

PSI 2025-2026 DS N°6 – Concours Blanc Corrigé
Droïdes autonomes : Centrale PSI 2024

Question 1.

Pour prendre en compte tous les segments il faut que $L \leq \|P_i P_{i+1}\|$ Or l'exigence 1.1.2 impose des segments d'une longueur minimale de 1 m.

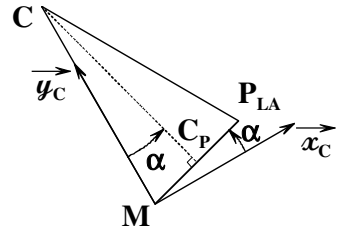
Donc : **$L_{\max} = 1 \text{ m}$, permet la prise en compte de tous les segments.**

Pour élaborer la consigne le point P_{LA} doit appartenir au segment $[P_i P_{i+1}]$. D'où il faut $L \geq \|\overrightarrow{MP_{proj}}\|$ norme qui est l'écart du droïde à sa trajectoire. Or l'exigence 1.1.2 impose un écart maximal de $\pm 5 \text{ cm}$.

Donc : **$L_{\min} = 0,05 \text{ m}$, permet d'élaborer la consigne ω_{cons} .**

Question 2.

Soit C_P le projeté orthogonal de C sur (MP_{LA}) , le triangle MCP_{LA} étant isocèle en C $\|\overrightarrow{MC_P}\| = \frac{\|\overrightarrow{MP_{LA}}\|}{2} = \frac{L}{2}$ et $\widehat{MCC_P} = \frac{\widehat{MCP_{LA}}}{2}$.



D'autre part $\overrightarrow{CC_P} \perp \overrightarrow{MP_{LA}}$ et $\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{x_C}$ avec $\alpha = (\overrightarrow{x_C}, \overrightarrow{MP_{LA}})$ Donc $\widehat{MCC_P} = \alpha$. On en déduit : **$\widehat{MCP_{LA}} = 2.\alpha$.**

On a vu que dans le triangle $CC_P M$ rectangle en C_P : $\|\overrightarrow{MC_P}\| = \frac{L}{2}$ et $\widehat{MCC_P} = \alpha$.

Donc $\|\overrightarrow{MC_P}\| = \|\overrightarrow{CM}\| \cdot \sin \alpha = \rho \cdot \sin \alpha = \frac{L}{2}$. D'où : $L = 2.\rho \cdot \sin \alpha$

Or on sait que $y_{LA} = L \cdot \sin \alpha$ Soit : $y_{LA} = 2.\rho \cdot \sin^2 \alpha$

Enfin dans le triangle $CC_P M$ rectangle en C_P on a : $\sin \alpha = \frac{L/2}{\rho} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{L^2}{4.\rho^2}$

On obtient donc : $y_{LA} = 2.\rho \cdot \frac{L^2}{4.\rho^2} \Rightarrow \rho = \frac{L^2}{2.y_{LA}}$

Question 3.

$\overrightarrow{MP_{proj}} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP_{proj}} = -x \cdot \overrightarrow{x} - y \cdot \overrightarrow{y} + x \cdot \overrightarrow{x}$

$\overrightarrow{MP_{proj}} = -y \cdot \overrightarrow{y}$

$\overrightarrow{MP_{LA}} = \overrightarrow{MP_{proj}} + P_{proj} \overrightarrow{P_{LA}} = -y \cdot \overrightarrow{y} + \sqrt{L^2 - \overrightarrow{MP_{proj}}^2} \cdot \overrightarrow{x}$

$\overrightarrow{MP_{LA}} = -y \cdot \overrightarrow{y} + \sqrt{L^2 - y^2} \cdot \overrightarrow{x}$

$y_{LA} = \overrightarrow{MP_{LA}} \cdot \overrightarrow{y_C} = -y \cdot \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y_C} + \sqrt{L^2 - y^2} \cdot \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y_C} = -y \cdot \cos \theta + \sqrt{L^2 - y^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

$y_{LA} = -y \cdot \cos \theta - \sqrt{L^2 - y^2} \cdot \sin \theta$ Donc pour $\theta \ll 1$

$y_{LA} = -y - \sqrt{L^2 - y^2} \cdot \theta$

Question 4.

$$\left. \begin{array}{l} \text{I1 : } \omega_{\text{cons}} = \frac{v_0}{\rho} \\ \text{I2 : } \rho = \frac{L^2}{2.y_{LA}} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_{\text{cons}} = \frac{2.y_{LA}}{L^2} \cdot v_0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{I3 : } y_{LA} = -y - L.\theta \\ \omega_{\text{cons}} = \frac{2.y_{LA}}{L^2} \cdot v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_{\text{cons}} = \frac{2.v_0}{L^2} \cdot (-y - L.\theta)$$

Soit dans le domaine de Laplace : $\Omega_{\text{cons}}(p) = \frac{2.v_0}{L^2} \cdot (-Y(p) - L.\Theta(p))$

Du schéma bloc de la figure 3 on en déduit les gains : **$K_1 = \frac{2.v_0}{L^2}$ $K_2 = L$**

I4 : $\dot{y}(t) = v_0.\theta(t) \Rightarrow \mathcal{L}[\dot{y}(t)] = v_0.\Theta(p)$

Or les conditions initiale de $y(t)$ n'étant pas nulle ($y(0) = y_0$) $\Rightarrow \mathcal{L}[\dot{y}(t)] = p.Y(p) - y_0$

On a donc : $p.Y(p) - y_0 = v_0.\Theta(p)$ Soit : $Y(p) = \frac{y_0}{p} + \frac{v_0}{p}.\Theta(p)$ Donc : **$H_2(p) = \frac{v_0}{p}$**

Question 5.

