Interface esclave : Corrigé

Question 1.

Les barres S_1, S_2, S_4 et S_5 ont deux plans de symétrie : Le plan contenant les deux axes des liaisons pivots et le plan orthogonal aux deux axes des ces mêmes liaisons pivot. Les matrices d'inertie de ces barres sont donc des matrices diagonales.

A supposer que l'épaisseur de la partie « mâle » des chapes est égale à la somme des deux épaisseurs de la partie « femelle » des chapes on en déduit que le centre d'inertie des ces barres est situé au milieu des deux centres des liaisons pivot. On a donc :

$$\mathbf{\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{G_1B} = \frac{L}{2}.\overrightarrow{x_1}} \qquad \mathbf{\overrightarrow{BG_2} = \overrightarrow{G_2C} = L.\overrightarrow{x_2}} \qquad \mathbf{\overrightarrow{DG_4} = \overrightarrow{G_4E} = \frac{L}{2}.\overrightarrow{x_4}} \qquad \mathbf{\overrightarrow{EG_5} = \overrightarrow{G_5F} = \frac{L}{2}.\overrightarrow{x_5}}$$

On a donc pour les barres S_1, S_2, S_4 et S_5 les opérateurs d'inertie donné par les matrices d'inertie en G_1, G_2, G_4 et G_5 dans les bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_4$ et $\mathcal{B}_5$:

$$\overline{\overline{J_{G_1}(S_1)}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \qquad \overline{\overline{J_{G_2}(S_2)}} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

$$\overline{\overline{J_{G_4}(S_4)}} = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_4} \qquad \overline{\overline{J_{G_5}(S_5)}} = \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_5}$$

D'autre part étant donné les masses et la forme de parallélépipède rectangle des barres avec :

- ☞ La longueur L ou 2.L suivant la direction $\overrightarrow{x}$ pour les 4 barres : L pour S_1, S_4 et S_5 et 2.L pour S_2
- ☞ L'épaisseur e pour les 4 barres suivant la direction : $\overrightarrow{z}$ pour S_1 et S_2 et $\overrightarrow{y}$ pour S_4 et S_5.
- ☞ La largeur d pour les 4 barres suivant la direction : $\overrightarrow{y}$ pour S_1 et S_2 et $\overrightarrow{z}$ pour S_4 et S_5.
- ☞ Une masse m pour les 3 barres S_1, S_4 et S_5 et 2.m pour la barre S_2

On obtient : $A_1 = A_4 = A_5 = \dfrac{m.(e^2+d^2)}{12}$ $\qquad A_2 = \dfrac{2.m.(e^2+d^2)}{12}$

$$B_1 = \frac{m.(L^2+e^2)}{12} \qquad B_2 = \frac{2.m.(4.L^2+e^2)}{12} \qquad B_4 = B_5 = \frac{m.(L^2+d^2)}{12}$$

$$C_1 = \frac{m.(L^2+d^2)}{12} \qquad C_2 = \frac{2.m.(4.L^2+d^2)}{12} \qquad C_4 = B_5 = \frac{m.(L^2+e^2)}{12}$$

On obtient finalement :

$$\overline{\overline{J_{G_1}(S_1)}} = \frac{m}{12}.\begin{pmatrix} e^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & L^2+e^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2+d^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \qquad \overline{\overline{J_{G_2}(S_2)}} = \frac{2.m}{12}.\begin{pmatrix} e^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4.L^2+e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4.L^2+d^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

$$\overline{\overline{J_{G_4}(S_4)}} = \frac{m}{12}.\begin{pmatrix} e^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & L^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2+e^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_4} \qquad \overline{\overline{J_{G_5}(S_5)}} = \frac{m}{12}.\begin{pmatrix} e^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & L^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2+e^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_5}$$

Puis en considérant : $e < d << L$ on a :

$$\overline{\overline{J_{G_1}(S_1)}} = \frac{m}{12}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \qquad \overline{\overline{J_{G_2}(S_2)}} = \frac{2.m}{3}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

$$\overline{\overline{J_{G_4}(S_4)}} = \frac{m}{12}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_4} \qquad \overline{\overline{J_{G_5}(S_5)}} = \frac{m}{12}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_5}$$

Question 2.

