Lanceur de Ball-trap : Corrigé

(Q1) On a 3 mobilités :

-> Rotation du bras 1 par rapport à 0

-> Rotation du plateau 2 par rapport à 1

-> Deplacement du plateau 2 suivant l'axe $\vec{x_1}$ par rapport à 1

A ces 3 mobilités, correspondent respectivement les 3 paramètres θ, β et x

(Q2) On a 3 pièces et 3 liaisons. D'où le nombre cyclomatique du mécanisme : $\gamma = 1$

On a 1 liaison pivot, 1 liaison appui-plan et 1 liaison ponctuelle. D'où le nombre d'inconnues cinématique : $I_c = 1 + 3 + 5 = 9$

D'où le degre d'hyperstatisme $H = 6\times1 + 3 - 9 = 0$

(Q3) Si il a roulement sans glissement au point A du plateau 2 sur le bras 1. Alors, il n'y a plus que 2 mobilités car le deplacement de 2 par rapport à 1 ($\dot{x}$) est lié a sa rotation. ($\dot{\beta}$)

Il n'y a egalement plus que 4 mobilités dans la liaison entre 2 et 1. D'où le degré d'hyperstatisme

$$H = 6\gamma + M - I_c = 6\times1 + 2 - (1+3+4) = 0$$

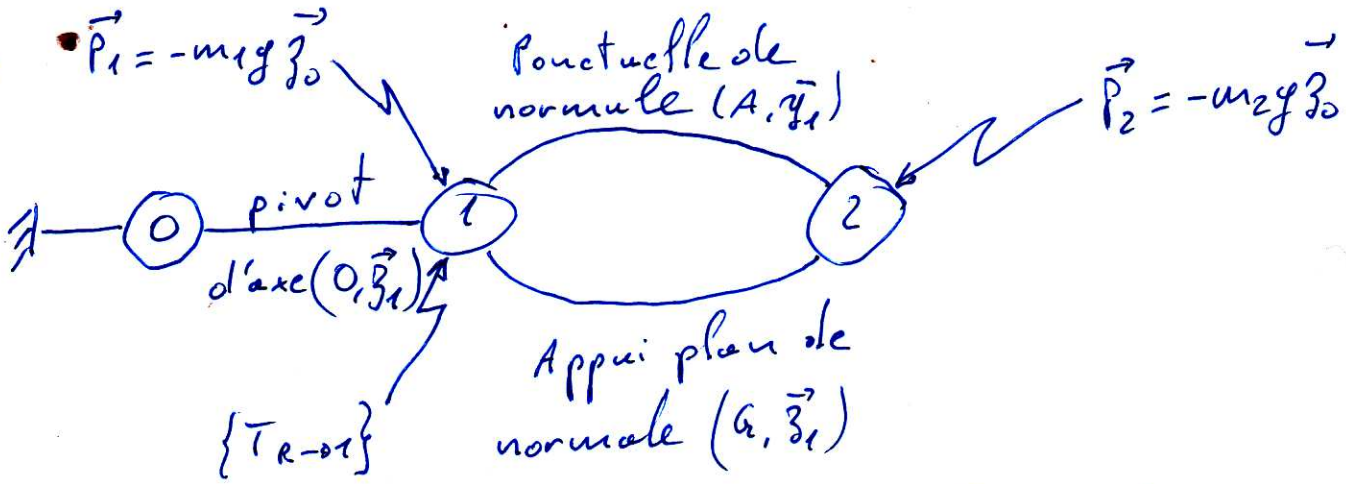
Q4 Roulement sans glissement en A :

$$\vec{V}_{A\in 2/1} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_{G\in 2/1} + \vec{AG}\wedge\vec{\Omega}(2/1) = \vec{0}$$

or $\vec{V}_{G\in 2/1} = \left(\dfrac{d\vec{OG}}{dt}\right)_{R_1} = \dot{x}\,\vec{x}_1$ et $\vec{AG}\wedge\vec{\Omega}(2/1) = R\vec{y}_1\wedge\dot{\beta}\vec{z}_1 = R\dot{\beta}\vec{x}_1$