Du schéma bloc de la figure 4 :
$$H_{\Delta}(p) = \frac{\frac{K_{s1}}{p \cdot (1 + \tau_1 \cdot p)}}{1 + \frac{K_{s1}}{p \cdot (1 + \tau_1 \cdot p)}} \quad \boxed{H_{\Delta}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{s1}} \cdot p + \frac{\tau_1}{K_{s1}} \cdot p^2}}$$

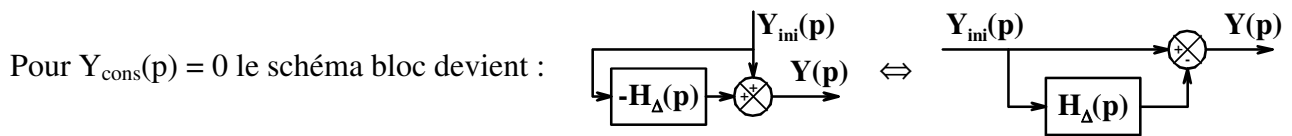
Fonction de transfert du second ordre avec :

☞ Un gain statique : $K_{\Delta} = 1$ ☞ Une pulsation propre : $\omega_{0\Delta} = \sqrt{\frac{K_{s1}}{\tau_1}} \Rightarrow \boxed{\omega_{0\Delta} = \frac{v_0}{L} \cdot \sqrt{2}}$

☞ Un facteur d'amortissement : $\xi_{\Delta} = \frac{\omega_{0\Delta}}{2} \cdot \frac{1}{K_{s1}} = \frac{v_0 \cdot \sqrt{2}}{L \cdot 2} \cdot \frac{L}{v_0} \Rightarrow \boxed{\xi_{\Delta} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Le facteur d'amortissement $\xi_{\Delta} \approx 0,71$ est proche de 0,69 et supérieur à cette valeur. Donc la réponse à un échelon sera rapide et présentera un faible dépassement de la valeur finale (< 5%). Enfin $K_{\Delta} = 1$ donc le système est précis : $\Delta y(\infty) = \Delta y_{cons}$

Question 6.



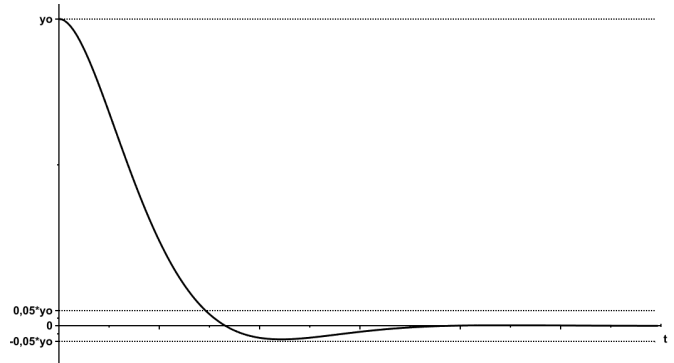
D'où la fonction de transfert :
$$\boxed{\frac{Y(p)}{Y_{ini}(p)} = 1 - H_{\Delta}(p)}$$

Donc : $Y(p) = Y_{ini}(p) - Y_{ini}(p) \cdot H_{\Delta}(p)$

$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = \mathcal{L}^{-1}[Y_{ini}(p)] - \mathcal{L}^{-1}[Y_{ini}(p) \cdot H_{\Delta}(p)]$

Soit : $y(t) = y_0 - \mathcal{L}^{-1}[Y_{ini}(p) \cdot H_{\Delta}(p)]$

Or $\mathcal{L}^{-1}[Y_{ini}(p) \cdot H_{\Delta}(p)]$ est la réponse temporelle d'un second ordre de gain statique unitaire et de facteur d'amortissement $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ à un échelon y_0 . D'où la réponse temporelle ci-contre :



Caractéristique de cette réponse temporelle :

Stabilité	$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,69$ On a donc un léger dépassement de la valeur finale inférieur à 5%
Précision	Gain statique unitaire. Le système est donc précis $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$
Rapidité	$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,69$ Donc le système est rapide : $t_{5\%} \cdot \omega_{0\Delta} \approx 3$ $t_{5\%} \approx \frac{3}{\omega_{0\Delta}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{L}{v_0}$

La rapidité dépend de L. Plus L est petit plus $t_{5\%}$ est petit donc plus le système est rapide.

Question 7.

Supposons : $M_0 = \begin{pmatrix} m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ 0 & 0 & -1 \\ m_{04} & m_{05} & 0 \end{pmatrix}$ et : $M_1 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ m_{14} & m_{15} & m_{16} \end{pmatrix}$

Alors I6 $\Rightarrow \begin{cases} m_{11} \cdot \dot{x}(t) + m_{12} \cdot \dot{y}(t) + m_{13} \cdot \ddot{y}(t) + m_{01} \cdot x(t) + m_{02} \cdot y(t) + m_{03} \cdot \dot{y}(t) = v_0 \\ y(t) - \dot{y}(t) = 0 \\ m_{14} \cdot \dot{x}(t) + m_{15} \cdot \dot{y}(t) + m_{16} \cdot \ddot{y}(t) + m_{04} \cdot x(t) + m_{05} \cdot y(t) = 0 \end{cases}$

De I5 on en conclue : $m_{11} = 1$ $m_{12} = m_{13} = m_{01} = m_{02} = m_{03} = 0$
 $m_{15} = C_2$ $m_{16} = C_1$ $m_{05} = 1$ $m_{14} = m_{04} = 0$

D'où : $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et : $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & C_2 & C_1 \end{pmatrix}$

D'où les lignes du code Python : 22 : `M1 = np.array([[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, C2, C1]])`
 24 : `M0 = np.array([[0, 0, 0], [0, 0, -1], [0, 1, 0]])`

Question 8.

$I_6 \Rightarrow \dot{X}(t) = M1^{-1} \cdot (F - M0 \cdot X(t))$ Euler : $X(t + Te) = X(t) + Te \cdot \dot{X}(t) \Leftrightarrow \dot{X}(t) = \frac{X(t + Te) - X(t)}{Te}$

D'où la ligne 40 du code : `X[:, i+1] = invM1.dot(F-M0.dot(X[:, i]))*Te + X[:, i]`

Question 9.

Pour $L = 0,5$ m, le résultat de simulation obtenu avec le modèle linéaire est très proche du résultat obtenu avec l'algorithme « pure poursuit ». L'écart maximal est d'environ 0,02 cm lorsque $y(t) \approx 4$ cm. Pour $L = 0,05$ m, le résultat de simulation avec le modèle linéaire surestime l'écart par rapport à la trajectoire comparé au résultat de simulation obtenu avec l'algorithme « pure poursuit ». Mais uniquement au départ. Lorsque $y(t)$ est proche de 0 les deux modèles sont très proches.

