

## TD2 : Ouvre barrière Sinusmatic - Etude énergétique

### Présentation du mécanisme

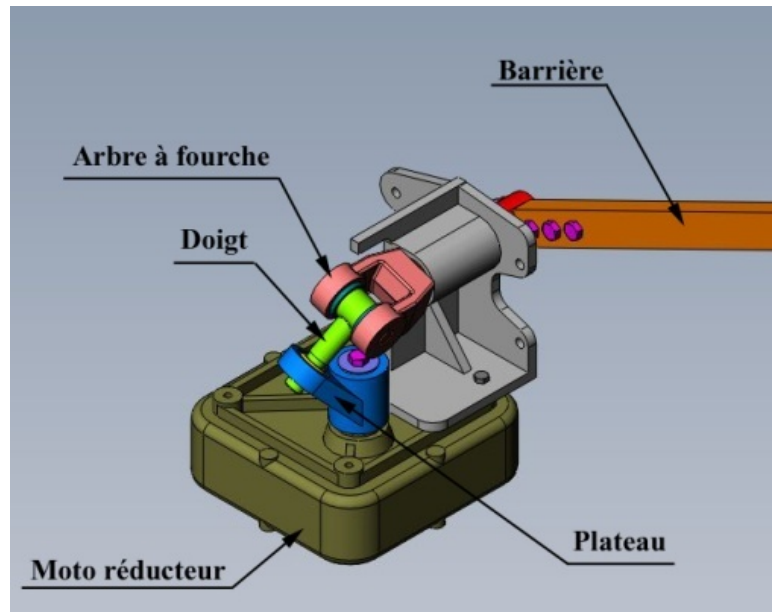
#### Mise en situation

Le mécanisme étudié est un système d'ouverture et fermeture de barrières légères. Ce type de mécanisme est par exemple utilisé pour actionner les barrières fermant les entrées et sorties des parkings pour automobiles.

La fonction du mécanisme modélisé sur le document DT2 est de transformer un mouvement de rotation continu en rotation alternatif sur une course de  $90^\circ$ .

#### Description

Le mécanisme reçoit donc un motoréducteur qui donne à son arbre de sortie un mouvement de rotation continu. Ce dernier entraîne dans son mouvement le plateau 4.



L'arbre à fourche sur lequel est fixée la barrière 2, reçoit un doigt 3 qui peut tourner et translater dans le plateau 4. Cette liaison pivot glissant entre le plateau et le doigt entraîne ce dernier en rotation d'axe vertical. Ce qui entraîne l'arbre à fourche 2 en rotation d'axe horizontale, en lui donnant un angle pouvant varier entre  $-45^\circ$  et  $+45^\circ$ .

Ainsi l'arbre à fourche 4 peut entraîner en rotation une barrière entre  $0$  et  $90^\circ$ . (Voir fonctionnement avec le fichier « Animation.avi » sur le site « Cahier de prépa »)

#### Objectif :

L'ouverture de la barrière se fait en 1 seconde sa fermeture dans le même temps. Par conséquent, l'arbre de sortie du motoréducteur tourne à la vitesse de  $30 \text{ tr/min} = \pi \text{ rad.s}^{-1}$ . Cette rotation est assurée par un moteur électrique.

Le but du problème est de déterminer, en fonction de la position du plateau 4, le couple moteur nécessaire permettant de maintenir une vitesse constante de rotation du plateau 4. Ceci afin de choisir un moteur suffisant pour respecter un temps d'ouverture maximal de la barrière 2.

### Modélisation et paramétrage du mécanisme

Le mécanisme se compose de quatre classes d'équivalence considérées comme des solides :

☞ Le Bâti :  $S_1$

☞ La barrière :  $S_2$

☞ Le doigt :  $S_3$

☞ Le plateau :  $S_4$

On donne un schéma cinématique du mécanisme dans la position particulière où l'angle  $\varphi$  est nul.

L'accélération gravitationnelle est :  $\vec{g} = -g \cdot \vec{Z}_1$  avec  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

#### Le Bâti $S_1$

On choisit le repère  $R_1 (\vec{X}_1; \vec{Y}_1; \vec{Z}_1)$  fixe par rapport à ce bâti, lui-même fixe par rapport à la terre.

Ce bâti reçoit le plateau en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{Z}_1)$  et la barrière en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{Y}_1)$ .

