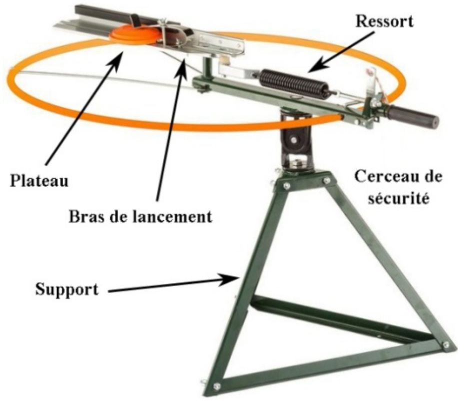
TD4 - Lanceur de Ball-trap

Mise en situation et présentation



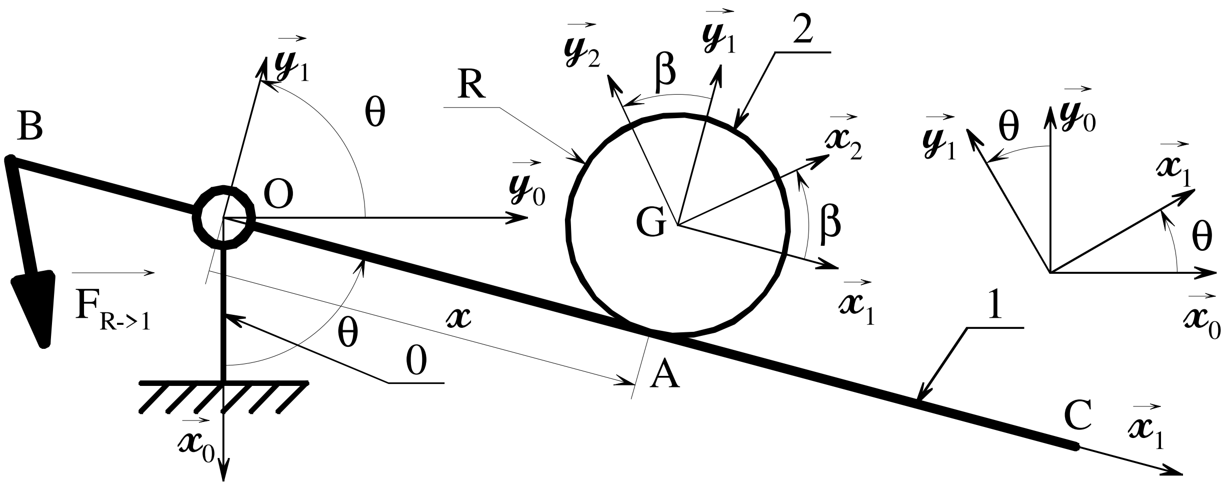
Le ball trap est un loisir consistant à tirer à l'aide d'une carabine à plombs sur des cibles volantes. Ces cibles ou plateaux sont des pièces cylindriques de révolution dont la masse est d'environ 100 g et le diamètre d'environ 10 cm. Ces plateaux sont lancés de manière à ce que leur trajectoire de vol puisse avoir une longueur d'environ 50 m avant de retomber au sol.

Ce lancé est réalisé par un mécanisme mu par un ressort. Nous nous proposons ici d'étudier un l'appareil ci-contre qui est décrit ci-dessous.

Modélisation

Le bras de lancement 1 est en liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$ sur le support 0 qui est fixé au sol. Un cerceau de sécurité lié au support permet de visualiser la zone dans laquelle le bras est en rotation. Le ressort de lancement est tendu entre le bras de lancement et le support. Il exerce donc une force $\overrightarrow{F_{R\to 1}}$ appliquée en B et de support orthogonale à l'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$. Cette force permet d'accélérer le bras 1 dans sa rotation par rapport au support 0. Il agit en force motrice.

Avant de lâcher le bras 1 le plateau 2 est placé sur le bras 1 en appui plan de normale $(G, \overrightarrow{z_1})$ (non représentée sur le schéma ci-dessous) et en contact ponctuel de normale $(A, \overrightarrow{y_1})$. La vitesse de rotation du bras 1 éjecte le plateau 2 vers l'extérieur durant la rotation de 1 par rapport au support 0.



