

Mandrin anti centrifuge : Corrigé

1.1- Graphe de structure

Degré de mobilité du mécanisme est de : $M = 1$

Nombre de pièce hors bâti est : $(N_P - 1) = 6 - 1 = 5$

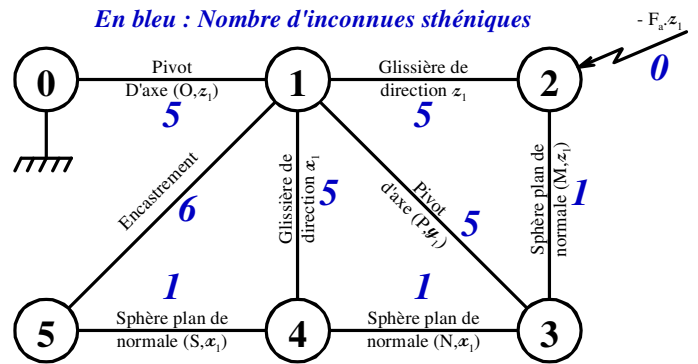
Le Nombre d'inconnues sthéniques :

$$I_S = 6 + 5 \times 4 + 1 \times 3 = 29$$

D'où le degré d'hyperstatisme du mécanisme :

$$H = 29 + 1 - 6 \times 5 \quad \mathbf{H = 0}$$

Il est donc possible de déterminer toutes les actions sthéniques par le PFD.



2- Ordonnement des isolement

- ☞ On isole le solide 2 et on applique un TRD en projection sur \vec{z}_1 On en déduit l'action de 2→3.
- ☞ On isole le solide 3 et on applique un TMD en P en projection sur \vec{y}_1 On en déduit l'action de 3→4.
- ☞ On isole le solide 4 et on applique un TRD en projection sur \vec{x}_1 On en déduit l'action de 4→5.

3- Géométrie des masses

Etant donné la symétrie du levier 3 par rapport au plan $(P, \vec{x}_3, \vec{z}_3)$ on en déduit la forme de la

matrice d'inertie du solide 3 au point P dans le repère $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1$:

$$\overline{\overline{I_P(3)}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

Le levier 3 à une masse m_3 et un centre de gravité G_3 tel que : $\overline{PG_3} = -e \cdot \vec{x}_1 - d \cdot \vec{z}_1$

Donc d'après le théorème de Huygens : $\overline{\overline{I_P(3)}} = \overline{\overline{I_{G_3}(3)}} + m_3 \begin{pmatrix} d^2 & 0 & -e \cdot d \\ 0 & e^2 + d^2 & 0 \\ -e \cdot d & 0 & e^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$

Donc : $\overline{\overline{I_{G_3}(3)}} = \overline{\overline{I_P(3)}} - m_3 \begin{pmatrix} d^2 & 0 & -e \cdot d \\ 0 & e^2 + d^2 & 0 \\ -e \cdot d & 0 & e^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$

Soit : $\overline{\overline{I_{G_3}(3)}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - m_3 \cdot d^2 & \mathbf{0} & -\mathbf{E} + m_3 \cdot e \cdot d \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} - m_3 \cdot (e^2 + d^2) & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E} + m_3 \cdot e \cdot d & \mathbf{0} & \mathbf{C} - m_3 \cdot e^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$

4- Application du PFD

On isole le solide 2, Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :

- ☞ Action de 1→2 due à la liaison glissière de direction \vec{z}_1
- ☞ Action de 3→2 due à la liaison sphère plan de normale (M, \vec{z}_1) : Force $\vec{F}_{3 \rightarrow 2} = Z_{32} \cdot \vec{z}_1$ appliquée en M
- ☞ Action de l'actionneur sur 2 modélisée par une force de résultante : $\vec{F}_a = -F_a \cdot \vec{z}_1$ appliquée en O

L'application du TRD en projection sur \vec{z}_1 donne donc : $0 + Z_{32} - F_a = m_2 \cdot \overline{\overline{a_{G_2 \in 2/0}}} \cdot \vec{z}_1$

Or le mouvement de 2 par rapport à 0 étant une rotation d'axe (O, \vec{z}_1) : $m_2 \cdot \overline{\overline{a_{G_2 \in 2/0}}} \cdot \vec{z}_1 = 0$

On obtient donc : $Z_{32} = F_a$ Soit par le principe des actions mutuelles : $Z_{23} = -F_a$

Donc l'action de 2→3 est une force $\vec{F}_{2 \rightarrow 3} = -F_a \cdot \vec{z}_1$ appliquée en M

On isole le solide 3, et lui applique un théorème du moment dynamique en P. Nous allons donc calculer le moment dynamique en P du solide 3 dans son mouvement par rapport à 0 : $\delta_P(3/0)$.