On en deduit $\dot{x}\,\vec{x}_1 + R\dot{\beta}\,\vec{x}_1 = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\dot{\beta} = \dfrac{-\dot{x}}{R}}$

Q5



$$\{T_{0\to1}\} = \left\{\begin{matrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & \boxed{0} \end{matrix}\right\}_{O,\,R_1} \qquad \{T^{A}_{1\to2}\} = \left\{\begin{matrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{A,\,R_1}$$

avec $|X_{12}| \leq \mu |Y_{12}|$

- R $$\{T^{G}_{1\to2}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{matrix}\right\}_{G,\,R_1} = \left\{\begin{matrix} 0 & L_{12}+RZ_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{matrix}\right\}_{A,\,R_1}$$

$$\Rightarrow \{T^{G}_{1\to2}\} + \{T^{A}_{1\to2}\} = \left\{\begin{matrix} X_{12} & L_{12}+RZ_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & \boxed{0} \end{matrix}\right\}_{A,\,R_1}$$

On remarque les zéros de la composante du moment par rapport aux axes $(O\vec{z}_1)$ pour $\{T_{0\to1}\}$ et $(A\vec{z}_1)$ pour la somme des 2 torseurs $\{T^{A}_{1\to2}\} + \{T^{G}_{1\to2}\}$

Q6 Ordonnancement des isolements :

système isolé	Théorème	Au point	Projection	Inconnues
2	TMD	A	sur $\vec{z}_1$	x et θ
{1,2}	TMD	O	sur $\vec{z}_1$	x et θ

Q7 L'axe de révolution de 2 étant $(G\,\vec{z}_1)$

On en déduit $\overline{\overline{I_G}}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{R_2}$

Le passage du repère R_1 au repère R_2 se faisant par rotation d'axe $(G\,\vec{z}_1)$ on en déduit :

$$\boxed{\overline{\overline{I_G}}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{R_1}}$$

Q8 <u>TMD à 2 au point A en projection sur $\vec{z}_1$</u>

<u>Calculons $\vec{\delta_A}(2/0)$</u>, le moment en A de 2 dans son mouvement par rapport à O

$$\vec{\sigma_G}(2/0) = \overline{\overline{I_G}}(2) \cdot \vec{\Omega}(2/0) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{R_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{R} \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2(\dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{R}) \end{pmatrix}_{R_1}$$

Soit $\vec{\sigma_G}(2/0) = C_2\left(\dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{R}\right)\vec{z}_1$

Sachant que $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_a(2/0)} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_a(2/0)}}{dt}\right)_{R_0} = C_2\left(\ddot{\theta} - \frac{\ddot{x}}{R}\right)\vec{z}_1} \qquad (a)$$

$$\overrightarrow{V_{G\in 2/0}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OG}$$

or $\overrightarrow{OG} = x\,\vec{x}_1 + R\,\vec{y}_1$ Donc

$$\overrightarrow{V_{G\in 2/0}} = \dot{x}\,\vec{x}_1 + \dot{\theta}\,\vec{z}_1 \wedge (x\,\vec{x}_1 + R\,\vec{y}_1)$$

$$\overrightarrow{V_{G\in 2/0}} = (\dot{x} - R\dot{\theta})\,\vec{x}_1 + x\dot{\theta}\,\vec{y}_1$$

$$\overrightarrow{a_{G\in 2/0}} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{G\in 2/0}}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{G\in 2/0}}}{dt}\right)_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in 2/0}}$$

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{G\in 2/0}}}{dt}\right)_{R_1} = (\ddot{x} - R\ddot{\theta})\,\vec{x}_1 + (\dot{x}\dot{\theta} + x\ddot{\theta})\,\vec{y}_1$$

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in 2/0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} - R\dot{\theta} \\ x\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} -x\dot{\theta}^2 \\ \dot{x}\dot{\theta} - R\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

D'où
$$\boxed{\overrightarrow{a_{G\in 2/0}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} - R\ddot{\theta} - x\dot{\theta}^2 \\ x\ddot{\theta} - R\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}} \qquad (b)$$