Moto réducteur

Le moment d'inertie du moto-réducteur ramené sur son arbre de sortie $(A, \overrightarrow{z_0})$ est J_m d'où l'énergie cinétique de ce moto-réducteur dans son mouvement par rapport à S_0 :

$$\boxed{\mathbf{E_C(Mot/S_0) = \frac{1}{2} . J_m.\omega^2}}$$

Barre S_1

Première méthode de calcul

Cette barre est en mouvement de rotation par rapport à l'axe $(A, \overrightarrow{z_0})$ d'où l'énergie cinétique de cette barre S_1 dans son mouvement par rapport à S_0 :

$$E_C(S_1/S_0) = \frac{1}{2} . \overrightarrow{\Omega_{1/0}} . \overline{\overline{J_{A_1}(S_1)}} . \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

Or ayant $\overrightarrow{AG_1} = \frac{L}{2}.\overrightarrow{x_1}$ par le théorème de Huygens on a :

$$\overline{\overline{J_{A_1}(S_1)}} = \overline{\overline{J_{G_1}(S_1)}} + m.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{4} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \frac{m}{12}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} + \frac{m}{4}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \frac{m}{3}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

On obtient : $E_C(S_1/S_0) = \frac{1}{2} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} . \frac{m}{3}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{2} . \frac{m}{3}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$

Et donc finalement : $\boxed{\mathbf{E_C(S_1/S_0) = \frac{1}{2} . \frac{m.L^2}{3}.\omega^2}}$

Deuxième méthode de calcul

$$E_C(S_1/S_0) = \frac{1}{2} . m.\overrightarrow{V_{G_1\in 1/0}}^2 + \frac{1}{2} . \overrightarrow{\Omega_{1/0}} . \overline{\overline{J_{G_1}(S_1)}} . \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

Avec : $\overrightarrow{V_{G_1\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{0} + \omega.\overrightarrow{z_1} \wedge \frac{L}{2}.\overrightarrow{x_1} = \frac{L}{2}.\omega.\overrightarrow{y_1}$ Soit :

$$E_C(S_1/S_0) = \frac{1}{2} . m. \left(\frac{L}{2}.\omega.\overrightarrow{y_1}\right)^2 + \frac{1}{2} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} . \frac{m}{12}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \frac{1}{2} . \frac{m.L^2}{4}.\omega^2 + \frac{1}{2} . \frac{m.L^2}{12}.\omega^2$$

Et donc finalement : $\boxed{\mathbf{E_C(S_1/S_0) = \frac{1}{2} . \frac{m.L^2}{3}.\omega^2}}$

Barre S_4

Cette barre est en mouvement de rotation par rapport à l'axe $(D, \overrightarrow{y_0})$ à la vitesse de rotation :

$$\dot{\theta}_4 = k_4.\dot{\theta}_1 = k_4.\omega \qquad \text{car : } \theta_4 = 0{,}13 + k_4.\theta_1$$

Donc par un calcul similaire à celui de $E_C(S_1/S_0)$ ($1^{\text{ière}}$ méthode ou 2^{nde}) on obtient :

$$\boxed{\mathbf{E_C(S_4/S_0) = \frac{1}{2} . \frac{m.L^2}{3}.k_4^2.\omega^2}}$$

Barre S_2

$$E_C(S_2/S_0) = \frac{1}{2} . 2.m.\overrightarrow{V_{G_2\in 2/0}}^2 + \frac{1}{2} . \overrightarrow{\Omega_{2/0}} . \overline{\overline{J_{G_2}(S_2)}} . \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$$