Calculs de cinématiques :

Le mouvement de 3 par rapport à 0 est une rotation d'axe (O, \vec{z}_1) donc :

$$\vec{V}_{P \in 3/0} = \vec{V}_{O \in 3/0} + \vec{PO} \wedge \vec{\Omega}_{3/0} = \vec{0} - a. \vec{x}_1 \wedge \omega. \vec{z}_1 \Rightarrow \vec{V}_{P \in 3/0} = a. \omega. \vec{y}_1$$

$$\vec{V}_{G_3 \in 3/0} = \vec{V}_{O \in 3/0} + \vec{G_3 O} \wedge \vec{\Omega}_{3/0} = \vec{0} - [(a - e). \vec{x}_1 + d. \vec{z}_1] \wedge \omega. \vec{z}_1 \Rightarrow \vec{V}_{G_3 \in 3/0} = (a - e). \omega. \vec{y}_1$$

D'autre part, par dérivation vectorielle on a :

$$\vec{a}_{G_3 \in 3/0} = \left(\frac{d \vec{V}_{G_3 \in 3/0}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d \vec{V}_{G_3 \in 3/0}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{V}_{G_3 \in 3/0} \quad \text{avec : } \vec{V}_{G_3 \in 3/0} = (a - e). \omega. \vec{y}_1$$

$$\text{Or } \dot{\omega} = 0. \text{ Donc : } \vec{a}_{G_3 \in 3/0} = \vec{0} + \omega. \vec{z}_1 \wedge (a - e). \omega. \vec{y}_1 \quad \text{Soit : } \vec{a}_{G_3 \in 3/0} = - (a - e). \omega^2. \vec{x}_1$$

Calculs de cinétique au point P :

$$\text{On a : } \overline{\sigma_P(3/0)} = \overline{I_P(3)} . \vec{\Omega}_{3/0} + m_3. \vec{PG_3} \wedge \vec{V}_{P \in 3/0}$$

$$\overline{\sigma_P(3/0)} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} + m_3. \begin{pmatrix} -e \\ 0 \\ -d \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ a. \omega \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} -E. \omega \\ 0 \\ C. \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} + \begin{pmatrix} m_3.a.d. \omega \\ 0 \\ -m_3.a.e. \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

$$\text{Soit finalement : } \overline{\sigma_P(3/0)} = \begin{pmatrix} - (E - m_3.a.d.) \omega \\ 0 \\ (C - m_3.a.e.) \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

$$\text{D'autre part : } \overline{\delta_P(3/0)} = \left(\frac{d \overline{\sigma_P(3/0)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} + m_3. \vec{V}_{P/0} \wedge \vec{V}_{G_3 \in 3/0} \quad \left| \begin{array}{l} \text{avec : } \vec{V}_{P/0} = \vec{V}_{P \in 3/0} \text{ car } P \in 3 \\ \text{Et : } \vec{V}_{P \in 3/0} // \vec{V}_{G_3 \in 3/0} \end{array} \right.$$

$$\text{Donc : } m_3. \vec{V}_{P/0} \wedge \vec{V}_{G_3 \in 3/0} = \vec{0} \Rightarrow \overline{\delta_P(3/0)} = \left(\frac{d \overline{\sigma_P(3/0)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0}$$

$$\overline{\delta_P(3/0)} = \left(\frac{d \overline{\sigma_P(3/0)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \overline{\sigma_P(3/0)} \quad \text{Or : } \overline{\sigma_P(3/0)} = \begin{pmatrix} - (E - m_3.a.d.) \omega \\ 0 \\ (C - m_3.a.e.) \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \quad \text{et : } \dot{\omega} = 0$$

$$\overline{\delta_P(3/0)} = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \wedge \begin{pmatrix} - (E - m_3.a.d.) \omega \\ 0 \\ (C - m_3.a.e.) \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \quad \text{Soit : } \overline{\delta_P(3/0)} = - (E - m_3.a.d.) \omega^2 \vec{y}_1$$