Il est donc pertinent d'utiliser le modèle linéaire pour choisir le paramètre L

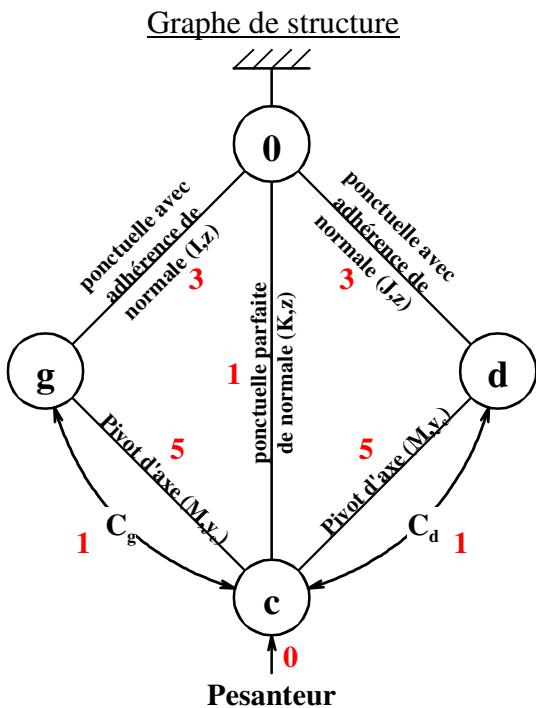
Question 10.

La condition de linéarisation impose $L > 10 \cdot |y|_{MAXI}$ et le cahier des charges demande $|y|_{MAXI} = 5$ cm. Il faut donc $L \geq 0,5$ m. De plus, la distance à convergence $t_{5\% \cdot v_0} = \frac{3L}{\sqrt{2}} \left(\text{car question 6 : } t_{5\% \cdot v_0} \approx \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{L}{v_0} \right)$ doit être la plus faible possible donc on choisit donc : **$L = 0,5$ m**

Question 11.

On a deux paramètres cinématiques : v_0 et ω pour avoir un modèle reliant ces variables aux couples C_g et C_d il nous faut donc 2 équations. Or un théorème de l'énergie cinétique ne permettra d'obtenir qu'une seule équation. Donc une approche énergétique est insuffisante.

Question 12.



On a représenté en rouge sur ce graphe de structure le nombre d'inconnue sthéniques.

Remarque (Non demandé dans le sujet) :

Soit au total 19 inconnues sthénique : 17 inconnues de liaisons et les deux couples C_d et C_g qui pilotent les deux mobilités du mécanisme.

Et 18 équations sthéniques car trois solides hors bâti.

Donc le système est hyperstatique de degré 1. Cela vient du fait que les deux liaisons ponctuelles de normales (I, z) et (J, z) du fait qu'elles sont avec adhérence sont assimilables à des liaisons **ponctuelles rotules**.

En remplaçant une seule liaison rotule par une liaison linéaire annulaire d'axe (I, y_c) ou (J, y_c) le système devient alors isostatique.

Il faut donc pour calculer toutes les inconnues annuler une des deux composantes de la résultante suivant \vec{y}_c : $Y_d = 0$ ou $Y_g = 0$ ou poser $Y_g = Y_d$ ou faire une hypothèse d'équi-adhérence des deux roues : $\frac{Y_g}{N_g} = \frac{Y_d}{N_d}$

Quoiqu'il en soit cela ne nous intéresse pas dans notre problème où on souhaite uniquement établir le lien entre les les paramètres cinématiques v_0 et ω et les couples C_d et C_d .

Remarque (Non demandé dans le sujet) :

Les moments des actions de $0 \rightarrow g$ et $0 \rightarrow d$ en M projetés sur l'axe (M, \vec{y}_c) ne dépendent que des inconnues sthéniques X_d et X_g car les axes (I, \vec{z}) et (J, \vec{z}) sont sécants à l'axe (M, \vec{y}_c) et d'autre part les axes (I, \vec{y}_c) et (J, \vec{y}_c) sont parallèle à l'axe (M, \vec{y}_c) ce qui explique qu'on commence par isoler les roues g et d pour appliquer un TMD en M projeté sur \vec{y}_c .

Ensuite de la même manière, les moments des actions de $0 \rightarrow g$ et $0 \rightarrow d$ en M projetés sur l'axe (M, \vec{z}) ne dépendent que des inconnues sthéniques X_d et X_g car les axes (I, \vec{y}_c) et (J, \vec{y}_c) sont sécants à l'axe (M, \vec{z}) et d'autre part les axes (I, \vec{z}) et (J, \vec{z}) sont parallèle à l'axe (M, \vec{z}) . Donc à la question 15 nous isolerons l'ensemble $\{C,d,g\}$ pour appliquer un TMD en M projeté sur \vec{z} puis un TRD en projection sur \vec{x}_c qui ne fait également utiliser que les inconnues sthénique X_g et X_d .

Ainsi nous aurons un système de 4 équations à 4 inconnues $C_d, C_g, X_d,$ et X_g permettant d'établir le lien en les paramètres deux paramètres cinématiques ω et v_0 et les des paramètres sthéniques C_d et C_g .

Isolons la roue gauche : BAME

☞ Action de $0 \rightarrow g$: $T_{0 \rightarrow g}$ de résultante $\vec{R}_{0 \rightarrow g} = X_g \cdot \vec{x}_c + Y_g \cdot \vec{y}_c + Z_g \cdot \vec{z}$ appliquée en I .