Relation de Varignon sur le torseur dynamique

$$\overrightarrow{\delta_A(2/0)} = \overrightarrow{\delta_G(2/0)} + m_2\,\overrightarrow{a_{G\in 2/0}} \wedge \overrightarrow{GA}$$

De cette relation de Varignon et des resultats (a) et (b) on en deduit :

$$\overrightarrow{\delta_G(2/0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2\left(\ddot{\theta} - \frac{\ddot{x}}{R}\right) \end{pmatrix}_{R_1} + m_2 \begin{pmatrix} \ddot{x} - R\ddot{\theta} - x\dot{\theta}^2 \\ x\ddot{\theta} - R\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\overrightarrow{\delta_A(2/0)} = \left[C_2\left(\ddot{\theta} - \frac{\ddot{x}}{R}\right) - m_2 R\ddot{x} + m_2 R^2\ddot{\theta} + m_2 x R\dot{\theta}^2\right]\vec{z}_1$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_A(2/0)} = \left[(C_2 + m_2R^2)\ddot{\theta} - \left(\frac{C_2}{R} + m_2R\right)\ddot{x} + m_2 x R\dot{\theta}^2\right]\vec{z}_1}$$

On isole 2. Bilan des actions mecaniques extérieures

- Action due à la liaison ponctuelle $\{T^A_{2\to1}\}$
- Action due à la liaison appui plan $\{T^G_{2\to1}\}$
- Poids du plateau 2 : force $\vec{P_2} = -m_2 g\vec{z}_0$ en G

TMD en A en projection sur $\vec{z}_1$:

$$0 + 0 + \overrightarrow{AG} \wedge (-m_2 g\vec{z}_0)\cdot\vec{z}_1 = \delta_A(2/0)\cdot\vec{z}_1$$

soit $-m_2 g\,\vec{z}_0 \wedge \vec{z}_1 \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{\delta_A(2/0)}\cdot\vec{z}_1$

or $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ Donc $\vec{z}_0 \wedge \vec{z}_1 = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{\delta_A(2/0)}\cdot\vec{z}_1 = 0$

D'où la première equation differentielle :

$$\boxed{\left(\frac{C_2}{R} + m_2R\right)\ddot{x} = (C_2 + m_2R^2)\ddot{\theta} + m_2 x R\dot{\theta}^2} \quad (A)$$

TMD à $\Sigma = \{1,2\}$ au point O en projection sur $\vec{z}_1$

Calculons $\overrightarrow{\delta_O(\Sigma/0)} = \overrightarrow{\delta_O(1/0)} + \overrightarrow{\delta_O(2/0)}$

$$\overrightarrow{\sigma_O(1/0)} = \overline{\overline{I_O(1)}} \cdot \vec{\Omega}_{1/0} = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ & B_1 & -D_1 \\ & & C_1 \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} -E_1\dot\theta \\ -D_1\dot\theta \\ C_1\dot\theta \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\overrightarrow{\delta_O(1/0)} = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_O(1/0)}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_O(1/0)}}{dt}\right)_{R_0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{\sigma_O(1/0)}$$

$$\overrightarrow{\delta_O(1/0)} = \begin{pmatrix} -E_1\ddot\theta \\ -D_1\ddot\theta \\ C_1\ddot\theta \end{pmatrix}_{R_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -E_1\dot\theta \\ -D_1\dot\theta \\ C_1\dot\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_1\ddot\theta + D_1\dot\theta^2 \\ -D_1\ddot\theta - E_1\dot\theta^2 \\ C_1\ddot\theta \end{pmatrix}_{R_1} \quad (c)$$