Autre méthode de calcul : On calcule uniquement la projection de $\overline{\delta_P(3/0)}$ sur \vec{y}_1 à partir de $\overline{\sigma_P(3/0)}$:

$$\overline{\delta_P(3/0)}. \vec{y}_1 = \left(\frac{d \overline{\sigma_P(3/0)}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0}. \vec{y}_1 \quad \text{Or : } \frac{d \vec{u}. \vec{v}}{dt} = \left(\frac{d \vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i}. \vec{v} + \vec{u}. \left(\frac{d \vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i} \quad \forall \mathcal{R}_i$$

$$\text{Donc : } \left(\frac{d \vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i}. \vec{v} = \frac{d \vec{u}. \vec{v}}{dt} - \vec{u}. \left(\frac{d \vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i} \quad \text{Soit pour } \vec{u} = \overline{\sigma_P(3/0)} ; \vec{v} = \vec{y}_1 \text{ et } \mathcal{R}_i = \mathcal{R}_0$$

$$\overline{\delta_P(3/0)}. \vec{y}_1 = \frac{d \overline{\sigma_P(3/0)}. \vec{y}_1}{dt} - \overline{\sigma_P(3/0)}. \left(\frac{d \vec{y}_1}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} \quad \text{Or : } \overline{\sigma_P(3/0)}. \vec{y}_1 = 0$$

$$\overline{\delta_P(3/0)}. \vec{y}_1 = 0 - \overline{\sigma_P(3/0)}. \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{y}_1 = ((E - m_3.a.d.) \omega. \vec{x}_1 - (C - m_3.a.e.) \omega. \vec{z}_1). \omega. \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1$$

$$\text{Soit finalement : } \overline{\delta_P(3/0)}. \vec{y}_1 = - (E - m_3.a.d.) \omega^2$$

Calculs de cinétique au point G₃ :

$$G_3 \text{ étant le centre d'inertie de 3 on a : } \overline{\sigma_{G_3}(3/0)} = \overline{I_{G_3}(3)} . \vec{\Omega}_{3/0}$$

$$\overline{\sigma_{G_3}(3/0)} = \begin{pmatrix} A - m_3.d^2 & 0 & -E + m_3.e.d \\ 0 & B - m_3.(e^2 + d^2) & 0 \\ -E + m_3.e.d & 0 & C - m_3.e^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \Rightarrow \overline{\sigma_{G_3}(3/0)} = \begin{pmatrix} - (E - m_3.e.d.) \omega \\ 0 \\ (C - m_3.e^2.) \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

D'autre part : $\overrightarrow{\delta_{G_3(3/0)}} = \left(\frac{d \overrightarrow{\sigma_{G_3(3/0)}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d \overrightarrow{\sigma_{G_3(3/0)}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{\sigma_{G_3(3/0)}}$

Ayant : $\overrightarrow{\sigma_{G_3(3/0)}} = \begin{pmatrix} -(E - m_3.e.d).\omega \\ 0 \\ (C - m_3.e^2).\omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ Avec $\dot{\omega} = 0$ on a : $\left(\frac{d \overrightarrow{\sigma_{G_3(3/0)}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{\delta_{G_3(3/0)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1} \wedge \begin{pmatrix} -(E - m_3.e.d).\omega \\ 0 \\ (C - m_3.e^2).\omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_1}$ Soit : $\overrightarrow{\delta_{G_3(3/0)}} = -(E - m_3.e.d).\overrightarrow{y_1}$

Enfin par le théorème de Varignon on a : $\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = \overrightarrow{\delta_{G_3(3/0)}} + \overrightarrow{PG_3} \wedge m_3.\overrightarrow{\alpha_{G_3 \in 3/0}}$

$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = -(E - m_3.e.d).\overrightarrow{y_1} + m_3.(-e.\overrightarrow{x_1} - d.\overrightarrow{z_1}) \wedge -(a - e).\omega^2.\overrightarrow{x_1}$

$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = -(E - m_3.e.d).\overrightarrow{y_1} + m_3.(a.d - e.d).\omega^2.\overrightarrow{y_1}$

Enfinement on obtient : $\overrightarrow{\delta_P(3/0)} = -(E - m_3.a.d).\omega^2.\overrightarrow{y_1}$