On a :  $\vec{OC} = -d_2 \cdot \vec{Y}_1 + 2.a \cdot \vec{Z}_1$

**La barrière S<sub>2</sub>**

On choisit le repère  $R_2 (\vec{X}_2; \vec{Y}_2; \vec{Z}_2)$  fixe par rapport à cette barrière.

La barrière étant en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{Y}_1)$  sur le bâti on a donc :  $\vec{Y}_2 = \vec{Y}_1$ .

On pose l'angle  $\alpha$ , le paramètre lié à cette liaison pivot.  $\alpha = (\widehat{\vec{X}_1, \vec{X}_2}) = (\widehat{\vec{Z}_1, \vec{Z}_2})$

Le point B est fixe par rapport à cette barrière et est tel que :  $\vec{CB} = d_2 \cdot \vec{Y}_1$ .

Quel que soit la position du mécanisme on a donc toujours :  $\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CB} = 2.a \cdot \vec{Z}_1$

Cette barrière a une masse  $m_2$  et un centre d'inertie  $G_2$ . Le point  $G_2$  étant le milieu de la barre qui est inclinée de  $45^\circ$  et qui a une longueur  $\ell$  on a :  $\vec{BG}_2 = -\frac{\ell}{2\sqrt{2}} \cdot \vec{X}_2 + y_{G_2} \cdot \vec{Y}_2 + \frac{\ell}{2\sqrt{2}} \cdot \vec{Z}_2$

On note  $\overline{J_B(S_2)} = \begin{pmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{R_2}$  l'opérateur d'inertie du solide  $S_2$  en B dans  $R_2$ .

**Le doigt S<sub>3</sub>**

On choisit le repère  $R_3 (\vec{X}_3; \vec{Y}_3; \vec{Z}_3)$  fixe par rapport à ce doigt.

Le doigt étant en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{X}_2)$  sur la barrière 2 on a :  $\vec{X}_3 = \vec{X}_2$ .

On pose l'angle  $\theta$ , le paramètre lié à cette liaison pivot.  $\theta = (\widehat{\vec{Y}_2, \vec{Y}_3}) = (\widehat{\vec{Z}_2, \vec{Z}_3})$

Ce doigt 3 a une masse  $m_3$  et un centre d'inertie  $G_3$  tel que :  $\vec{BG}_3 = y_{G_3} \cdot \vec{Y}_3$

On note  $\overline{J_B(S_3)} = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}_{R_3}$  l'opérateur d'inertie du solide  $S_3$  en B dans  $R_3$

**Le plateau S<sub>4</sub>**

On choisit le repère  $R_4 (\vec{X}_4; \vec{Y}_4; \vec{Z}_4)$  fixe par rapport à ce plateau.

Le plateau étant en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{Z}_1)$  sur le bâti on a :  $\vec{Z}_4 = \vec{Z}_1$

On pose l'angle  $\varphi$ , le paramètre lié à cette liaison pivot.  $\varphi = (\widehat{\vec{X}_1, \vec{X}_4}) = (\widehat{\vec{Y}_1, \vec{Y}_4})$

On suppose pour cette étude que la vitesse de rotation du plateau est constante ( $\ddot{\varphi} = 0$ ) et est de :

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi \cdot N_4}{60} = \frac{2\pi \times 30}{60} = \pi \text{ rad.s}^{-1}.$$

Ce plateau 4 reçoit le doigt 3 en liaison pivot glissant d'axe  $(A, \vec{Y}_3)$  et de centre A tel que :  $\vec{OA} = a \cdot \vec{Y}_4 + a \cdot \vec{Z}_4$

On pose la distance  $y$  le paramètre lié à cette liaison pivot glissant :  $\vec{BA} = y \cdot \vec{Y}_3$

Ce plateau 4 a une masse  $m_4$  et un centre d'inertie  $G_4$  tel que :  $\vec{OG}_4 = y_{G_4} \cdot \vec{Y}_4 + z_{G_4} \cdot \vec{Z}_4$

On note  $\overline{J_O(S_4)} = \begin{pmatrix} A_4 & -F_4 & -E_4 \\ -F_4 & B_4 & -D_4 \\ -E_4 & -D_4 & C_4 \end{pmatrix}_{R_4}$  l'opérateur d'inertie du solide  $S_4$  en O dans  $R_4$ .