Par la relation de Varignon

$$\overrightarrow{\delta_O(2/0)} = \overrightarrow{\delta_A(2/0)} + m_2 \vec{a}_{G_2\in 2/0} \wedge \overrightarrow{AO}$$

$$\overrightarrow{\delta_O(2/0)} = \left[(C_2 + m_2R^2)\ddot\theta - \left(\frac{C_2}{R} + m_2R\right)\ddot x + m_2 x R\dot\theta^2\right]\vec{z}_1 + m_2\begin{pmatrix} \ddot x - R\ddot\theta - x\dot\theta^2 \\ x\ddot\theta - R\dot\theta^2 + 2\dot x\dot\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\overrightarrow{\delta_O(2/0)} = \left[C_2 + m_2R^2\ddot\theta - \left(\frac{C_2}{R} + m_2R\right)\ddot x + m_2 xR\dot\theta^2\right]\vec{z}_1 + \left[m_2x^2\ddot\theta - m_2xR\dot\theta^2 + 2m_2x\dot x\dot\theta\right]\vec{z}_1$$

soit :

$$\overrightarrow{\delta_O(2/0)} = \left[\left(C_2 + m_2(R^2+x^2)\right)\ddot\theta - \left(\frac{C_2}{R} + m_2R\right)\ddot x + 2m_2x\dot x\dot\theta\right]\vec{z}_1 \quad (d)$$

Des resultats (c) et (d) on en deduit :

$$\overrightarrow{\delta_0(\Sigma/0)}\cdot\vec{z}_1 = \overrightarrow{\delta_0(1/0)}\cdot\vec{z}_1 + \overrightarrow{\delta_0(2/0)}\cdot\vec{z}_1$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_0(\Sigma/0)}\,\vec{z}_1 = (C_1+C_2+m_2(x^2+R^2)\ddot{\theta} - \left(\frac{C_2}{R}+m_2R\right)\ddot{x} + 2m_2 x\dot{x}\dot{\theta}} \quad (e)$$

<u>On isole $\Sigma = \{1,2\}$.</u> Bilan des actions mecaniques extérieures

- → Action due à la liaison pivot : $\{T_{0\to 1}\}$
- → Action du ressort sur 1 : $\{T_{R\to 1}\}$
- → Poids de 2 : force $\vec{P}_2 = -m_2 g\vec{z}_0$ en G
- → Poids de 1 : force $\vec{P}_1 = -m_1 g\vec{z}_0$ en G_1

<u>TMD en O en projection sur $\vec{z}_1$</u>

$$0 + \overrightarrow{M_0(R\to 1)}\cdot\vec{z}_1 + \overrightarrow{OG_1}\wedge(-m_1 g\vec{z}_0)\cdot\vec{z}_1 + \overrightarrow{OG}\wedge(-m_2 g\vec{z}_0)\cdot\vec{z}_1 = \overrightarrow{\delta_0(\Sigma/0)}\cdot\vec{z}_1$$

$$C_r(t) - m_1 g\vec{z}_0\wedge\vec{z}_1\cdot\overrightarrow{OG_1} - m_2 g\vec{z}_0\wedge\vec{z}_1\cdot\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{\delta_0(\Sigma/0)}\cdot\vec{z}_1$$

sachant que $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ De ce resultat et du resultat (e) on a :

$$C_r(t) = (C_1+C_2+m_2(x^2+R^2)\ddot{\theta} - \left(\frac{C_2}{R}+m_2R\right)\ddot{x} - 2m_2 x\dot{x}\dot{\theta}$$

D'où la deuxième equation differentielle

$$\boxed{\left(\frac{C_2}{R}+m_2R\right)\ddot{x} = C_1+C_2+m_2(x^2+R^2)\ddot{\theta} - C_r(t) + 2m_2 x\dot{x}\dot{\theta}}$$

(B)

Des résultat (A) et (B) on obtient :

$$(B)-(A) \Rightarrow \quad 0 = (C_1 + m_2 x^2)\ddot{\theta} - C_r(t) + m_2 x \dot{\theta}(2\dot{x} - R\dot{\theta})$$

Soit :

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{C_r(t) - m_2 x \dot{\theta}(2\dot{x} - R\dot{\theta})}{C_1 + m_2 x^2}} \qquad (1)$$

et :