☞ Action de $c \rightarrow g$ due à la liaison à la liaison pivot d'axe (M, \vec{y}_c)

☞ Action de la motorisation de la roue gauche sur la roue gauche : $\vec{M}_{M,c \rightarrow g} \cdot \vec{y}_c = C_g$

L'application du TMD en M en projection sur \vec{y}_c donne l'équation :

$$\vec{MI} \wedge \vec{R}_{0 \rightarrow g} \cdot \vec{y}_c + 0 + C_g = 0 \quad (\text{l'inertie de la roue étant négligée})$$

Par permutation circulaire $\Rightarrow \vec{y}_c \wedge \vec{MI} \cdot \vec{R}_{0 \rightarrow g} + 0 + C_g = 0$
 $\Rightarrow \vec{y}_c \wedge (\ell \cdot \vec{y}_c - R \cdot \vec{z}_c) \cdot (X_g \cdot \vec{x}_c + Y_g \cdot \vec{y}_c + Z_g \cdot \vec{z}) = -C_g$
 $\Rightarrow -R \cdot \vec{x}_c \cdot (X_g \cdot \vec{x}_c + Y_g \cdot \vec{y}_c + Z_g \cdot \vec{z}) = -C_g$

Soit finalement : $\Rightarrow \mathbf{R \cdot X_g = C_g}$

Un raisonnement identique sur la roue droite permet d'obtenir un résultat similaire :

$$\mathbf{R \cdot X_d = C_d}$$

Question 13.

Le chargement du droïde est aléatoire. Cependant comme la matrice d'inertie $I_{G,c}$ du corps c présente deux produits d'inertie nul (Sur les lignes et colonnes \vec{y}_c) on a sans doute fait l'hypothèse que :

Le corps a un plan de symétrie $(G, \vec{x}_c, \vec{z}_c)$

Question 14.

G étant le centre d'inertie du corps c : $\vec{\sigma}_{G,c/\mathcal{R}} = I_{G,c} \cdot \vec{\Omega}_{c/\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_c} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_c} = \begin{pmatrix} -E \cdot \dot{\theta} \\ 0 \\ C \cdot \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_c}$

Soit finalement : $\vec{\sigma}_{G,c/\mathcal{R}} = -E \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_c + C \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}$

G étant le centre d'inertie du corps c : $\vec{\delta}_{G,c/\mathcal{R}} = \left(\frac{d \vec{\sigma}_{G,c/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d \vec{\sigma}_{G,c/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_c} + \vec{\Omega}_{c/\mathcal{R}} \wedge \vec{\sigma}_{G,c/\mathcal{R}}$
 $\vec{\delta}_{G,c/\mathcal{R}} = -E \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{x}_c + C \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z} + \dot{\theta} \cdot \vec{z} \wedge (-E \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_c + C \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z})$

Soit finalement : $\vec{\delta}_{G,c/\mathcal{R}} = -E \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{x}_c - E \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{y}_c + C \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}$

Par la relation de Varignon : $\vec{V}_{G,c/\mathcal{R}} = \vec{V}_{M,c/\mathcal{R}} + \vec{GM} \wedge \vec{\Omega}_{c/\mathcal{R}} = v_0 \cdot \vec{x}_c + (a \cdot \vec{x}_c + h \cdot \vec{z}_c) \wedge \dot{\theta} \cdot \vec{z}$

Soit finalement : $\Rightarrow \vec{V}_{G,c/\mathcal{R}} = v_0 \cdot \vec{x}_c - a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_c$

Par dérivation vectorielle : $\vec{\Gamma}_{G,c/\mathcal{R}} = \left(\frac{d \vec{V}_{G,c/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d \vec{V}_{G,c/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_c} + \vec{\Omega}_{c/\mathcal{R}} \wedge \vec{V}_{G,c/\mathcal{R}}$
 $\vec{\Gamma}_{G,c/\mathcal{R}} = \dot{v}_0 \cdot \vec{x}_c - a \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{y}_c + \dot{\theta} \cdot \vec{z}_c \wedge (v_0 \cdot \vec{x}_c - a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_c)$

Soit finalement : $\Rightarrow \vec{\Gamma}_{G,c/\mathcal{R}} = (\dot{v}_0 + a \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \vec{x}_c + (v_0 \cdot \dot{\theta} - a \cdot \ddot{\theta}) \cdot \vec{y}_c$

Question 15.

Isolons l'ensemble du droïde : {c,g,d} : BAME

- ☞ Action de 0 → g : $T_{0 \rightarrow g}$ de résultante $\vec{R}_{0 \rightarrow g} = X_g \cdot \vec{x}_c + Y_g \cdot \vec{y}_c + Z_g \cdot \vec{z}_c$ appliquée en I.
- ☞ Action de 0 → d : $T_{0 \rightarrow d}$ de résultante $\vec{R}_{0 \rightarrow d} = X_d \cdot \vec{x}_c + Y_d \cdot \vec{y}_c + Z_d \cdot \vec{z}_c$ appliquée en J.
- ☞ Action de 0 → c : $T_{0 \rightarrow c}$ de résultante $\vec{R}_{0 \rightarrow c} = N_K \cdot \vec{z}$ appliquée en K.
- ☞ Action de la pesanteur sur le droïde de résultante $\vec{R}_{pes \rightarrow c} = -m \cdot g \cdot \vec{z}_c$ appliquée en G.

Conformément à la remarque faite à la question 12 nous allons appliquer à ce système :

Un TRD en projection sur \vec{x}_c
Un TMD en M en projection sur \vec{z}_c

Question 16.

Le TRD en projection sur \vec{x}_c donne l'équation :

$$\vec{R}_{0 \rightarrow g} \cdot \vec{x}_c + \vec{R}_{0 \rightarrow d} \cdot \vec{x}_c + \vec{R}_{0 \rightarrow c} \cdot \vec{x}_c + \vec{R}_{pes \rightarrow c} \cdot \vec{x}_c = m \cdot \overline{\Gamma}_{G,c/\mathcal{R}}$$

Soit avec les résultats précédents on obtient : $X_g + X_d = m \cdot (\dot{v}_0 + a \cdot \dot{\theta}^2)$

Sachant que $\dot{\theta} = \omega$ et des résultat de la question 12 : $\frac{1}{R} \cdot (C_g + C_d) = m \cdot (\dot{v}_0 + a \cdot \omega^2)$ (a)

