

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Question 4: Essai de lâcher pour $\beta = 0$ $C_{mer}(s) = 0$ et $\hat{\alpha} = \alpha - \alpha_0$ ($\alpha = \hat{\alpha} + \alpha_0$)

$$(eq1) \xrightarrow{\mathcal{L}} (k_b + f_b \cdot p + I_b \cdot p^2) \hat{\alpha}(p) = \frac{-k_b \alpha_0}{p} \Rightarrow \hat{\alpha}(p) = -\frac{k_b \alpha_0}{p} \cdot \frac{1/k_b}{1 + \frac{f_b}{k_b} p + \frac{I_b}{k_b} p^2}$$

Soit $\hat{\alpha}(p) = \frac{-\alpha_0}{p} \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ Avec: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_b}{I_b}}$ et $\zeta = \frac{\omega_0 f_b}{2 k_b}$ On a pour $\hat{\alpha}(t)$ la réponse à un échelon de

$$\zeta = \frac{f_b}{2 \sqrt{k_b I_b}} = 0,1$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_b}{I_b}} = 1,2 \text{ rad.s}^{-1}$$

$-\alpha_0 = 10^\circ$
Valeur finale $+10^\circ$
Valeur max $17,3^\circ \Rightarrow D\% = 73\%$

$$k_b = \omega_0^2 I_b$$

$$f_b = 2\zeta \sqrt{k_b I_b} = 2\zeta \omega_0 I_b$$

$\Rightarrow \zeta \approx 0,1$
Période $T = 5,25 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 1,2 \text{ rad/s}$
 $\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1,2 \text{ rad.s}^{-1}$

$$k_b \approx 86400 \text{ N.m.rad}^{-1}$$

$$f_b = 14400 \text{ N.m.s.rad}^{-1}$$

Question 5: Equation de mouvement en $\beta(t)$

On isole {2,3} Bilan des actions mécaniques extérieures

* Action de 1-2 due à la liaison pivot d'axe $(0, \vec{y}_2)$

* Action du modulateur-2 = { T modulateur-2 }

L'application du TMD en O en projection sur \vec{y}_2 donne donc

$$|O + Ch(t) = \vec{\delta}_0(\{2,3\}/0) \cdot \vec{y}_2 \quad \text{Avec } \vec{\delta}_0(\{2,3\}/0) = \vec{\delta}_0(3/0) \text{ car on néglige l'inertie de l'enceinte 2}$$

O étant le centre d'inertie du volant 3 le moment cinétique en O de 3/0 est:

$$\vec{\sigma}_0(3/0) = [I(0,3)] \cdot \vec{\Omega}_{3/0} = \begin{pmatrix} A_3 \dot{\alpha} \cos \beta \\ A_3 \dot{\beta} \\ C_3(\dot{\alpha} \sin \beta + \omega_m) \end{pmatrix}_{R_2}$$

D'où le moment dynamique en O du solide 3 par rapport à O:

$$\vec{\delta}_0(3/0) = \left(\frac{d \vec{\sigma}_0(3/0)}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d \vec{\sigma}_0(3/0)}{dt} \right)_{R_2} + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{\sigma}_0(3/0)$$

$$\vec{\delta}_0(3/0) = \begin{pmatrix} A_3 \ddot{\alpha} \cos \beta - A_3 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \\ A_3 \ddot{\beta} \\ C_3 \ddot{\alpha} \sin \beta + C_3 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \end{pmatrix}_{R_2} + \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \end{pmatrix}_{R_2} \wedge \begin{pmatrix} A_3 \dot{\alpha} \cos \beta \\ A_3 \dot{\beta} \\ C_3(\dot{\alpha} \sin \beta + \omega_m) \end{pmatrix}_{R_2}$$

Soit en projetant sur l'axe \vec{y}_2 on obtient :

$$\delta_{0(310)} \cdot \vec{y}_2 = A_3 \ddot{\beta} + A_3 \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta - C_3 \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta - C_3 \omega_m \dot{\alpha} \cos \beta$$

$$\delta_{0(310)} \cdot \vec{y}_2 = A_3 \ddot{\beta} + (A_3 - C_3) \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta - C_3 \omega_m \dot{\alpha} \cos \beta$$

Or l'équation issue du TMD en 0 en projection sur \vec{y}_2 s'écrit $\delta_{0(310)} \cdot \vec{y}_2 = Ch(\tau)$

On en déduit donc :

Equation de mouvement :

$$Ch(t) = A_3 \frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} + (A_3 - C_3) \left(\frac{d\alpha(t)}{dt} \right)^2 \cos \beta(t) \sin \beta(t) - C_3 \omega_m \frac{d\alpha(t)}{dt} \cos \beta(t)$$

Question 6 : Linéarisation

Pour $\beta(t)$ petit on a $\cos \beta(t) \approx 1$ et $\sin \beta(t) \approx \beta(t)$