Autre méthode de calcul : On calcule uniquement la projection de $\overrightarrow{\delta_{G_3(3/0)}}$ sur $\overrightarrow{y_1}$ à partir de $\overrightarrow{\sigma_{G_3(3/0)}}$:

$\overrightarrow{\delta_{G_3(3/0)}} \cdot \overrightarrow{y_1} = \left(\frac{d \overrightarrow{\sigma_{G_3(3/0)}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} \cdot \overrightarrow{y_1}$ Or : $\frac{d \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{dt} = \left(\frac{d \overrightarrow{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \left(\frac{d \overrightarrow{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i} \quad \forall \mathcal{R}_i$

Donc : $\left(\frac{d \overrightarrow{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{d \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{dt} - \overrightarrow{u} \cdot \left(\frac{d \overrightarrow{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_i}$ Soit pour $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\sigma_{G_3(3/0)}}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{y_1}$

$\overrightarrow{\delta_{G_3(3/0)}} \cdot \overrightarrow{y_1} = \frac{d \overrightarrow{\sigma_{G_3(3/0)}} \cdot \overrightarrow{y_1}}{dt} - \overrightarrow{\sigma_{G_3(3/0)}} \cdot \left(\frac{d \overrightarrow{y_1}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0}$

Or : $\overrightarrow{\sigma_{G_3(3/0)}} \cdot \overrightarrow{y_1} = 0$ Donc : $\overrightarrow{\delta_{G_3(3/0)}} \cdot \overrightarrow{y_1} = -\overrightarrow{\sigma_{G_3(3/0)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{y_1}$

$\overrightarrow{\delta_{G_3(3/0)}} \cdot \overrightarrow{y_1} = (E - m_3.e.d).\omega.\overrightarrow{x_1} - (C - m_3.e^2).\omega.\overrightarrow{z_1} \cdot \omega.\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_1} = -(E - m_3.e.d).\omega^2$

Enfin par le théorème de Varignon on a : $\overrightarrow{\delta_P(3/0)} \cdot \overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{\delta_{G_3(3/0)}} \cdot \overrightarrow{y_1} + m_3.\overrightarrow{\alpha_{G_3 \in 3/0}} \wedge \overrightarrow{G_3P} \cdot \overrightarrow{y_1}$

Or : $\overrightarrow{\alpha_{G_3 \in 3/0}} = -(a - e).\omega^2.\overrightarrow{x_1}$ et : $\overrightarrow{G_3P} = e.\overrightarrow{x_1} + d.\overrightarrow{z_1}$

$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} \cdot \overrightarrow{y_1} = -(E - m_3.e.d).\omega^2 - m_3.(a - e).\omega^2.\overrightarrow{x_1} \wedge (e.\overrightarrow{x_1} + d.\overrightarrow{z_1}) \cdot \overrightarrow{y_1}$

$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} \cdot \overrightarrow{y_1} = -(E - m_3.e.d).\omega^2 - m_3.(-d).(a - e).\omega^2 = -(E - m_3.e.d - m_3.a.d + m_3.e.d).\omega^2$

Enfinement on obtient : $\overrightarrow{\delta_P(3/0)} \cdot \overrightarrow{y_1} = -(E - m_3.a.d).\omega^2$

On isole le solide 3, Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :

☞ Action de 1→3 due à la liaison pivot d'axe (P, $\overrightarrow{y_1}$)

☞ Action de 2→3 due à la liaison sphère plan : Force $\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 3}} = -F_a.\overrightarrow{z_1}$ appliquée en M

☞ Action de 4→3 due à la liaison sphère plan de normale (N, $\overrightarrow{x_1}$) : Force $\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}} = X_{43}.\overrightarrow{x_1}$ appliquée en N

L'application du TMD en P en projection sur $\overrightarrow{y_1}$ donne donc :

$\overrightarrow{\delta_P(3/0)} \cdot \overrightarrow{y_1} = 0 + \overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{PN} \wedge \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{y_1}$

$-(E - m_3.a.d).\omega^2.\overrightarrow{y_1} \cdot \overrightarrow{y_1} = -b.\overrightarrow{x_1} \wedge (-F_a.\overrightarrow{z_1}) \cdot \overrightarrow{y_1} + (-f.\overrightarrow{x_1} + c.\overrightarrow{z_1}) \wedge X_{43}.\overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{y_1}$