Plateau 2

Rayon R : $\overrightarrow{AG} = R.\overrightarrow{y_1}$ Masse m_2 ; Centre d'inertie G

Matrice d'inertie en G dans la base $\mathcal{B}_2$: $\overline{\overline{I_G(2)}} = \begin{pmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$

Bras 1 : On note C_1 , le moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{z_1})$ du bras 1.

On note $\mathcal{B}_i = (\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i})$ les bases liées aux solides i. Ces bases sont telles que : $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_3}$.

On pose les trois paramètres x, θ et β tels que :

- ☞ $\theta = (\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}})$
- ☞ $\beta = (\widehat{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}})$
- ☞ x tel que $\overrightarrow{OA} = x.\overrightarrow{x_1}$

L'action du ressort est supposée connue et est modélisée par le torseur :

$$\{T_{R\to1}\} = {}_O\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{R\to1}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O(R\to1)} \end{Bmatrix} \qquad \text{avec :} \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}_O(R\to1)}.\overrightarrow{z_1} = C_R(t)$$

Objectif du problème

Lorsque le plateau arrive à l'extrémité du bras il est éjecté et poursuit sa course en vol libre. L'objectif est de déterminer les conditions initiales de ce vol. C'est-à-dire $\alpha_{init} = (\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{V_{G\in 2/0}}})$.la direction et $V_{init} = \|\overrightarrow{V_{G\in 2/0}}\|$ la norme de sa vitesse initiale. Il faut donc déterminer la vitesse du centre de gravité G de ce plateau 2 par rapport au support 0 lorsque le plateau arrive à l'extrémité du plateau de longueur L_1.

1- Analyse du mécanisme et ordonnancement des isolements

Q1- Quel est le degré de mobilité du mécanisme limité aux trois pièces 0, 1 et 2 ? Justifier le choix de trois paramètres cinématiques.

Q2- Déterminer le degré d'hyperstatisme du mécanisme si on considère que toutes les liaisons sont des liaisons parfaites.

Q3- On suppose maintenant qu'il y a un roulement sans glissement au point A du plateau 2 sur le bras de lancement 1. Pour cela on considère que la liaison ponctuelle entre le bras 1 et le plateau 2 se fait avec adhérence. (En revanche la liaison appui plan est toujours considérée comme parfaite). Déterminer dans ce cas les degrés de mobilité et d'hyperstatisme du mécanisme.

Q4- En traduisant la condition de non glissement au point A du plateau 2 sur le bras 1, retrouver la relation liant les dérivées temporelles des paramètres x et β : $\dot\beta = f(\dot x)$.

Q5- Réaliser un graphe de structure du mécanisme. Et donner la forme du torseur sthénique (exprimé en O) de la liaison entre 0 et 1 et celles des deux torseurs sthéniques (exprimés en A) des deux liaisons entre 1 et 2.

Q6- On suppose que l'action mécanique du ressort est entièrement connue (En fait elle est uniquement fonction de l'angle θ). Donner un ordonnancement des isolements permettant de déterminer les deux paramètres cinématique du mécanisme : x et θ. Pour chacun des ces isolements on précisera les solides isolés, théorèmes utilisés, l'axe (et le cas échéant le point) sur lequel l'équation est projetée.

2- Géométrie des masses

Q7- Le plateau 2 étant une pièce homogène cylindrique de révolution, donner une forme simplifiée de la matrice d'inertie de ce solide 2 en G dans la base $\mathcal{B}_2$. Puis dans la base $\mathcal{B}_1$.

3- Mise place des équations différentielles

Q8- En reprenant l'ordonnancement des isolements de la question 6, écrire les deux équations différentielles du mouvement issues du PFD. : Equations faisant intervenir les paramètres cinématiques x et θ (et leurs dérivées temporelles) ainsi que les constantes du système.

Pour cela, on note C_1 le moment d'inertie de 1 par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{z_1})$.

4- Résolution numérique

Dans cette partie on se propose de résoudre les équations différentielles afin de déterminer les conditions initiales du vol du plateau 2. Cette résolution sera faite à l'aide d'un code Python en utilisant la méthode d'Euler.