Pour $\frac{d\alpha(t)}{dt} \ll \omega_m$ on a $(A_3 - C_3) \left(\frac{d\alpha(t)}{dt} \right)^2 \beta(t) \ll C_3 \omega_m \left(\frac{d\alpha(t)}{dt} \right)$

l'équation devient donc $Ch(t) = A_3 \frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} - C_3 \omega_m \left(\frac{d\alpha(t)}{dt} \right)$

$$I_g = A_3 \quad \text{avec} \quad A_3 \frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} = Ch(t) + C_3 \omega_m \left(\frac{d\alpha(t)}{dt} \right)$$

Question 7 : Analyse de l'effet gyroscopique

Evolution chronologique des événements

	Un moment est appliqué $C_{mer}(t) = C_0$ (positif), l'angle α varie :	Le couple gyroscopique sur l'axe de cardan $C_3 \omega_m \frac{d\alpha(t)}{dt}$ est :	L'angle β varie alors :	Le couple gyroscopique sur l'axe du bateau $-C_3 \omega_m \frac{d\beta(t)}{dt}$ est :	Ce couple gyroscopique s'oppose au couple $C_{mer}(t) = C_0$
La configuration de départ est une mer au repos $C_{mer}(0) = 0$ On rappelle que $\omega_m = cste$ Les conditions initiales sont nulles : $\alpha(0) = 0$ $\dot{\alpha}(0) = 0$ $\beta(0) = 0$ $\dot{\beta}(0) = 0$	POSITIVEMENT	POSITIF	POSITIVEMENT	POSITIF	OUI
	NEGATIVEMENT	NEGATIF	NEGATIVEMENT	NEGATIF	NON

Question 8 : Fonction de transfert $H(p)$ Avec $Ch(p) = 0$ et des conditions initiales nulles, les équations (eq1) et (eq2) passées dans le domaine de Laplace.

donnent :

$$\begin{cases} (a) I_g p^2 \beta(p) = C_3 \omega_m p \alpha(p) \\ (b) I_b p^2 \alpha(p) + C_3 \omega_m p \beta(p) = C_{mer}(p) - f_b p \alpha(p) - k_b \alpha(p) \end{cases}$$

$$(a) \Rightarrow p \beta(p) = \frac{C_3 \omega_m \alpha(p)}{I_g} \quad (a) \Rightarrow C_{mer}(p) = C_3 \omega_m p \beta(p) + (k_b + f_b p + I_b p^2) \alpha(p)$$

$$\Rightarrow C_{mer}(p) = \left[\frac{C_3^2 \omega_m^2}{I_g} + k_b + f_b \cdot p + I_b p^2 \right] \alpha(p)$$

$$\Rightarrow \alpha(p) = \frac{1}{\frac{C_3^2 \omega_m^2}{I_g} + k_b + f_b \cdot p + I_b \cdot p^2} C_{mer}(p) \quad \text{soit } \alpha(p) = \frac{1}{K + A p + B p^2} C_{mer}(p)$$

Avec

$$K = \frac{C_3^2 \omega_m^2}{I_g} + k_b$$

$$A = f_b$$

$$B = I_b$$

Stable (oui) / non Justification stabilité :

Car on a une fonction de transfert du second ordre et de classe 0 dont tous les coefficients sont de même signe (tous positifs)

Question 9 : Influence de C_{mer}

Equation de $\alpha(t)$

$$\alpha(t) = C_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \arg(H(j\omega)))$$