**Travail demandé****1- Etude cinématique**

**1.1-** Démontrer les relations ci-dessous entre les paramètres cinématiques :  $\alpha$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  et  $y$ .

$$y \cdot \sin \theta \cdot \sin \alpha = -a \cdot \sin \varphi \quad (a)$$

$$y \cdot \cos \theta = a \cdot \cos \varphi \quad (b)$$

$$y \cdot \sin \theta \cdot \cos \alpha = -a \quad (c)$$

Ainsi que :

$$y = a \cdot \sqrt{2} \quad (d)$$

$$\tan \alpha = \sin \varphi \quad (e)$$

$$\cos \theta = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2}} \quad (f)$$

**1.2-** Par dérivation temporelle des relations (e) et (f), déterminer uniquement en fonction du paramètre  $\varphi$  (et de  $\dot{\varphi}$ ), les expressions des dérivées temporelles des paramètres  $\alpha$  et  $\theta$  :  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{\alpha}$  et  $\ddot{\theta}$ . Remarque : la vitesse de rotation du plateau est supposée constante donc :  $\ddot{\varphi} = 0$ .

**1.3-** Par la méthode de votre choix, déterminer des expressions simples des vitesses des centres d'inertie des solides 2, 3 et 4 :  $\vec{V}_{G2 \in 2/1}$ ,  $\vec{V}_{G3 \in 3/1}$  et  $\vec{V}_{G4 \in 4/1}$ . Puis en vous aidant des équations (c) et (d) en déduire que  $\vec{V}_{G3 \in 3/1} \cdot \vec{Z}_1 = \vec{V}_{G4 \in 4/1} \cdot \vec{Z}_1 = 0$

## 2- Analyse du mécanisme

**2.1-** Donner le degré de mobilité du mécanisme. En déduire son degré d'hyperstatisme. En déduire avec cette modélisation le nombre d'hypothèses à faire sur les inconnues sthéniques afin de pouvoir déterminer par une étude dynamique toutes les inconnues sthéniques.

**2.2-** Proposer une modélisation (en modifiant la liaison de centre A entre 3 et 4) permettant de rendre le mécanisme isostatique. Vous pourrez faire si nécessaire, une fermeture cinématique du cycle au point B dans le repère  $R_3$ .

**2.3-** Dans le cas où la liaison pivot glissant en A n'est pas modifiée, proposer deux hypothèses sur les inconnues sthéniques de cette liaison permettant de déterminer par une étude dynamique toutes les inconnues sthéniques.

## 3- Géométrie des masses

**3.1-** En étudiant la forme du solide  $S_3$  donner une forme simplifiée de l'opérateur d'inertie  $\overline{J}_B(S_3)$ .

**3.2-** En étudiant la forme du solide  $S_4$  donner une forme simplifiée de l'opérateur d'inertie  $\overline{J}_O(S_4)$ .

## 4- Etude cinétique

**4.1-** Déterminer, en fonction des paramètres  $\alpha$ ,  $\varphi$  et  $\theta$  et de leurs dérivées ainsi que des moments et produits d'inertie des opérateurs  $\overline{J}_B(S_2)$ ,  $\overline{J}_B(S_3)$  et  $\overline{J}_O(S_4)$ , l'expression de  $E_c(S/R_1)$  l'énergie cinétique du système  $S = S_2 + S_3 + S_4$  dans son mouvement par rapport au repère galiléen  $R_1$ .

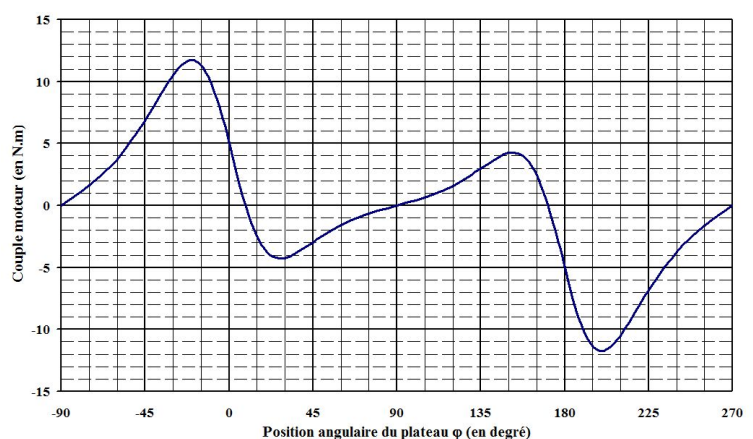
**4.2-** On note  $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{Z}_1$  le couple moteur appliqué sur le plateau 4. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'expression de  $C_m$  la valeur algébrique du couple moteur permettant de maintenir constante  $\dot{\varphi}$  la vitesse de rotation du plateau 4.