Le début de ce code comprend les instructions suivantes :

```
import numpy as np
R=0.054      # Rayon du plateau 2 en m
m2=0.102     # Masse du plateau 2 en kg
C2=1.99e-4   # Moment d'inertie /(G,z) du plateau 2 en kg.m²
C1=0.56      # Moment d'inertie /(O,z) du bras 1 en kg.m²
CR=80.0      # Moment /(O,z) de l'action du ressort en N.m
L1=0.6       # Longueur du bras de lancement en m
Mu=0.4       # Coefficient d'adhérence au point A
```

Cela permet d'importer les bibliothèques et de définir les grandeurs physiques nécessaires à la résolution numérique du problème. Ces grandeurs sont donc des variables globales de type « float ».

Q9- Ecrire une fonction « `Acceleration(xi,xpi,thetaip)` » qui prend en argument les valeurs avec les unités SI à un instant t_i des paramètres x, $\dot{x}$ et $\dot{\theta}$ ($x(t_i)$, $\dot{x}(t_i)$ et $\dot{\theta}(t_i)$) , et qui renvoie à ce même instant t_i les valeurs numériques avec les unités SI des accélérations linéaire du plateau : $\ddot{x}(t_i)$ et angulaire du bras : $\ddot{\theta}(t_i)$.

Q10- Ecrire une fonction « `Euler(Tf,X0,n)` » qui prend en argument la durée T_f de simulation le nombre n d'intervalles temporels de calcul et la position initiale X0 du plateau : $x(t = 0)$, et retourne une liste de 7 listes de réels de dimensions n +1 :

- ☞ LT : liste des n+1 dates t_i régulièrement espacées entre 0 et Tf
- ☞ LX : liste des n+1 valeurs de $x(t_i)$
- ☞ LTHETA : liste des n+1 valeurs de $\theta(t_i)$
- ☞ LXP : liste des n+1 valeurs de $\dot{x}(t_i)$
- ☞ LTHETAP : liste des n+1 valeurs de $\dot{\theta}(t_i)$
- ☞ LXPP : liste des n+1 valeurs de $\ddot{x}(t_i)$
- ☞ LTHETAPP : liste des n+1 valeurs de $\ddot{\theta}(t_i)$

Les autres conditions initiales du lancé sont telles que : $\dot{x}(t = 0) = \theta(t = 0) = \dot{\theta}(t = 0) = 0$

Q11- Le bras de lancement a une longueur L_1 = 0,6 m. C'est-à-dire que $\overrightarrow{OC} = L_1.\overrightarrow{x_1}$ où C est le point du bras se situant à l'extrémité de la zone du contact ponctuel entre le bras 1 et le plateau 2.

Ecrire une fonction « `Valeurs_finales_Lance(LT,LX,LTHETA,LXP,LTHETAP)` » qui prend en argument les listes LT, LX, LTHETA,LXP et LTHETAP issues de la résolution des équations différentielles de la fonction Euler, et retourne : La listes des valeurs [t_{init}, $x(t_{init})$, $\theta(t_{init})$,$\dot{x}(t_{init})$,$\dot{\theta}(t_{init})$] avec t_{init} la date à laquelle le point A arrive au delà du point C (première date t pour laquelle $x(t) \geq L_1$)

Q12- Ecrire une fonction « `Conditions_initiales_vol(x,theta,xp,thetap)` » qui prend en argument les valeurs $x(t_{init})$, $\theta(t_{init})$,$\dot{x}(t_{init})$ et $\dot{\theta}(t_{init})$, et qui retourne les conditions initiales du vol du plateau : V_{init} et α_{init} valeurs à la date t_{init} de $V_{init} = \|\overrightarrow{V_{G\in 2/0}}\|$ et $\alpha_{init} = (\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{V_{G\in 2/0}})$.

5- Applications numériques et synthèse

Q13- En utilisant les codes Python, déterminer les conditions initiales du vol en prenant : T_f = 0,25 s et $x(t = 0)$ = 0,1 m et en faisant 1001 points de calculs.

Q14- Une expérimentation avec le lanceur réel donne des conditions initiales du vol différentes de la simulation numérique. En quoi le modèle numérique diverge du modèle réel ? Comment peut-on modifier le modèle numérique afin de le rapprocher du modèle réel ? Quels sont les éléments à ajouter/modifier sur le modèle numérique ?