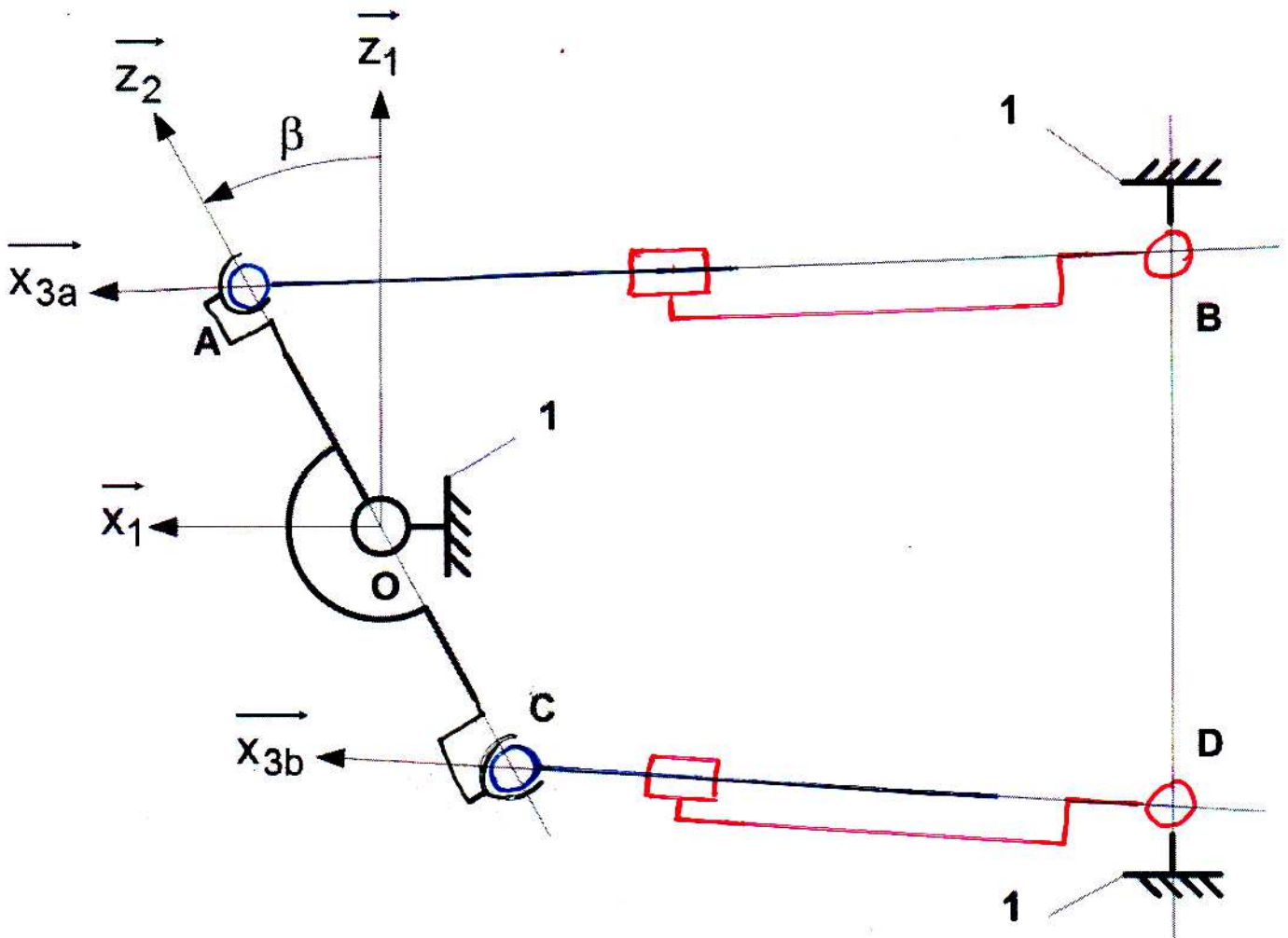
Pulsation	Rapport d'amplitude		Déphasage	
	Sans stabilisation	Avec stabilisation	Sans stabilisation	Avec stabilisation
1 rad/s	$10^{-90/20}$	$10^{-135/20}$	-25°	0°
10 rad/s	$10^{-135/20}$	$10^{-130/20}$	-180°	-5°

Conclusion : Pour de basse fréquences ($\omega = 1 \text{ rad/s}$, $T = 6,28 \text{ s}$) le stabilisateur est efficace. Car l'amplitude est abaissée de 49 dB (soit environ $\times 1/300$)
 Pour de haute fréquence ($\omega = 10 \text{ rad/s}$, $T = 0,628 \text{ s}$) le stabilisateur n'est pas efficace. Car l'amplitude est relevée de 5 dB (soit environ $\times 1,8$)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Question 12 : Schéma cinématique



Justification des liaisons :

En A et C on a des contacts sphériques d'où les liaisons sphériques de centres A et C

En B et D on a des contacts cylindriques + des arrêts axiaux d'où les liaisons pivot d'axes $(B \vec{y}_1)$ et $(D \vec{y}_1)$

Question 13 : **Hyperstatisme**

Mobilités :

Mobilités utiles : $M_u = 1$: Rotation de l'enceinte initiée par

Les translations des 2 tiges des vérins par rapport aux corps

Mobilités internes $M_I = 2$: Rotations des 2 tiges des vérins par rapports aux axes $(AB) = (A, \vec{x}_{3a})$ et $(CD) = (C, \vec{x}_{3b})$

Hyperstatisme :

$$H = 6 \times 8 + (M_u + M_I) - I_c = 6 \times 2 + (1 + 2) - (3 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3) \quad \left. \vphantom{H} \right\} \boxed{H = 2}$$

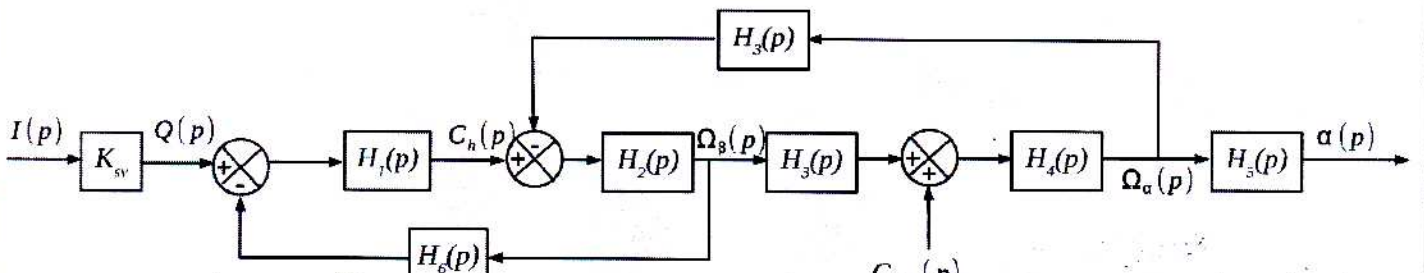
ou

$$H = I_s + (M_u + M_I) - 6(N_p - 1) = (3 \times 5 + 2 \times 4 + 2 \times 3) + (1 + 2) - 6(6 - 1)$$

Contraintes géométriques :

Il faut un bon positionnement des arrêts axiaux suivant \vec{y}_0 des 2 liaisons pivot pour que les points B et D soient bien dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$. Mais aussi un bon parallélisme des surfaces cylindriques des 3 liaisons pivot.

