Géométrie des masses : Opérateur d'inertie

1- Cas général

L'opérateur d'inertie est un objet mathématique modélisant la répartition des masses d'un solide autour d'un point dans les trois directions de l'espace. Il peut s'écrire de différentes manières suivant le point où on l'exprime et le repère dans lequel on l'exprime. Dans tout les cas il s'écrit sous la forme d'une matrice symétrique.

1.1- Opérateur d'inertie en un point quelconque A dans la base liée au solide R_S

Si on pose dans le repère R_S lié au solide S les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GP}$:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x_{AP} \\ y_{AP} \\ z_{AP} \end{pmatrix}_{R_S} \quad \text{Alors :} \quad \overline{\overline{J_A(S)}} = \begin{pmatrix} A_A & -F_A & -E_A \\ -F_A & B_A & -D_A \\ -E_A & -D_A & C_A \end{pmatrix}_{R_S} \quad \text{où :}$$

A, B et C sont respectivement les moments d'inertie de S par rapport aux axes $(A, \overrightarrow{X})$, $(A, \overrightarrow{Y})$, $(A, \overrightarrow{Z})$.

$$A_A = \iiint_S (y_{AP}^2 + z_{AP}^2).dm \qquad B_A = \iiint_S (x_{AP}^2 + z_{AP}^2).dm \qquad C_A = \iiint_S (x_{AP}^2 + y_{AP}^2).dm$$

Et D, E et F sont les produits d'inertie ou balourds perpendiculaires au point A

$$D_A = \iiint_S y_{AP}.z_{AP}.dm \qquad E_A = \iiint_S x_{AP}.z_{AP}.dm \qquad F_A = \iiint_S x_{AP}.y_{AP}.dm$$

1.2- Opérateur d'inertie au centre de gravité G dans la base liée au solide R_S

Si on pose dans le repère R_S lié au solide S les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GP}$:

$$\overrightarrow{GP} = \begin{pmatrix} x_{GP} \\ y_{GP} \\ z_{GP} \end{pmatrix}_{R_S} \quad \text{Alors :} \quad \overline{\overline{J_G(S)}} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{R_S} \quad \text{où :}$$

A, B et C sont respectivement les moments d'inertie de S par rapport aux axes $(G, \overrightarrow{X})$, $(G, \overrightarrow{Y})$, $(G, \overrightarrow{Z})$.

$$A_G = \iiint_S (y_{GP}^2 + z_{GP}^2).dm \qquad B_G = \iiint_S (x_{GP}^2 + z_{GP}^2).dm \qquad C_G = \iiint_S (x_{GP}^2 + y_{GP}^2).dm$$

Et D, E et F sont les produits d'inertie ou balourds perpendiculaires au point G

$$D_G = \iiint_S y_{GP}.z_{GP}.dm \qquad E_G = \iiint_S x_{GP}.z_{GP}.dm \qquad F_G = \iiint_S x_{GP}.y_{GP}.dm$$

2- Théorème de Huygens

2.1- Théorème de Huygens généralisé

Soit :
- ☞ Un solide S de masse M et de centre d'inertie G
- ☞ $\overline{\overline{J_G(S)}}$ L'opérateur d'inertie du solide S en G
- ☞ $\overline{\overline{J_A(S)}}$ L'opérateur d'inertie du solide S en A

Alors quelque soit le point A et le vecteur $\overrightarrow{U}$ on a :

$$\overline{\overline{J_A(S)}} \, . \, \overrightarrow{U} = \overline{\overline{J_G(S)}} \, . \, \overrightarrow{U} + M \, . \, \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{AG}$$

Voir démonstration §4

Si on pose : $\overline{\overline{J_G(S)}} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{R_S}$ $\overline{\overline{J_A(S)}} = \begin{pmatrix} A_A & -F_A & -E_A \\ -F_A & B_A & -D_A \\ -E_A & -D_A & C_A \end{pmatrix}_{R_S}$ et : $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S}$

On a alors : *Voir démonstration §4*

$$\overline{\overline{J_A(S)}} = \overline{\overline{J_G(S)}} + M.\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -a.b & -a.c \\ -a.b & a^2+c^2 & -b.c \\ -a.c & -b.c & a^2+b^2 \end{pmatrix}_{R_S} \quad \text{avec } \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S}$$

2.2- Remarque

Le théorème de Huygens ne s'applique que entre un point A quelconque et le centre d'inertie. Mais pas entre deux points quelconques :

$$\overline{\overline{J_A(S)}} \neq \overline{\overline{J_B(S)}} + M.\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -a.b & -a.c \\ -a.b & a^2+c^2 & -b.c \\ -a.c & -b.c & a^2+b^2 \end{pmatrix}_{R_S} \quad \text{avec } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S}$$

2.3- Cas du moment d'inertie

Soit un solide S de masse m de centre d'inertie G appartenant à l'axe Δ et de moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe Δ. On a d'autre part un axe Δ' parallèle à l'axe Δ et distant de celui-ci d'une distance d.

Alors J_Δ' le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe Δ' est : $J_\Delta' = J_\Delta + M \cdot d^2$

2- Cas particuliers

2.1- Un plan de symétrie

Si le solide accepte un plan de symétrie, alors dans un repère dont deux les axes sont inclus dans ce plan de symétrie, la matrice a deux produits d'inertie nuls.

Exemple : Pour une symétrie de plan $(A, \vec{X}, \vec{Y})$:

$$\overline{\overline{J_A(S)}} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_S}$$

2.2- Deux plans de symétrie

Si le solide accepte deux plans de symétrie, alors dans un repère dont deux les axes sont inclus dans ces plans de symétrie, la matrice a tous ses produits d'inertie nuls : elle est diagonale.