Le TMD en M en projection sur \vec{z}_c donne l'équation :

$$\overline{MI} \wedge \vec{R}_{0 \rightarrow g} \cdot \vec{z}_c + \overline{MJ} \wedge \vec{R}_{0 \rightarrow d} \cdot \vec{z}_c + \overline{MK} \wedge \vec{R}_{0 \rightarrow c} \cdot \vec{z}_c + \overline{MG} \wedge \vec{R}_{pes \rightarrow c} \cdot \vec{z}_c = \delta_{M,c/\mathcal{R}} \cdot \vec{z}_c$$

Par permutation circulaire :

$$\vec{z}_c \wedge \overline{MI} \cdot \vec{R}_{0 \rightarrow g} + \vec{z}_c \wedge \overline{MJ} \cdot \vec{R}_{0 \rightarrow d} + \vec{R}_{0 \rightarrow c} \wedge \vec{z}_c \cdot \overline{MK} + \vec{R}_{pes \rightarrow c} \wedge \vec{z}_c \cdot \overline{MG} = \delta_{M,c/\mathcal{R}} \cdot \vec{z}_c$$

Or $\vec{R}_{0 \rightarrow c}$ et $\vec{R}_{pes \rightarrow c}$ sont parallèles à \vec{z}_c donc $\vec{R}_{0 \rightarrow c} \wedge \vec{z}_c = \vec{R}_{pes \rightarrow c} \wedge \vec{z}_c = \vec{0}$ Donc :

$$\begin{aligned} \vec{z}_c \wedge (\ell \cdot \vec{y}_c - R \cdot \vec{z}_c) \cdot \vec{R}_{0 \rightarrow g} + \vec{z}_c \wedge (-\ell \cdot \vec{y}_c - R \cdot \vec{z}_c) \cdot \vec{R}_{0 \rightarrow d} &= \delta_{M,c/\mathcal{R}} \cdot \vec{z}_c \\ -\ell \cdot \vec{x}_c \cdot (X_g \cdot \vec{x}_c + Y_g \cdot \vec{y}_c + Z_g \cdot \vec{z}_c) + \ell \cdot \vec{x}_c \cdot (X_d \cdot \vec{x}_c + Y_d \cdot \vec{y}_c + Z_d \cdot \vec{z}_c) &= \delta_{M,c/\mathcal{R}} \cdot \vec{z}_c \\ \ell \cdot (X_d - X_g) &= \delta_{M,c/\mathcal{R}} \cdot \vec{z}_c \end{aligned}$$

Par la relation de Varignon sur le moment dynamique on a :

$$\ell \cdot (X_d - X_g) = \delta_{G,c/\mathcal{R}} \cdot \vec{z}_c + m \cdot \overline{\Gamma}_{G,c/\mathcal{R}} \wedge \overline{GM} \cdot \vec{z}_c$$

Par permutation circulaire :

$$\begin{aligned} \ell \cdot (X_d - X_g) &= (-E \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{x}_c - E \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{y}_c + c \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_c) \cdot \vec{z}_c + m \cdot \overline{GM} \wedge \vec{z}_c \cdot \overline{\Gamma}_{G,c/\mathcal{R}} \\ \ell \cdot (X_d - X_g) &= (-E \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{x}_c - E \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{y}_c + c \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_c) \cdot \vec{z}_c + m \cdot (a \cdot \vec{x}_c + h \cdot \vec{z}_c) \wedge \vec{z}_c \cdot \overline{\Gamma}_{G,c/\mathcal{R}} \\ \ell \cdot (X_d - X_g) &= c \cdot \ddot{\theta} - m \cdot a \cdot \vec{y}_c \cdot [(\dot{v}_0 + a \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \vec{x}_c + (v_0 \cdot \dot{\theta} - a \cdot \ddot{\theta}) \cdot \vec{y}_c] \\ \ell \cdot (X_d - X_g) &= (C + m \cdot a^2) \cdot \ddot{\theta} - m \cdot a \cdot v_0 \cdot \dot{\theta} \end{aligned}$$

Soit avec les résultats de la question 12 et sachant que $\dot{\theta} = \omega$:

On obtient : $\frac{\ell}{R} \cdot (C_d - C_g) = (C + m \cdot a^2) \cdot \dot{\omega} - m \cdot a \cdot v_0 \cdot \omega$ (b)

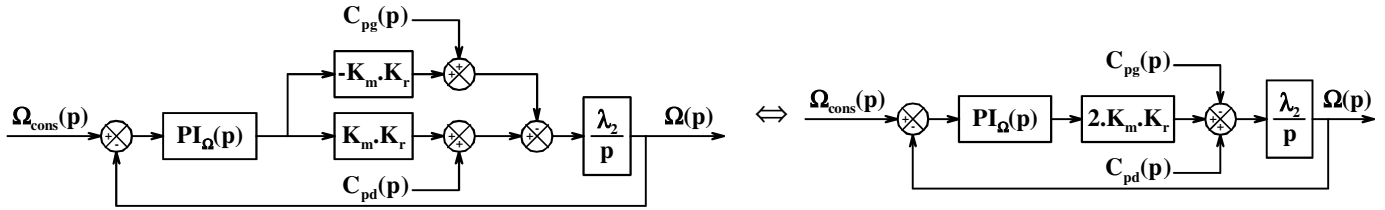
Enfin des équations (a) et (b) ci-dessus on obtient donc :

$$\left. \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{v}_0 + \lambda_1 \cdot \omega^2 = \lambda_3 \cdot (C_g + C_d) \\ \dot{\omega} + \lambda_4 \cdot v_0 \cdot \omega = \lambda_2 \cdot (C_d - C_g) \end{cases}$$

Avec : $\lambda_1 = a$ $\lambda_2 = \frac{\ell}{R \cdot (C + m \cdot a^2)}$ $\lambda_3 = \frac{1}{m \cdot R}$ $\lambda_4 = \frac{-m \cdot a}{C + m \cdot a^2}$

Question 17.

Pour bien comprendre ce qui se passe regardons le cas où $V_{0\text{cons}}(p) = 0$ le schéma bloc devient :



On voit que la FTBO non corrigée est de classe 1 mais avec un intégrateur placé en aval des deux perturbations $C_{pg}(p)$ et $C_{pd}(p)$. Il faut donc un intégrateur en aval de la perturbation pour avoir la précision. D'où un correcteur avec un intégrateur. Cependant avec un intégrateur dans le correcteur la FTBO est de classe deux ce qui rend la FTBO instable. D'où le numérateur $(1 + T_{i\Omega} \cdot p)$ pour assurer la stabilité.