Question 14 : **Schéma-blocs**



$$\omega_\alpha(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Omega_\alpha(p) = p \alpha(p) \Rightarrow \alpha(p) = \frac{1}{p} \Omega_\alpha(p)$$

$$(eq 4) \xrightarrow{\mathcal{L}} Q(p) = S.e \Omega_\beta(t) - \frac{V_0 p}{2BSe} Ch(p) \Rightarrow Ch(p) = \frac{2BSe}{V_0 p} (Q(p) - S.e \Omega_\beta(p))$$

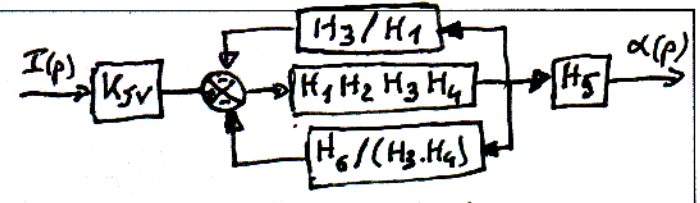
$$(eq 3) \xrightarrow{\mathcal{L}} I_g p \Omega_\beta(p) = Ch(p) + C_3 \omega_m \Omega_\alpha(p) \Rightarrow \Omega_\beta(p) = \frac{1}{I_g p} [Ch(p) - (-C_3 \omega_m) \Omega_\alpha(p)]$$

$$(eq 5) \xrightarrow{\mathcal{L}} (k_b + f_b p + I_b p^2) \frac{\Omega_\alpha(p)}{p} = C_{mer}(p) - C_3 \omega_m \Omega_\beta(p) \Rightarrow \Omega_\alpha(p) = \frac{p}{k_b + f_b p + I_b p^2} [C_{mer}(p) - C_3 \omega_m \Omega_\beta(p)]$$

$H_1(p) = \frac{2BSe}{V_0 p}$	$H_4(p) = \frac{p}{k_b + f_b p + I_b p^2}$
$H_2(p) = \frac{1}{I_g p}$	$H_5(p) = \frac{1}{p}$
$H_3(p) = -C_3 \omega_m$	$H_6(p) = S.e$

Question 15 : Equivalence de schémas-blocs

Pour $C_{mer}(p) = 0$ le schéma bloc devient :

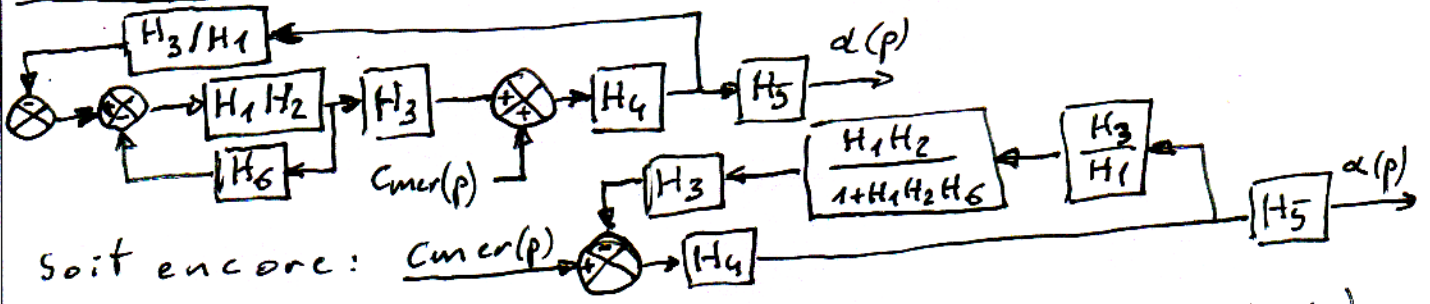


Par la formule de Black on a :

$$\alpha(p) = I_p K_{sv} \cdot \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5}{1 + H_1 H_2 H_3 H_4 \left(\frac{H_3}{H_1} + \frac{H_6}{H_3 H_4} \right)} = I_p K_{sv} \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5}{1 + H_2 H_3^2 H_4 + H_1 H_2 H_6}$$

On du schéma bloc de l'énoncé on a : $\alpha(p) = I_p K_{sv} H_6(p)$ D'où

Pour $I(p) = 0$ le schéma bloc devient



soit encore :

$$\text{Donc } \alpha(p) = C_{mer}(p) \cdot \frac{H_4 H_5}{1 + \frac{H_2 H_3^2 H_4}{1 + H_1 H_2 H_6}} = C_{mer}(p) \frac{H_4 H_5 (1 + H_1 H_2 H_6)}{1 + H_2 H_3^2 H_4 + H_1 H_2 H_6}$$