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{R(C_2 + m_2 R^2)\ddot{\theta} + m_2 R^2 x \dot{\theta}^2}{C_2 + m_2 R^2}} \qquad (2)$$

```
###  Importation des bibliothèques et définition des constantes  ###

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

R=0.054     # en m
m2=0.102    # en kg
C2=1.99e-4  # en kg.m²
C1=0.56     # en kg.m²
CR=80       # en N.m
L1=0.6      # en m
Mu=0.4


###  Fonctions  ###

def Accelerations(xi,xpi,thetapi):
    thetappi=(CR+m2*xi*R*thetapi**2-2*m2*xi*xpi*thetapi)/(C1+m2*xi**2)
    xppi=R*thetappi+m2*R**2*xi*thetapi**2/(C2+m2*R**2)
    return xppi,thetappi



def Euler(Tf,X0,n):
    h=Tf/n                              # Détermination du pas de calcul
    LT=np.linspace(0,Tf,n+1)            # Liste des temps
    LXPP=np.zeros(n+1)                  # Initialisation de la liste des accélérations linéaires
    LXP=np.zeros(n+1)                   # Initialisation de la liste des vitesses linéaires
    LX=np.zeros(n+1)                    # Initialisation de la liste des positions linéaires
    LTHETAPP=np.zeros(n+1)              # Initialisation de la liste des accélérations angulaires
    LTHETAP=np.zeros(n+1)               # Initialisation de la liste des vitesses angulaires
    LTHETA=np.zeros(n+1)                # Initialisation de la liste des positions angulaires
    LX[0],LXP[0]=X0,0
    LTHETA[0],LTHETAP[0]=0,0                                    # Conditions intitiales linéaires
    LXPP[0],LTHETAPP[0]=Accelerations(LX[0],LXP[0],LTHETAP[0])      # Conditions Initiales angulaires
    for i in range(n):
        LX[i+1]=LX[i]+h*LXP[i]                                              # Position linéaire suivante
        LXP[i+1]=LXP[i]+h*LXPP[i]                                           # Vitesse linéaire suivante
        LTHETA[i+1]=LTHETA[i]+h*LTHETAP[i]                                  # Position angulaire suivante
        LTHETAP[i+1]=LTHETAP[i]+h*LTHETAPP[i]                               # Vitesse angulaire suivante
        LXPP[i+1],LTHETAPP[i+1]=Accelerations(LX[i+1],LXP[i+1],LTHETAP[i+1]) # Accélérations suivantes
```

```
    return [LT,LX,LTHETA,LXP,LTHETAP,LXPP,LTHETAPP]

def Valeurs_finales_Lance(T,X,THETA,XP,THETAP):
    i=0
    for i in range(len(X)):
        if X[i]>=L1:
            return [T[i],X[i],THETA[i],XP[i],THETAP[i]]
    return [0,0,0,0,0]

def Conditions_initiales_vol(x,theta,xp,thetap):
    if x>0 :
        Vinit=np.sqrt((x*thetap)**2+(xp-R*thetap)**2)
        angle_x1_VG=np.arctan(x*thetap/(xp-R*thetap))
        alphainit=angle_x1_VG+theta
        return alphainit,Vinit
    else :
        return  0,0


###  Programme principal  ###


SolEuler=Euler(0.2,0.15,1000)                                  # Tf=0,2 s ; Xo = 0,15 m ; n = 1000
ValFin=Valeurs_finales_Lance(SolEuler[0],SolEuler[1],SolEuler[2],SolEuler[3],SolEuler[4])
print("Valeurs finales du lancé :")
print("    Position linéaire : x(tinit) =",ValFin[1],"m")
print("    Position angulaire : theta(tinit) =",ValFin[2],"rad")
print("    Vitesse linéaire : d x(tinit)/dt =",ValFin[3],"m/s")
print("    Vitesse angulaire : d theta(tinit)/dt =",ValFin[4],"rad/s")
Alpha,V=Conditions_initiales_vol(ValFin[1],ValFin[2],ValFin[3],ValFin[4])
print("Conditions initiales du Vol :")
print("    Vitesse initiale : V =",V,"m/s")
print("    Direction : alpha =",Alpha*180/3.1416,"degré")
print("    Date :",ValFin[0],"s")
```