$-(E - m_3.a.d).\omega^2 = -b.F_a + c.X_{43} \quad X_{43} = \frac{b.F_a - (E - m_3.a.d).\omega^2}{c}$

Soit par le principe des actions mutuelles : $X_{34} = \frac{(E - m_3.a.d).\omega^2 - b.F_a}{c}$

Ensuite, on isole le solide 4, et lui applique un théorème de la résultante dynamique. Nous allons donc calculer la résultante dynamique du solide 4 dans son mouvement par rapport à 0 : $m_4 \cdot \overrightarrow{a_{G4 \in 4/0}}$

Le mouvement de 4 par rapport à 0 est une rotation d'axe $(O, \overrightarrow{z_1})$ donc :

$$\overrightarrow{V_{G4 \in 4/0}} = \overrightarrow{V_{O \in 4/0}} + \overrightarrow{G_4 O} \wedge \overrightarrow{\Omega_{4/0}} = \vec{0} - (r \cdot \overrightarrow{x_1} + h \cdot \overrightarrow{z_1}) \wedge \omega \cdot \overrightarrow{z_1} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{V_{G4 \in 4/0}} = r \cdot \omega \cdot \overrightarrow{y_1}$$

D'autre part par dérivation vectorielle on a :

$$\overrightarrow{a_{G4 \in 4/0}} = \left(\frac{d \overrightarrow{V_{G4 \in 4/0}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d \overrightarrow{V_{G4 \in 4/0}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega_{4/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G4 \in 4/0}}$$

avec : $\overrightarrow{V_{G4 \in 4/0}} = r \cdot \omega \cdot \overrightarrow{y_1}$ Or $\dot{\omega} = 0$ Donc : $\overrightarrow{a_{G4 \in 4/0}} = \vec{0} + \omega \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge r \cdot \omega \cdot \overrightarrow{y_1}$

Soit finalement : $\mathbf{m_4 \cdot \overrightarrow{a_{G3 \in 3/0}} = - m_4 \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \overrightarrow{x_1}}$

On isole le solide 4, Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :

- ☞ Action de 1→4 due à la liaison glissière de direction $\overrightarrow{x_1}$
- ☞ Action de 3→4 due à la liaison sphère plan : Force $\overrightarrow{F_{3 \rightarrow 4}} = X_{34} \cdot \overrightarrow{x_1}$ appliquée en N
- ☞ Action de 5→4 due à la liaison sphère plan de normale $(S, \overrightarrow{x_1})$: Force $\overrightarrow{F_{5 \rightarrow 4}} = F_S \cdot \overrightarrow{x_1}$ appliquée en S

L'application du TRD en P en projection sur $\overrightarrow{x_1}$ donne donc :

$$m_4 \cdot \overrightarrow{a_{G3 \in 3/0}} \cdot \overrightarrow{x_1} = 0 + \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 4}} \cdot \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{F_{5 \rightarrow 4}} \cdot \overrightarrow{x_1}$$

$$- m_4 \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{x_1} = X_{34} \cdot \overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{x_1} + F_S \cdot \overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{x_1}$$

Soit : $F_S = - X_{34} - m_4 \cdot r \cdot \omega^2$ et des résultats précédents : $X_{34} = \frac{(E - m_3 \cdot a \cdot d) \cdot \omega^2 - b \cdot F_a}{c}$

$$F_S = \frac{b \cdot F_a - (E - m_3 \cdot a \cdot d) \cdot \omega^2}{c} - m_4 \cdot r \cdot \omega^2$$

Soit encore : $\mathbf{F_S = \frac{b}{c} \cdot F_a - \frac{(E - m_3 \cdot a \cdot d + m_4 \cdot r \cdot c) \cdot \omega^2}{c}}$

5- Conclusion

Etant donné l'expression de l'effort de serrage : $F_S = \frac{b}{c} \cdot F_a - \frac{(E - m_3 \cdot a \cdot d + m_4 \cdot r \cdot c) \cdot \omega^2}{c}$,

Pour que celui-ci augmente lorsque ω augmente il faut que : $E - m_3 \cdot a \cdot d + m_4 \cdot r \cdot c < 0$

On en déduit qu'il faut que : $\mathbf{E < m_3 \cdot a \cdot d - m_4 \cdot r \cdot c}$