Or du schéma bloc de l'énoncé : $\alpha(p) = -H_a(p) H_b(p) C_{mer}(p)$

$$\text{Donc } -H_a(p) H_b(p) = \frac{H_4 H_5 (1 + H_1 H_2 H_6)}{1 + H_2 H_3^2 H_4 + H_1 H_2 H_6}$$

$$\text{on en déduit } H_a(p) = \frac{-H_4 H_5 (1 + H_1 H_2 H_6)}{1 + H_2 H_3^2 H_4 + H_1 H_2 H_6} \times \frac{1 + H_2 H_3^2 H_4 + H_1 H_2 H_6}{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5}$$

Donc finalement :

$H_a(p) = \frac{1 + H_1(p) \cdot H_2(p) H_6(p)}{H_1(p) H_2(p) H_3(p)}$	$H_b(p) = \frac{H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p) \cdot H_4(p) \cdot H_5(p)}{1 + H_2(p) \cdot H_3^2(p) \cdot H_4(p) + H_1(p) H_2(p) H_6(p)}$
--	---

Question 16 : Expression simplifiée de la fonction de transfert

La phase $\varphi(\omega)$ est monotone décroissante et varie de 0° à -180°

D'où $G(p)$ est un second ordre de classe 0 $G(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$

Pour $\omega \rightarrow 0$ $G_{dBG}(\omega) \rightarrow 5 \text{ dB}$ $\left\| K = 10^{5/20} = 1,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \right.$

$\varphi(\omega_0) = -90^\circ$ pour $\left\| \omega_0 = 1,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \right.$

$$G_{dBG}(\omega_0) - G_{dBG}(0) = 18 - 5 = -20 \log 2 \quad \Rightarrow \quad \left\| \xi = \frac{1}{2} 10^{(-18-5)/20} = 0,1 \right.$$

Numéro d'inscription

Né(e) le / /

Signature



Nom

Prénom(s)



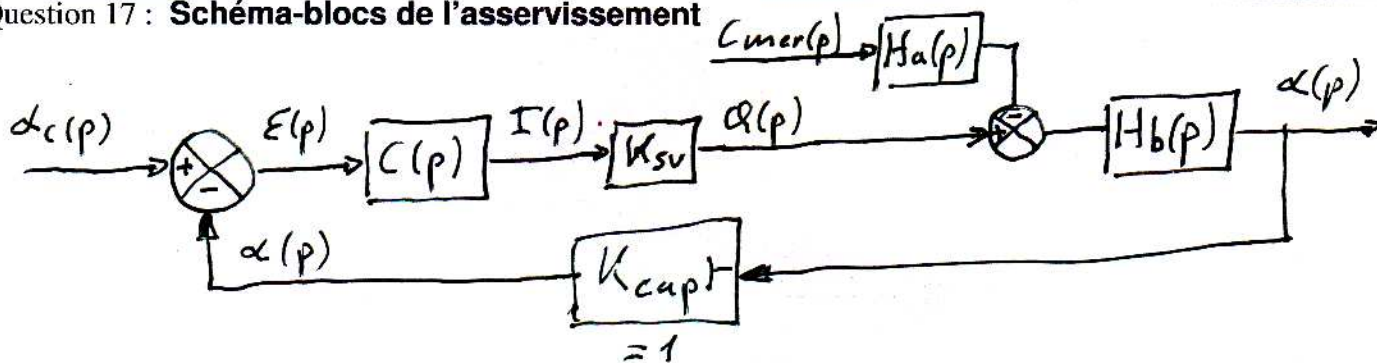
Mines-Ponts

Épreuve : **Sciences Industrielles filière PSI**

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseignée ne seront pas prise en compte pour la correction.

Feuille /

Question 17 : **Schéma-blocs de l'asservissement**



Question 18 : **Stabilité du système asservi**

Pour $C(p) = K_p$ la FTBO du système est $FTBO(p) = K_p G(p) K_{capt}$
 c'est un 2nd ordre de classe 0 avec tous les coefficients positif donc elle est stable et sa phase varie de 0° à -180°

Donc la marge de gain est infinie et la marge de phase est strictement positive

Donc la FTBF de cet asservissement est stable quelque soit la valeur de K_p

Question 19 : **Précision**

FTBO de classe 0 avec un gain statique de $K_p K_{sv} K_b K_{capt}$
 D'où l'erreur statique pour un échelon α_{co}

$$E_s = \frac{\alpha_{co}}{1 + K_p K_{sv} K_b K_{capt}}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Le critère de précision impose une erreur statique

$$E_s \leq 5\% \Leftrightarrow \frac{\alpha_{co}}{1 + K_p K_{sv} K_b K_{cup}} \leq 0,05 \alpha_{co}$$