Avec : $\overrightarrow{V_{G_2\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{C\in 2/0}} + \overrightarrow{G_2C} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \dot{x}.\overrightarrow{x_0} + L.\overrightarrow{x_2} \wedge \dot{\theta}_2.\overrightarrow{z_2} = \dot{x}.\overrightarrow{x_0} - L.\dot{\theta}_2.\overrightarrow{y_2}$

On obtient donc : $E_C(S_2/S_0) = \frac{1}{2} . 2.m.(\dot{x}.\overrightarrow{x_0} - L.\dot{\theta}_2.\overrightarrow{y_2})^2 + \frac{1}{2} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} . \frac{2.m}{3}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$

$$E_C(S_2/S_0) = \frac{1}{2} . 2.m.(\dot{x}^2 + L^2.\dot{\theta}_2^2 + 2.L.\dot{x}.\dot{\theta}_2.\sin\theta_2) + \frac{1}{2} . \frac{2.m.L^2}{3} . \dot{\theta}_2^2$$

$$E_C(S_2/S_0) = \frac{1}{2} . 2.m. \left(\dot{x}^2 + \frac{4.L^2}{3} . \dot{\theta}_2^2 + 2.L.\dot{x}.\dot{\theta}_2.\sin\theta_2\right)$$

Par linéarisation, on a : ☞ $x = 0{,}27 - \lambda.\theta_1$ Donc : $\dot{x} = -\lambda.\dot{\theta}_1 = -\lambda.\omega$ soit : $\dot{x}^2 = \lambda^2.\omega^2$

☞ $\theta_2 = k_2.\left|\frac{\pi}{2} - \theta_1\right|$ Dont on peut considérer deux cas :

a) Si $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$ $\theta_2 = k_2.\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)$ $\Rightarrow$ $\dot{\theta}_2 = -k_2.\dot{\theta}_1 = -k_2.\omega$ $\Rightarrow$ $\dot{\theta}_2.\sin\theta_2 = -k_2.\omega.\sin\left(k_2.\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right)$

b) Si $\theta_1 > \frac{\pi}{2}$ $\theta_2 = -k_2.\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)$ $\Rightarrow$ $\dot{\theta}_2 = k_2.\dot{\theta}_1 = k_2.\omega$ $\Rightarrow$ $\dot{\theta}_2.\sin\theta_2 = -k_2.\omega.\sin\left(k_2.\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right)$

Donc $\forall\ \theta_1 \in [45°,135°]$ $\dot{\theta}_2^2 = k_2^2.\omega^2$ et : $\dot{\theta}_2.\sin\theta_2 = -k_2.\omega.\sin\left(k_2.\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right)$

Donc : $$\mathbf{E_C(S_2/S_0) = \frac{1}{2} . m. \left[2.\lambda^2 + \frac{8.L^2}{3}.k_2^2 + 4.L.\lambda.k_2.\sin\left(k_2.\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right)\right] . \omega^2}$$

<u>Barre S_5</u>

$$E_C(S_5/S_0) = \frac{1}{2} . m.\overrightarrow{V_{G_5\in 5/0}}^2 + \frac{1}{2} . \overrightarrow{\Omega_{5/0}} . \overline{\overline{J_{G_5}(S_5)}} . \overrightarrow{\Omega_{5/0}}$$

Avec : $\overrightarrow{V_{G_5\in 5/0}} = \overrightarrow{V_{F\in 5/0}} + \overrightarrow{G_5F} \wedge \overrightarrow{\Omega_{5/0}} = \dot{x}.\overrightarrow{x_0} + \frac{L}{2}.\overrightarrow{x_5} \wedge \dot{\theta}_5.\overrightarrow{y_5} = \dot{x}.\overrightarrow{x_0} + \frac{L}{2}.\dot{\theta}_5.\overrightarrow{z_5}$