Enfin on peut dire que ce correcteur proportionnel intégral est choisi pour respecter les critères de précision (Ecart à la trajectoire) et de stabilité (Marge de phase).

Question 18.

Si $i_g(t) = -i_d(t)$ alors : $\frac{I_d(p) + I_g(p)}{2} = 0$ Du schéma bloc de la figure 8 on en déduit :

$$-I_g(p) = I_d(p) = \epsilon_{\Omega}(p) \cdot PI_{\Omega}(p) = \epsilon_{\Omega}(p) \cdot K_{P\Omega} \cdot \frac{1 + T_{i\Omega} \cdot p}{T_{i\Omega} \cdot p} \quad \text{Soit : } p \cdot I_d(p) = \epsilon_{\Omega}(p) \cdot K_{P\Omega} \cdot \frac{1 + T_{i\Omega} \cdot p}{T_{i\Omega}}$$

L'intensité est maximale au moment où survient l'obstacle. Donc : $|i_m|_{\text{MAX}} = |i_m|_{\text{init}} = \lim_{t \rightarrow 0} |i_d(t)|$

Or par le théorème de la valeur initiale : $|i_m|_{\text{init}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot I_d(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \epsilon_{\Omega}(p) \cdot K_{P\Omega} \cdot \frac{1 + T_{i\Omega} \cdot p}{T_{i\Omega}}$

Ayant au départ ϵ_{Ω} peut être modélisé comme un échelon de consigne $|\omega_{\text{cons}}|_{\text{MAX}}$ on a :

$$|i_m|_{\text{init}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{|\omega_{\text{cons}}|_{\text{MAX}}}{p} \cdot K_{P\Omega} \cdot \frac{1 + T_{i\Omega} \cdot p}{T_{i\Omega}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} |\omega_{\text{cons}}|_{\text{MAX}} \cdot K_{P\Omega} \cdot \frac{p}{T_{i\Omega}} = |\omega_{\text{cons}}|_{\text{MAX}} \cdot K_{P\Omega}$$

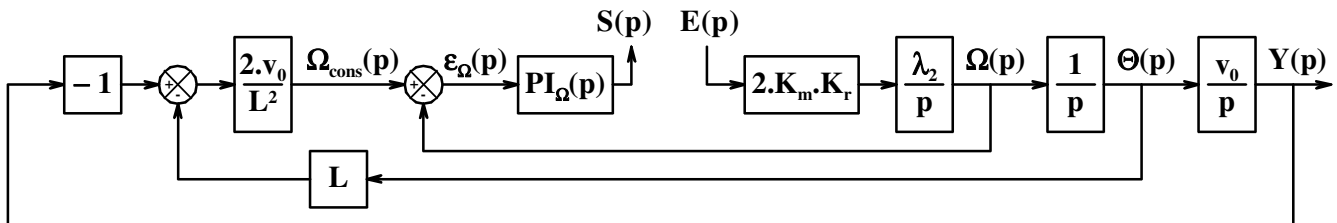
Ayant : $|\omega_{\text{cons}}|_{\text{MAX}} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot |y_{LA}|_{\text{MAX}}}{L^2}$ Avec ; $y_{LA} = L \cdot \sin \alpha$ on a : $|\omega_{\text{cons}}|_{\text{MAX}} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot |\sin \alpha|_{\text{MAX}}}{L}$

Soit : $|i_m|_{\text{init}} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot |\sin \alpha|_{\text{MAX}}}{L} \cdot K_{P\Omega}$

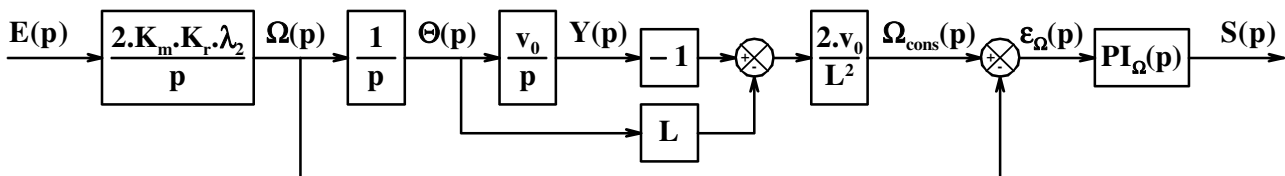
Pour limiter l'intensité il faut donc : $|i_m|_{\text{init}} \leq |i_m|_{\text{MAX}} \Leftrightarrow K_{P\Omega} \leq \frac{|i_m|_{\text{MAX}}}{2 \cdot |\sin \alpha|_{\text{MAX}}} \cdot \frac{L}{v_0}$

Question 19.

Etant donné qu'on $Y_{\text{cons}}(p) = 0$ (à gauche) le schéma bloc de la figure 9 devient :



Soit encore :



Par lecture de ce schéma bloc on obtient directement :

$$-\frac{S(p)}{E(p)} = -\frac{2.K_m.K_r.\lambda_2}{p} \cdot \left[\frac{1}{p} \cdot \left(-\frac{v_0}{p} - L \right) \cdot \frac{2.v_0}{L^2} - 1 \right] \cdot PI_{\Omega}(p)$$

$$-\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2.K_m.K_r.\lambda_2}{p^3} \left[(v_0 + L.p) \cdot \frac{2.v_0}{L^2} + p^2 \right] \cdot PI_{\Omega}(p)$$