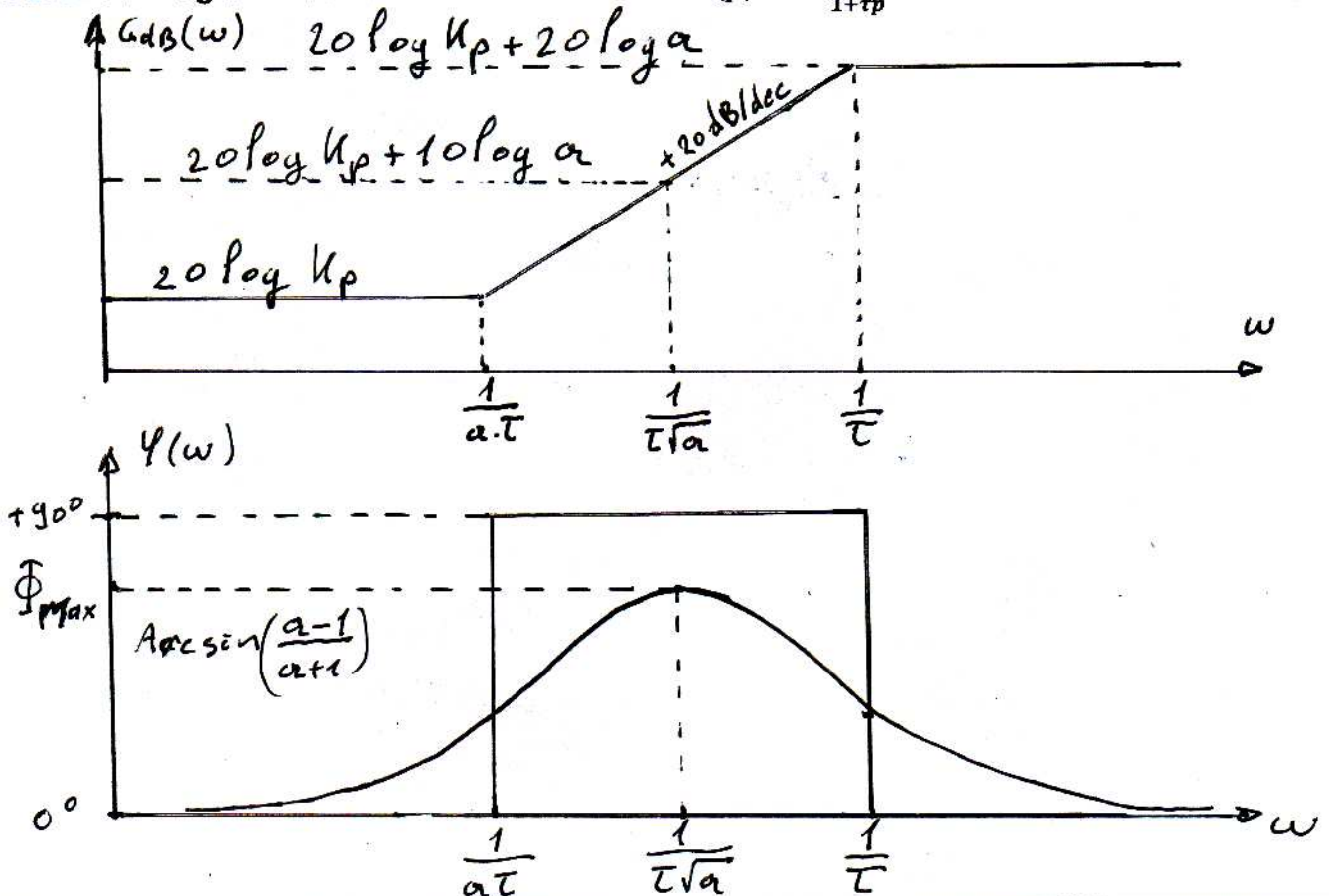
$$\Leftrightarrow 0,95 \alpha_{co} \leq 0,05 K_p K_{sv} K_b K_{cup} \Leftrightarrow K_p \geq \frac{19}{K_{sv} K_b K_{cup}}$$

Valeur minimale de K_p :