L'expression de cette valeur algébrique sera donnée en fonction des paramètres  $\alpha$ ,  $\varphi$  et  $\theta$  et de leurs dérivées, de la masse  $m_2$ , de la distance  $\ell$ , des moments d'inertie  $B_2$ ,  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$  et de l'accélération gravitationnelle  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

## 5- Conclusion

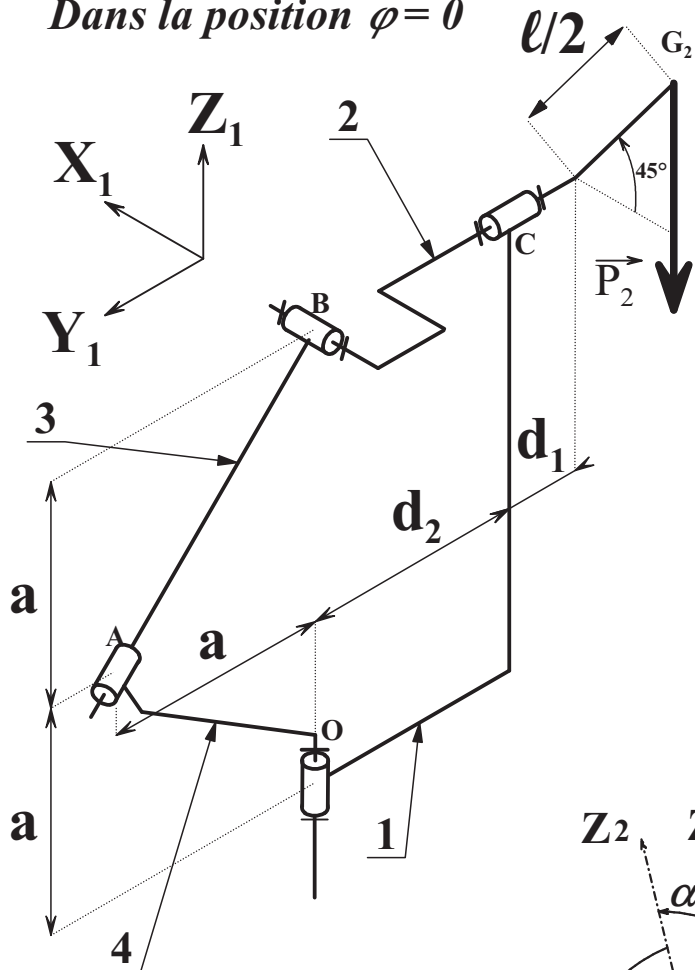
Des applications numériques permettent de tracer l'évolution du couple moteur  $C_m$  en fonction de l'angle  $\varphi$ . Voir courbe ci-contre. Quel doit être la puissance minimale de ce moteur ?

Couple moteur  $C_m$



## Schéma cinématique

Dans la position  $\varphi = 0$



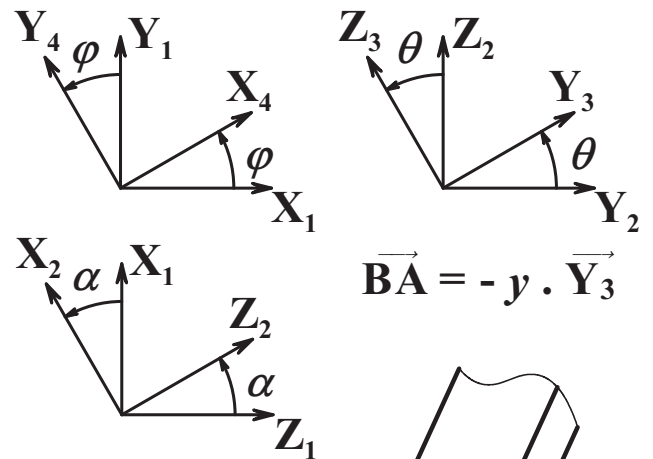
## Dimensions

$$\overrightarrow{OA} = a \cdot \overrightarrow{Y_4} + a \cdot \overrightarrow{Z_4}$$