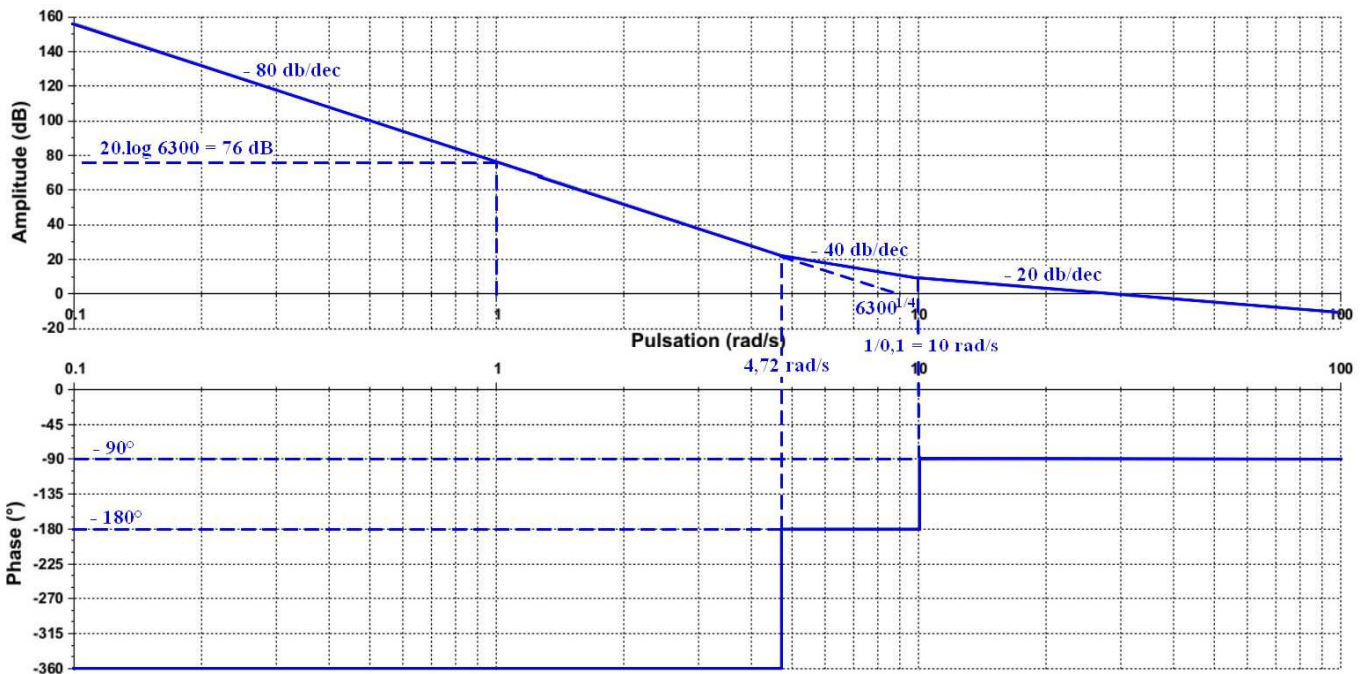
$$-\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2.K_m.K_r.\lambda_2}{p^3} \cdot v_0 \cdot \frac{2.v_0}{L^2} \cdot \left(1 + \frac{L}{v_0}.p + \frac{L^2}{2.v_0^2}.p^2 \right) \cdot K_{P\Omega} \cdot \frac{1 + T_{i\Omega}.p}{T_{i\Omega}.p}$$

On obtient donc finalement : $FTBO_{\Omega}(p) = -\frac{S(p)}{E(p)} = K_{BO} \cdot \frac{v_0}{T_{i\Omega}} \cdot \frac{1}{p^4} \cdot (1 + T_{i\Omega}.p) \cdot \left(1 + \frac{2.\xi}{\omega_0}.p + \frac{1}{\omega_0^2}.p^2 \right)$

Avec : $K_{BO} = \frac{4.v_0.K_m.K_r.\lambda_2.K_{P\Omega}}{L^2}$ $\omega_0 = \frac{v_0}{L} \cdot \sqrt{2}$ $\xi = \frac{\omega_0 L}{2 v_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Question 20.

Avec : $FTBO_{\Omega}(p) = -\frac{S(p)}{E(p)} = 6\,300 \cdot \frac{1}{p^4} \cdot (1 + 0,1.p) \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4,72}.p + \frac{1}{4,72^2}.p^2 \right)$ On obtient :



Question 21.

Sur l'annexe C on a les diagrammes de Bode pour $T_{i\Omega} = 0,1$ s en trait continu et les diagrammes de Bode du système sans couplage avec les points. Or tout ces points sont sur la courbe en trait continu.

Il est donc pertinent de prendre le modèle de boucle ouverte sans prise en compte du couplage.

Diminuer L permet d'augmenter K_{BO} et ω_0 .

La pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO, ω_{0dB} , sera peu impactée. En effet si par exemple on divise L par 2 K_{BO} sera multiplié par 4 soit une translation de seulement $20.\log 4 = 6$ dB. Mais ω_0 étant multiplié par 2 la courbe de gain sera proche de la première asymptote (de pente - 80 dB/dec) sur un plus large bande passante ce qui maintient une décroissance du gain plus importante (- 80 au lieu de - 40 dB/dec) plus longtemps.

En revanche si ω_0 augmente, la phase sera proche de - 360° sur une plus grande bande passante diminuant ainsi la phase. Et comme ω_{0dB} sera peu impacté la marge de phase sera grandement diminuée jusqu'à la rendre négative. Il est fort probable qu'en diminuant L par 2 la marge de phase devienne négative.

Donc si L diminue, le système en boucle fermée sera moins stable.

Question 22.

N_I et N_J sont les composantes normales de la résultante des actions du sol sur les roues en I et J. T_I, T_J, Y_J sont les composantes tangentielles due à l'adhérence ou à un obstacle.

Comme expliqué à la question 12. On a un système avec 19 inconnues sthéniques, du fait de l'adhérence au niveau du contact ponctuel des roues sur le sol qui ont trois inconnues sthénique. Or le PFD ne peut nous apporter que 18 équations ($6 \times$ trois solides hors bâti). Il faut donc faire une hypothèse pour pouvoir résoudre le système d'équation. Ici on pose $\vec{R}_{0 \rightarrow g} \cdot \vec{y}_c = Y_I = 0$.

Question 23.