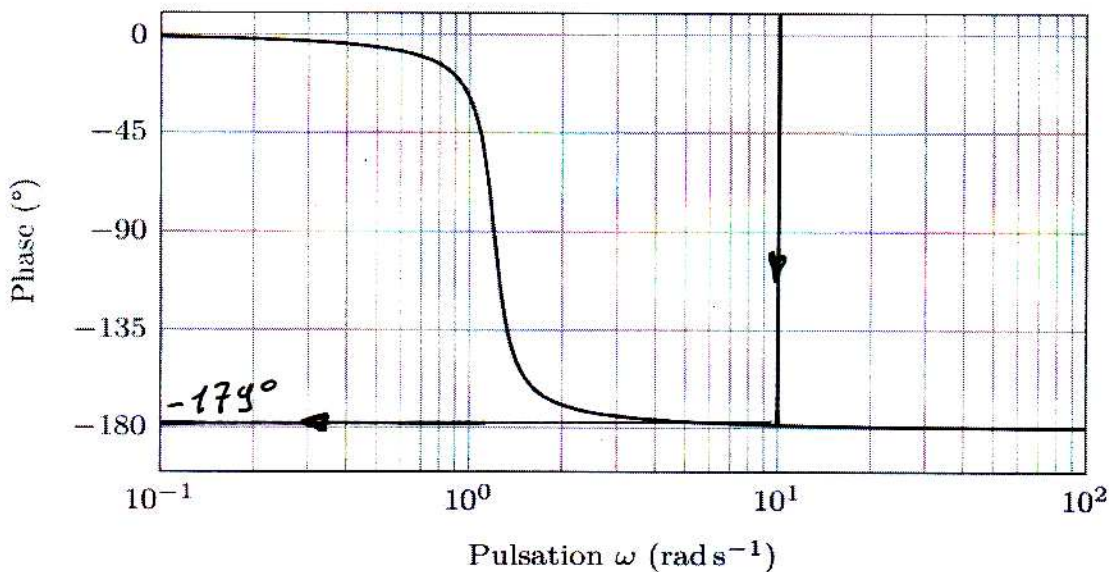
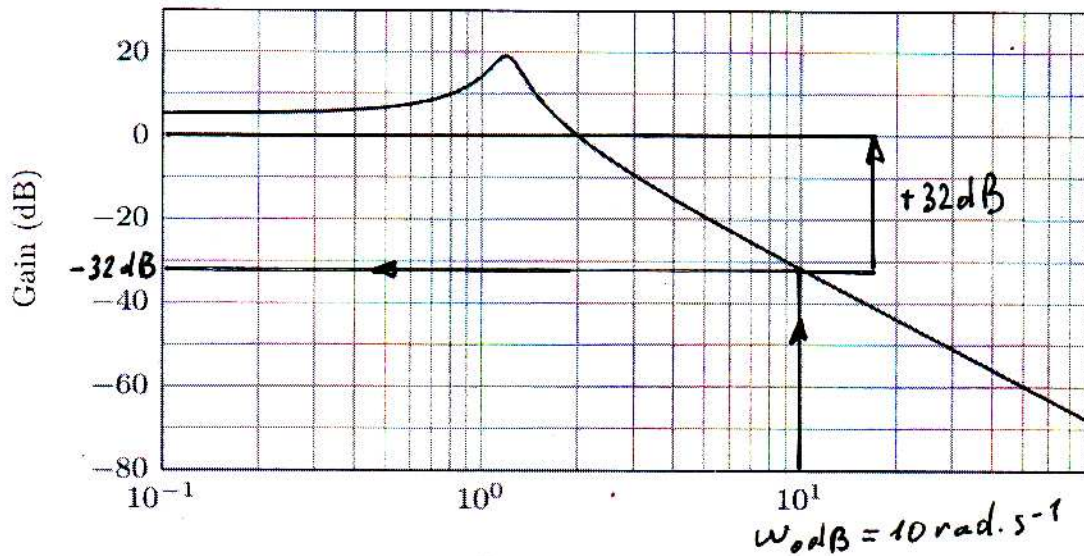
$$K_{p \text{ mini}} = 9,5 A \cdot \text{rad}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow K_p \geq \frac{19}{2}$$

Question 20 : Diagrammes de Bode du correcteur $C(p) = \frac{K_p(1+ap)}{1+tp}$



Question 21 : Réglages du correcteur



A la pulsation $\omega_{\text{dB}} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ la phase et le gain de la FTBO sont de -179° et -32 dB

Donc pour respecter les critères de marge de phase et de bande passante, le correcteur doit relever à $10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

la phase de 59° (Pour avoir $M\varphi = 60^\circ$) $\Rightarrow \underline{\underline{\phi_{\text{max}} = 59^\circ}}$

le gain de 32 dB (Pour avoir $\omega_{\text{dB}} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$)

Sachant que $\phi_{\text{max}} = \arcsin \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow a = \frac{1 + \sin 59}{1 - \sin 59} = 13$

Sachant que $\omega_{\text{max}} = \frac{1}{T\sqrt{a}} \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_{\text{dB}}\sqrt{a}} = 0,0285$

Enfin $20 \log K_p + 10 \log a = +32 \text{ dB} \Rightarrow K_p = 10 \stackrel{(32-10 \log a)/20}{=} 11 \text{ A} \cdot \text{rad}^{-1}$

Question 22 : Apport du système de stabilisation

$$\omega_{mer} = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Entre 10 et 355 on observe 4 périodes complètes
 Donc $\omega_{mer} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(35-10)/4} \approx 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\text{Rapport d'amplitudes } a/C_{mer} = 10^{-111/20}$$

sur la figure 8 on lit un rapport d'amplitude à $1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
 du système sans stabilisation de $10^{-90/20}$

On en déduit que le système de stabilisation permet
 d'atténuer le rapport d'amplitude de $\frac{10^{-111/20}}{10^{-90/20}}$
 soit $10^{-21/20} \approx 0,1$

c'est également ce que montre la réponse temporelle
 (passage d'une amplitude de crête à crête de 60° à 6°)
 soit une atténuation de 0,1

