Jeux d'accessibilité – Stratégies gagnantes

1- Définitions

Jeux d'accessibilité à somme nulle – Graphe et Arène

Un jeu d'accessibilité est un jeu à deux joueurs, à information complète et parfaite. Il n'y a pas de partie cachée du jeu, les deux joueurs savent parfaitement la position du jeu. Dans ce type de jeux il n'y a donc pas de place laissée au hasard. Le jeu est dit à somme nulle, si quelque soit la partie un joueur gagne et l'autre perd.

Ce type de jeux peut se représenter par un graphe (S,A) appelé arène du jeu :

- ☞ Les sommets (ensemble S) sont les différentes positions dans lesquelles le jeu peut être au cours de la partie.
- ☞ Les arrêtes (ensemble A) sont les différentes transitions possibles entre les sommets. Ces arêtes ne sont pas pondérées. La transition est possible ou ne l'est pas. En revanche ces arêtes sont orientées. On ne peut pas forcément revenir en arrière. Sauf règles du jeu contraire, auquel cas on peut utiliser une seconde arête orientée dans le sens inverse.

Stratégie et position gagnante

Une stratégie gagnante est une fonction qui a chaque sommet contrôlé par un joueur associe un successeur et donc une transition (une arête A du graphe) permettant d'atteindre la victoire quelque soit le coup de l'adversaire.

Une position (un sommet) est gagnante pour un joueur s'il existe une stratégie gagnante partant de cette position (de ce sommet).

Noyau

Appelons S' un sous ensemble des sommets S du graphe (arène) du jeu. Ce sous ensemble S' est :

- ☞ Stable si tout sommet de S' n'a aucun successeur dans S'.
- ☞ Absorbant si tout sommet n'appartenant pas à S' possède au moins un successeur dans S'.

Un sous ensemble N stable et absorbant est appelé un noyau du graphe (S,A).

2- Trouver une stratégie gagnante

Principe de la définition d'une stratégie gagnante

Un sommet S_f qui n'a pas de successeur est une position qui ne permet pas de jouer à nouveau. Donc le joueur qui se retrouve dans une telle position (sur ce sommet) à perdu car le jeu est fini. Donc un sommet sans successeur est une position perdante.

De plus, par définition si cette position perdante appartient à un sous ensemble stable. Alors toutes les autres positions S_{prec} qui mènent à cette position S_f ne seront pas dans un noyau contenant S_f.

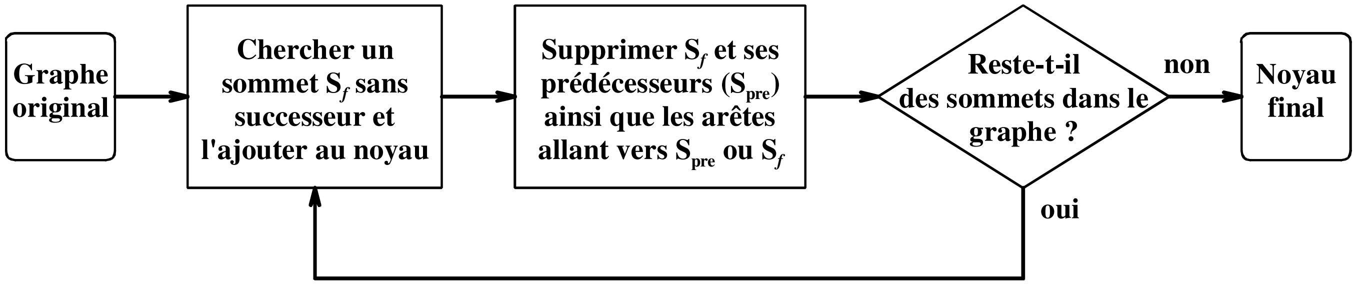
En retirant S_f et toutes ces positions précédentes S_{pre} et en trouvant un autre sommet sans successeur on aura un nouveau sommet du sous ensemble stable. En procédant ainsi de suite (retirer un sommet sans successeur et tout ses prédécesseurs) on arrive à trouver un noyau du graphe.

Si un joueur X se trouve sur un sommet de ce noyau alors ce noyau étant stable il doit conduire le joueur Y hors du noyau. Ce noyau étant absorbant (quelque soit le coup du joueur X) le joueur Y pourra ramener le joueur X dans le noyau. En adoptant une stratégie consistant à toujours maintenir le joueur X dans le noyau, le joueur Y pourra maintenir le joueur X dans le noyau jusqu'à ce que ce dernier atteigne une position finale perdante.

Une stratégie gagnante est donc une stratégie qui pour tout sommet (position) hors du noyau renvoie une transition (un sommet suivant) menant dans le noyau.

Construction du noyau

Conformément à ce qui a été vu au paragraphe précédent on peut construire le noyau avec l'algorithme suivant :



Construction d'une stratégie gagnante

Pour obtenir <u>une</u> stratégie gagnante à partir d'un graphe on peut utiliser l'algorithme suivant :

On recherche le noyau du graphe (voir algorithme ci-dessus)

Pour tous les sommets S_G du graphe n'appartenant pas au noyau :

On cherche une arête menant à un des sommets S_P du noyau (Il peut y en avoir plusieurs)

On ajoute à la stratégie le couple $S_G \rightarrow S_P$

3- Exemple du jeu des bâtonnets

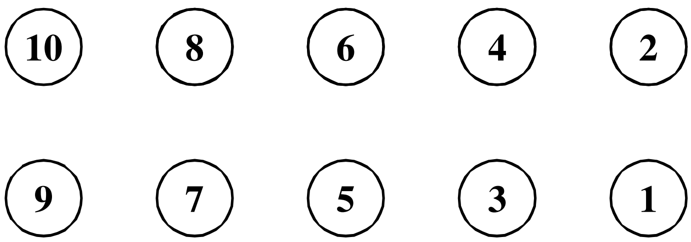
Règle du jeu :

Ce jeu se joue à deux joueurs avec n bâtonnets posés sur le plan de jeu. Les deux joueurs jouent alternativement et retirent à chacun de leur tour de 1 à k bâtonnets du plan de jeux. (n et k sont des entiers avec k < n). Le joueur qui retire le dernier bâtonnet a perdu.

<u>Premier cas : n = 10 et k = 2</u>

Construire les arêtes de ce graphe, et déterminer le noyau. En déduire une stratégie gagnante.

<u>Graphe</u>



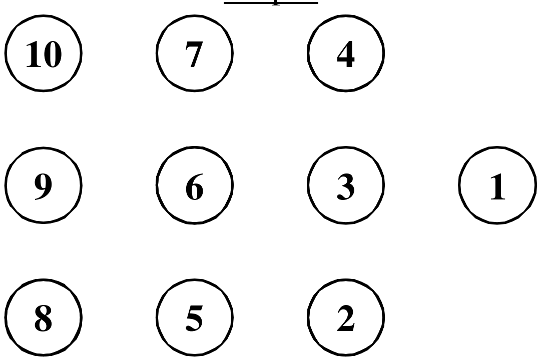
<u>Noyau</u>

<u>Stratégie gagnante</u>

<u>Deuxième cas : n = 10 et k = 3</u>

Construire les arêtes de ce graphe. Et déterminer le noyau. En déduire une stratégie gagnante.

<u>Graphe</u>



<u>Noyau</u>

<u>Stratégie gagnante</u>

<u>Conclusion :</u> Dans ces deux cas de figure, est-il préférable de commencer à jouer ?