On obtient donc : $E_C(S_5/S_0) = \frac{1}{2} . m.\left(\dot{x}.\overrightarrow{x_0} + \frac{L}{2}.\dot{\theta}_5.\overrightarrow{z_5}\right)^2 + \frac{1}{2} . \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_5\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_5} . \frac{m}{12}.\begin{pmatrix}0&0&0\\0&L^2&0\\0&0&L^2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_5} . \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_5\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_5}$

$$E_C(S_5/S_0) = \frac{1}{2} . m.\left(\dot{x}^2 + \frac{L^2}{4}.\dot{\theta}_5^2 + L.\dot{x}.\dot{\theta}_5.\sin\theta_5\right) + \frac{1}{2} . \frac{m.L^2}{12} . \dot{\theta}_5^2$$

$$E_C(S_5/S_0) = \frac{1}{2} . m. \left(\dot{x}^2 + \frac{L^2}{3} . \dot{\theta}_5^2 + L.\dot{x}.\dot{\theta}_5.\sin\theta_5\right)$$

Par linéarisation, on a : ☞ $x = 0{,}27 - \lambda.\theta_1$ Donc : $\dot{x} = -\lambda.\dot{\theta}_1 = -\lambda.\omega$ soit : $\dot{x}^2 = \lambda^2.\omega^2$

☞ $\theta_5 = -\theta_4 = -0{,}13 - k_4.\theta_1$ Donc : $\dot{\theta}_5 = -k_4.\dot{\theta}_1 = -k_4.\omega$ et: $\dot{\theta}_5^2 = k_4^2.\omega^2$

Donc : $$\mathbf{E_C(S_5/S_0) = \frac{1}{2} . m. \left[\lambda^2 + \frac{L^2}{3}.k_4^2 - L.\lambda.k_4.\sin\theta_4\right] . \omega^2}$$

<u>Mandrin S_3</u>

$E_C(S_3/S_0) = \frac{1}{2} . M.\overrightarrow{V_{G_3\in 3/0}}^2 = \frac{1}{2} . M.\dot{x}^2$ Soit : $\mathbf{E_C(S_3/S_0) = \frac{1}{2} . M.\lambda^2.\omega^2}$

<u>Synthèse</u>

Sachant que : $E_C(\Sigma/S_0) = E_C(Mot/S_0) + E_C(S_1/S_0) + E_C(S_2/S_0) + E_C(S_3/S_0) + E_C(S_4/S_0) + E_C(S_5/S_0)$

Donc : $$E_C(\Sigma/S_0) = \frac{1}{2}.J_m.\omega^2 + \frac{1}{2} . \frac{m.L^2}{3}.\omega^2 + \frac{1}{2}. m. \left[2.\lambda^2 + \frac{8.L^2}{3}.k_2^2 + 4.L.\lambda.k_2.\sin\left(k_2.\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right)\right] . \omega^2$$
$$+ \frac{1}{2} . M.\lambda^2.\omega^2 + \frac{1}{2} . \frac{m.L^2}{3}.k_4^2.\omega^2 + \frac{1}{2} . m. \left[\lambda^2 + \frac{L^2}{3}.k_4^2 - L.\lambda.k_4.\sin\theta_4\right] . \omega^2$$

Soit Finalement : $E_C(\Sigma/S_0) = \frac{1}{2} J_{eq}.\omega^2$ Avec :

$$\mathbf{J_{eq} = J_m + M.\lambda^2 + m. \left[3.\lambda^2 + \frac{L^2}{3} + \frac{8.L^2}{3}.k_2^2 + \frac{2.L^2}{3}.k_4^2 + 4.L.\lambda.k_2.\sin\left(k_2.\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right) - L.\lambda.k_4.\sin\theta_4\right]}$$

Ou encore : $$\mathbf{J_{eq} \approx J_m + M.\lambda^2 + m. \left[3.\lambda^2 + \frac{L^2}{3} + \frac{8.L^2}{3}.k_2^2 + \frac{2.L^2}{3}.k_4^2 - \frac{L.\lambda.k_4.\sqrt{3}}{2}\right]}$$