Question 23 : Dimensionnement du volant d'inertie

En appliquant un théorème de l'énergie cinétique au
 volant 3 on a $P_m = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C_3 \omega_m^2 \right) = C_3 \omega_m \dot{\omega}_m = \pi \frac{R^2}{2} \omega_m \dot{\omega}_m$

or $\pi = \rho \pi h R^2$ donc $P_m = \frac{\rho \pi h R^4}{2} \omega_m \dot{\omega}_m$

avec $h = \frac{R}{3}$ d'où $P_m = \frac{\rho \pi R^5}{6} \omega_m \dot{\omega}_m$ avec $\dot{\omega}_m = \frac{\omega_{max}}{T_{max}}$

Donc $P_{mmax} = \frac{\rho \pi R^5}{6} \frac{\omega_{max}^2}{T_{max}} \Rightarrow R = \sqrt[5]{\frac{6 T_{max} P_{max}}{\rho \pi \omega_{max}^2}}$

A.N (sans calculatrice) $R = \sqrt[5]{\frac{6 \times 2100 \times 2100}{7800 \times \pi \times 1050^2}}$

$\frac{6}{\pi} \approx 2$
 $2100 = 2 \times 1050 \Rightarrow R \approx \sqrt[5]{\frac{2 \times (2 \times 1050)^2}{7800 \times 1050^2}} = \sqrt[5]{\frac{8}{7800}} \approx \sqrt[5]{\frac{1}{1000}} = (10^{-3})^{1/5} = 10^{-3/5}$

$$R = 10^{-3/5} = 0,25 \text{ m}$$

$$h = \frac{10^{-3/5}}{3} = 8,3 \text{ cm}$$

calculatrice

Numéro d'inscription

Né(e) le

 / /

Signature

Nom

Prénom(s)



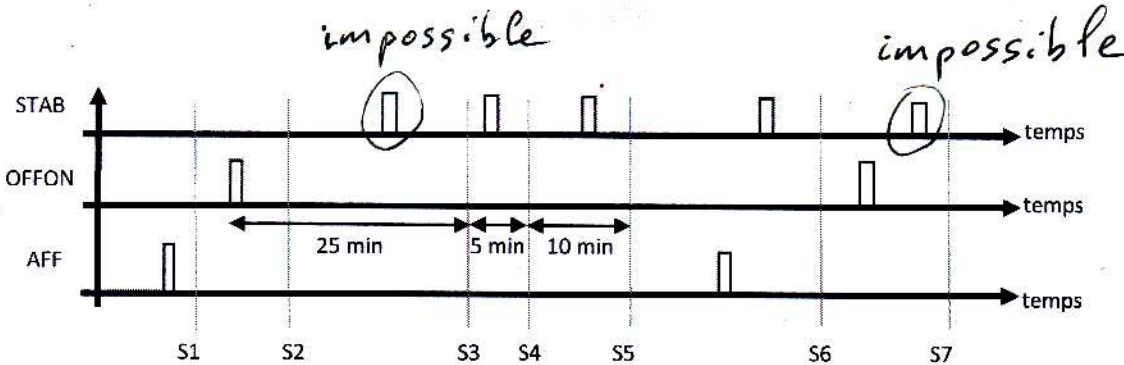
Mines-Ponts

Épreuve : **Sciences Industrielles filière PSI**

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseignée ne seront pas prise en compte pour la correction.

Feuille /

Question 24 : Fonctionnement du système



Situations	Zone d'affichage	Bouton ONOFF	Bouton STAB	Barre de progression visible
S1	Courbe / Cadran	Bleu / Gris / Caché	Bleu / Gris / Caché	Oui / Non
S2	Courbe / Cadran	Bleu / Gris / Caché	Bleu / Gris / Caché	Oui / Non
S3	Courbe / Cadran	Bleu / Gris / Caché	Bleu / Gris / Caché	Oui / Non
S4	Courbe / Cadran	Bleu / Gris / Caché	Bleu / Gris / Caché	Oui / Non
S5	Courbe / Cadran	Bleu / Gris / Caché	Bleu / Gris / Caché	Oui / Non
S6	Courbe / Cadran	Bleu / Gris / Caché	Bleu / Gris / Caché	Oui / Non
S7	Courbe / Cadran	Bleu / Gris / Caché	Bleu / Gris / Caché	Oui / Non

Question 25 : Transitions à modifier

si l'utilisateur rallume le système 10 min après l'avoir éteint, il devra attendre 25 minutes avant de lancer la stabilisation et 35 minutes avant la disparition de la barre temporelle. Ces durées sont les durées nécessaires pour atteindre (à partir de l'arrêt du volant) les vitesses minimale de stabilisation ($750 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$) et maximale du volant ($1050 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Or 10 minutes après avoir arrêté le système la vitesse du volant sera encore importante.
Donc les 2 transitions qui ne sont pas pertinentes sont "after 25 min" et "after 35 min".

En utilisant un capteur de vitesse qui donne la vitesse de rotation du volant : ω_m . On peut remplacer ces 2 transitions par :
"when ($\omega_m \geq 750 \text{ rad.s}^{-1}$)" et "when ($\omega_m \geq 1000 \text{ rad.s}^{-1}$)"