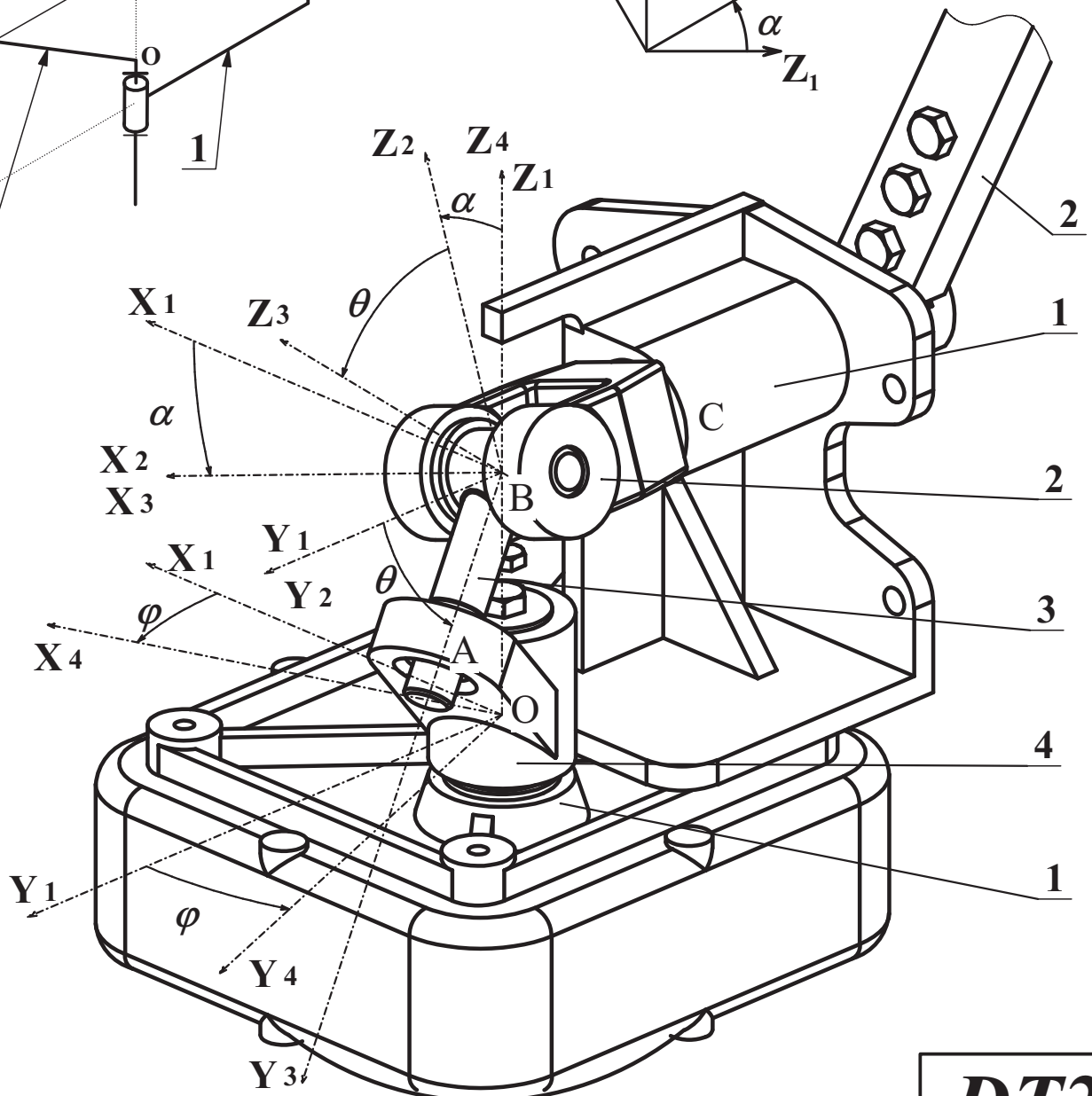
$$\overrightarrow{OB} = 2 \cdot a \cdot \overrightarrow{Z_1} = 2 \cdot a \cdot \overrightarrow{Z_4}$$

$$\overrightarrow{BG_2} = x_{G2} \cdot \overrightarrow{X_2} + y_{G2} \cdot \overrightarrow{Y_2} + z_{G2} \cdot \overrightarrow{Z_2}$$

## Paramétrage



$$\overrightarrow{BA} = -y \cdot \overrightarrow{Y_3}$$



**DT2**