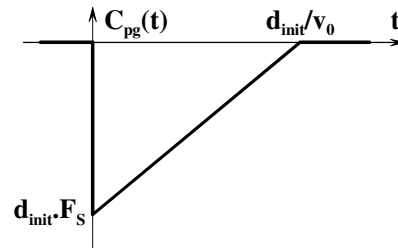
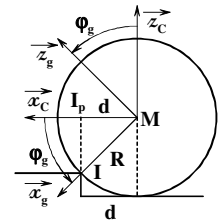
$C_{pg} = \vec{MI} \wedge \vec{R}_{0 \rightarrow g} \cdot \vec{y}_c$ Soit par permutation circulaire : $C_{pg} = \vec{R}_{0 \rightarrow g} \wedge \vec{y}_c \cdot \vec{MI}$
 Soit encore : $C_{pg} = F_S \cdot \vec{z}_c \wedge \vec{y}_c \cdot (\vec{l} \cdot \vec{y}_c + R \cdot \vec{x}_g)$
 $C_{pg} = -F_S \cdot \vec{x}_c \cdot (\vec{l} \cdot \vec{y}_c + R \cdot \vec{x}_g) = -F_S \cdot R \cdot \vec{x}_c \cdot \vec{x}_g$
 Soit finalement : $C_{pg} = -F_S \cdot R \cdot \cos \varphi_g$

D'autre part en projetant le point I sur l'axe (M, \vec{x}_c) on voit que $\cos \varphi_g = \frac{d}{R}$.

Par conséquent : $C_{pg} = -d \cdot F_S$

Or le droïde avançant à la vitesse v_0 dans la direction \vec{x}_c : $d(t) = d_{init} - v_0 \cdot t$

On obtient finalement : $C_{pg} = -d_{init} \cdot F_S + v_0 \cdot t \cdot F_S$



Question 24.

On a alors la représentation graphique de $C_{pg}(t)$ suivante :

Question 25.

L'écart maximal à la trajectoire lors de la rencontre d'un obstacle doit être inférieur à 1,5 cm donc, d'après la figure 10, il faut choisir $T_{i\Omega} = 0,1$ s ou $T_{i\Omega} = 0,01$ s.

La marge de phase, mesurée sur l'annexe C, pour $T_{i\Omega} = 0,01$ s vaut environ 25° , ce qui est inférieur à 50° . La valeur $T_{i\Omega} = 0,01$ s ne convient donc pas.

La marge de phase pour $T_{i\Omega} = 0,1$ s vaut environ $60^\circ > 50^\circ$. De plus, la question 18 a montré que si $K_{p\Omega} = 37$ alors la commande en courant reste inférieure à 25 A. Et quelle que soit la valeur de $T_{i\Omega}$, l'écart à la trajectoire en régime permanent suite à la rencontre d'un obstacle est nul.

On choisit $T_{i\Omega} = 0,1$ s afin de respecter l'ensemble des exigences du cahier des charges.

Question 26.

« inf » correspond à un coût ou à une distance infinie entre deux nœuds du graphe. La présence de la variable « inf » dans la matrice cout indique donc les nœuds non directement connectés.

Les valeurs des termes demandés sont : **cout[3,4]=3, count[2,3]=4 et count[2,1]=inf.**

La matrice count n'est pas symétrique, elle représente un graphe orienté et pondéré (figure 11) : les coûts des trajets ne sont pas forcément symétriques pour par exemple des raisons suivantes

- ☞ La topographie entre 2 nœuds (dénivelé) peut entrainer un cout énergétique différent suivant le sens.
- ☞ Des sens uniques peuvent modifier la trajectoire suivant le sens voir l'interdire.
- ☞ Des obstacles sur la trajectoire peuvent avoir un cout énergétique différent suivant le sens.

Question 27.

$\text{Si } p \neq \emptyset \quad E(i,P) = \min_{j \in P} (\text{cout}_{ij} + E(j,P_j))$

Question 28.

Ligne 26 : **if e_mini > cout[i, j] + e**

Question 29.

Les lignes 32 à 42 permettent de calculer le trajet optimal ainsi que son coût énergétique (l'énergie dépensée). L'algorithme détermine pas à pas, le trajet optimal, dont le coût est le moins élevé qui passe par tous les points de livraison une seule fois. Lorsqu'un point de livraison a été ajouté au trajet, il est retiré de la liste des points non encore livrés.

Ligne 40 : `tr_opt.append(j)`

Ligne 41 : `P = soustraction(P, j)`

Question 30.

`e_opt = 18.0` est le coût du trajet optimal.

`tr_opt = [0, 4, 1, 2, 3, 0]` représente le trajet optimal.

Question 31.

En analysant les figures 13, 14 et 15, on observe que l'écart entre la trajectoire planifiée et la trajectoire simulée du droïde est plus important lorsque l'angle entre deux segments consécutifs est important. Cet écart correspond également à une augmentation du courant moteur et parfois à une saturation.

Plus l'angle entre deux segments consécutifs est important plus $|\sin \alpha|$ est important, cela influe donc sur $|\sin \alpha|_{\text{MAX}}$ et le réglage du gain $K_{p\Omega}$ ne permet pas d'assurer la limitation des courants moteurs.

Question 32.

Pour les résultats de simulation des figures 13 et 15, le ratio $\frac{v_0}{L} \approx 3,3 \text{ s}^{-1}$ est identique. On remarque qu'au niveau du point P4 (virage serré) le suivi est stable pour les deux simulations, mais l'écart diffère : le suivi de trajectoire est très précis dans le cas de la simulation de la figure 15 (v_0 et L petits). En comparaison, les résultats de la simulation de la figure 14, pour laquelle les paramètres sont les mêmes que celle de la figure 13 mais avec un L plus petit, montre un suivi moins stable autour du point P4. Pour obtenir des résultats satisfaisants tant du point de vue de la stabilité que de la précision, il faut donc diminuer simultanément L et v_0 .

Pour la rapidité de la tournée il faut augmenter v_0 mais pour garder le même ratio $\frac{v_0}{L}$ il faudra également augmenter L ce qui conduira à davantage d'écart dans les changements de direction importants.

Question 33.

Si la trajectoire est planifiée à l'avance, les angles entre deux segments successifs sont donc connus et il est possible de déterminer un couple de valeur (L, v_0) pour chaque segment permettant un suivi de trajectoire optimal. Dans l'algorithme « pure pursuit », il faudra adapter en temps réel la valeur du couple (L, v_0) pour minimiser la durée d'une tournée de livraison.