Exemple : Pour 2 symétries de plans $(A, \vec{X}, \vec{Y})$ et $(A, \vec{Y}, \vec{Z})$:

$$\overline{\overline{J_A(S)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_S}$$

2.3- Solide de révolution

Si le solide est de révolution d'axe confondu avec celui du repère. Alors la matrice a tous ses produits d'inertie nuls : elle est diagonale et a deux moments d'inertie identiques :

Exemple : Pour un solide de révolution d'axe $(G, \vec{Z})$:

$$\overline{\overline{J_G(S)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_S}$$

2.4- Epaisseur très faible : Tôle

Si le solide est plan et a une épaisseur très faible (C'est par exemple une tôle plane), alors dans un repère dont deux les axes sont inclus dans ce plan, la matrice a deux produits d'inertie nuls et un moment d'inertie est égal à la somme des deux autres

Exemple : Pour 1 solide très mince dans le plan $(A, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$:

$$\overline{\overline{J_A(S)}} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}$$

2.5- Cylindre

Si le solide est un cylindre homogène de masse M de rayon r et de Hauteur h. La matrice d'inertie dans le repère R_S dont l'axe $(G, \overrightarrow{Z})$ est celui du cylindre est de la forme :

$$\overline{\overline{J_G(S)}} = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} 3\,.\,r^2 + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3\,.\,r^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6.r^2 \end{pmatrix}_{R_S}$$

2.6- Parallélépipède

Si le solide est un parallélépipède homogène de masse M de largeur a (Sur $\overrightarrow{X}$) de longueur b (Sur $\overrightarrow{Y}$) et de hauteur h (Sur $\overrightarrow{Z}$). La matrice d'inertie dans le repère R_S dont l'axe $(G, \overrightarrow{Z})$ est orienté suivant la hauteur et dont l'axe $(G, \overrightarrow{Y})$ est orienté suivant la longueur est de la forme :

$$\overline{\overline{J_G(S)}} = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} b^2 + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}_{R_S}$$

2.7- Barre

Si le solide est une barre de masse M de dimensions très petites devant la longueur L alors la matrice d'inertie dans le repère R_S dont l'axe $(G, \overrightarrow{Z})$ est orienté suivant la longueur est de la forme :

$$\overline{\overline{J_G(S)}} = \frac{M.L^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{R_S}$$

2.8- Sphère

Si le solide est une sphère homogène de masse M alors la matrice d'inertie dans tout repère R_S est :

$$\overline{\overline{J_G(S)}} = \frac{2.M.R^2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{R_S}$$

2.9- Cube

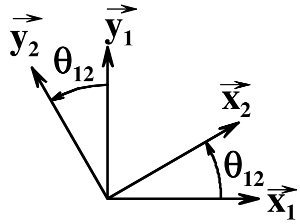
Si le solide est un cube homogène de masse M alors la matrice d'inertie dans tout repère R_S est :

$$\overline{\overline{J_G(S)}} = \frac{M.a^2}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{R_S}$$

3- Changement de base par rotation autour d'un axe

3.1- Cas général

Soit deux bases orthonormées directes : $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.



Ces deux base sont telles que la base $\mathcal{B}_2$ se déduit de la base $\mathcal{B}_1$ par une rotation : d'axe : $(A, \vec{z_1}) = (A, \vec{z_2})$

et : d'angle : $\theta_{12} = (\widehat{\vec{x_1}, \vec{x_2}}) = (\widehat{\vec{y_1}, \vec{y_2}})$

On donne l'opérateur d'inertie du solide S au point A dans la base $\mathcal{B}_1$ par la matrice :

$$\overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

On alors les matrices de changement de base (matrices de rotation) :

De la base 1 à la base 2 :

$$P_{1\to2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & -\sin\theta_{12} & 0 \\ \sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De la base 2 à la base 1 :

$$P_{2\to1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{1\to2}^{-1}$$

Et l'opérateur d'inertie du solide S au point A dans la base $\mathcal{B}_2$ par la matrice :

$$\mathbf{\overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_2} = P_{2\to1} \,.\, \overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_1} \,.\, P_{1\to2} = P_{1\to2}^{-1} \,.\, \overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_1} \,.\, P_{1\to2}}$$

3.2- Cas du solide de révolution

Soit un solide de révolution d'axe $(A, \vec{z_1})$ son opérateur d'inertie est $\mathbf{\overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}}$

Dans la base $\mathcal{B}_2$ obtenue par une rotation d'axe $(A, \vec{z_1}) = (A, \vec{z_2})$ et d'angle $\theta_{12} = (\widehat{\vec{x_1}, \vec{x_2}})$ on a alors :

$$\overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & -\sin\theta_{12} & 0 \\ \sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A.\cos\theta_{12} & -A.\sin\theta_{12} & 0 \\ A.\sin\theta_{12} & A.\cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} A.\cos^2\theta_{12} + A.\sin^2\theta_{12} & -A.\sin\theta_{12}.\cos\theta_{12} + A.\cos\theta_{12}.\sin\theta_{12} & 0 \\ -A.\cos\theta_{12}.\sin\theta_{12} + A.\sin\theta_{12}.\cos\theta_{12} & A.\sin^2\theta_{12} + A.\cos^2\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Soit finalement : $\mathbf{\overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}} \quad \forall\, \theta_{12}$

Remarque cela est ausssi vrai pour un parallélépipède de section carrée qui est donc "de révolution"

3.2- Cas du solide sphérique

Soit un solide sphérique son opérateur d'inertie est $\mathbf{\overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}}$ on montre aussi que quelque soit la base $\mathcal{B}_2$: $\overline{\overline{J_A(S)}}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$

Remarque: cela est ausssi vrai pour un cube qui est donc "sphérique"