

8- Opérateur d'inertie d'un cylindre de révolution

Soit un cylindre homogène de révolution dont la masse volumique est ρ. Ce cylindre a un rayon R et une hauteur H. l'axe de révolution de ce cylindre est $(G, \overrightarrow{Z})$ où G est le centre de gravité.

Ce cylindre étant de révolution d'axe $(G, \overrightarrow{Z})$ son opérateur d'inertie en G dans le repère du solide $R_S = (\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$ est :

$$\overline{\overline{I_G(S)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_S}$$



On décompose ce cylindre en une infinité de volumes élémentaires dv de centre P tel que $\overrightarrow{GP} = \begin{pmatrix} x_{GP} \\ y_{GP} \\ z_{GP} \end{pmatrix}_{R_S}$. On a alors :

$$A = \iiint_S (y_{GP}^2 + z_{GP}^2).dm \quad \text{et :} \quad C = \iiint_S (x_{GP}^2 + y_{GP}^2).dm$$

On décompose ce cylindre en une infinité de volumes élémentaires dv de centre P, hauteur dh, dans un secteur angulaire $d\theta$ et de largeur dr.

la masse dm de ce volume élémentaire est alors : $dm = \rho.r.d\theta.dr.dh$

Et on a : $x_{GP} = r.\cos\theta$ $y_{GP} = r.\sin\theta$ $z_{GP} = h$

On a donc les moments d'inertie de ce cylindre :

$$A = \int_0^R \int_0^{2.\pi} \int_{-H/2}^{+H/2} (r^2.\sin^2\theta + h^2).\rho.r.d\theta.dr.dh$$

$$A = \rho.\int_0^R \int_0^{2.\pi} \int_{-H/2}^{+H/2} (r^3.\sin^2\theta + h^2.r).dh.d\theta.dr$$

$$A = \rho.\int_0^R \int_0^{2.\pi} \left[r^3.\sin^2\theta.h + \frac{h^3}{3}.r \right]_{-H/2}^{+-H/2}.d\theta.dr$$

$$A = \rho.\int_0^R \int_0^{2.\pi} \left(r^3.\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2.\theta}{2}\right).H + \frac{r.H^3}{12} \right).d\theta.dr$$

$$A = \frac{\rho.H}{12}.\int_0^R \int_0^{2.\pi} \left(12.r^3.\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2.\theta}{2}\right) + r.H^2 \right).d\theta.dr$$

$$A = \frac{\rho.H}{12}.\int_0^R \left[12.r^3.\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2.\theta}{4}\right) + r.H^2.\theta \right]_0^{2.\pi}.dr$$

$$A = \frac{\rho.\pi.H}{12}.\int_0^R (12.r^3 + 2.r.H^2).dr$$

$$A = \frac{\rho.\pi.H}{12}.[3.r^4 + r^2.H^2]_0^R$$

$$A = \frac{\rho.\pi.R^2.H}{12}.(3.R^2 + H^2)$$

$$C = \int_0^R \int_0^{2.\pi} \int_{-H/2}^{+H/2} (r^2.\cos^2\theta + r^2.\sin^2\theta).\rho.r.d\theta.dr.dh$$

$$C = \rho.\int_0^R \int_0^{2.\pi} \int_{-H/2}^{+H/2} r^3.dh.d\theta.dr$$

$$C = \rho.\int_0^R \int_0^{2.\pi} [h.r^3]_{+H/2}^{-H/2}.d\theta.dr$$

$$C = \rho.H.\int_0^R [\theta.r^3]_0^{2.\pi}.dr$$

$$C = \rho.2.\pi.H.\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$C = \rho.\pi.H.\frac{R^4}{2}$$

Sachant que la masse d'un cylindre de révolution de rayon R et hauteur H est : $M = \rho.\pi.R^2.H$, on obtient :

$$A = \frac{M.(3R^2 + H^2)}{12} \quad \text{et :} \quad C = \frac{M.R^2}{2}$$

Soit : $$\overline{\overline{\mathbf{I_G(S)}}} = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{12}}.\begin{pmatrix} \mathbf{3.R^2 + H^2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3.R^2 + H^2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{6.R^2} \end{pmatrix}_{\mathbf{R_S}}$$