Satellite DEMETER : Corrigé

Q1 Le satellite est en rotation autour de la terre a une distance $(R+h)$ Donc sa vitesse linéaire est $\vec{V} = (R+h)\,\omega_0\,\vec{t}$ où $\vec{t}$ est un vecteur tangent à la trajectoire

son accélération est $\vec{A} = -(R+h)\,\omega_0^2\,\vec{z}$ où $\vec{z}$ est un vecteur parallèle au rayon orienté vers l'extérieur.

L'application du théorème de la résultante à ce satellite donne en projection sur $\vec{n}$

$$\frac{-G.M.m}{(R+h)^2} = -m(R+h)\,\omega_0^2$$

soit $\omega_0 = \dfrac{1}{(R+h)}\sqrt{\dfrac{G.M}{R+h}}$

Donc $\boxed{\vec{V} = \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}\;\vec{t}}$ $\quad \vec{V} = 7507\,\vec{t}$ en $m.s^{-1}$

D'où la pulsation orbitale :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{\|\vec{V}\|}{R+h} = 1{,}062 \cdot 10^{-3}\ rad.s^{-1}}$$

Q2 La période de révolution est donc de $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 5916\ s$ Le satellite étant éclairé durant $65\ min = 3900\ s$ il est masqué

Durant une période de 2016 s

durant cette periode sa consommation electrique est de : $\frac{2016}{3600} \times 0,6 \times 44 = 14,8\ A.h$

La capacité totale du système de batterie étant de $15\,A.h > 14,8\,A.h$ elle est suffisante.

(Q15) On a $A_r(p)\,H(p)\,F(p) = \frac{0,028}{(1+1,15p)(1+1,5p)\,p^2}$

(Q16) $H_{BONC}(p) = F(p)\,A_r(p)\,H(p)\,e^{-0,1p}\,e^{-0,7p}$

$H_{BONC}(p) = F(p)\,A_r(p)\,H(p)\,e^{-0,8p}$

Si on pose $\varphi_0(\omega)$ et $G_{dBO}(\omega)$ la phase et le gain de $F(p)\,A_r(p)\,H(p)$ (Tracés sur le document reponse, alors $\varphi_{BONC}(\omega)$ et $G_{dBBONC}(\omega)$ la phase et le gain de $H_{BONC}(p)$ la boucle ouverte non corrigée sont :

$$\varphi_{BONC}(\omega) = \varphi_0(\omega) + \arg(e^{-0,8j\omega}) = \varphi_0(\omega) - 0,8\,\omega$$

$$G_{dBBONC}(\omega) = G_{dBO}(\omega) + |e^{-0,8j\omega}| = G_{dBO}(\omega)$$

La courbe de gain n'est donc pas modifiée et la courbe de phase est diminuée de $-0,8.\omega$

A.N : $-0,8 \times 0,06 = -0,048\ rad = -2,8°$

$-0,8 \times 0,09 = -0,072\ rad = -4,1°$

$-0,8 \times 0,2 = -0,16\ rad = -9,2°$

$-0,8 \times 0,5 = -0,4\ rad = -22,9°$

$-0,8 \times 0,8 = -0,64\ rad = -36,7°$

$-0,8 \times 1 = -0,8\ rad = -45,8°$

On trace ainsi la courbe de phase sur le document reponse.

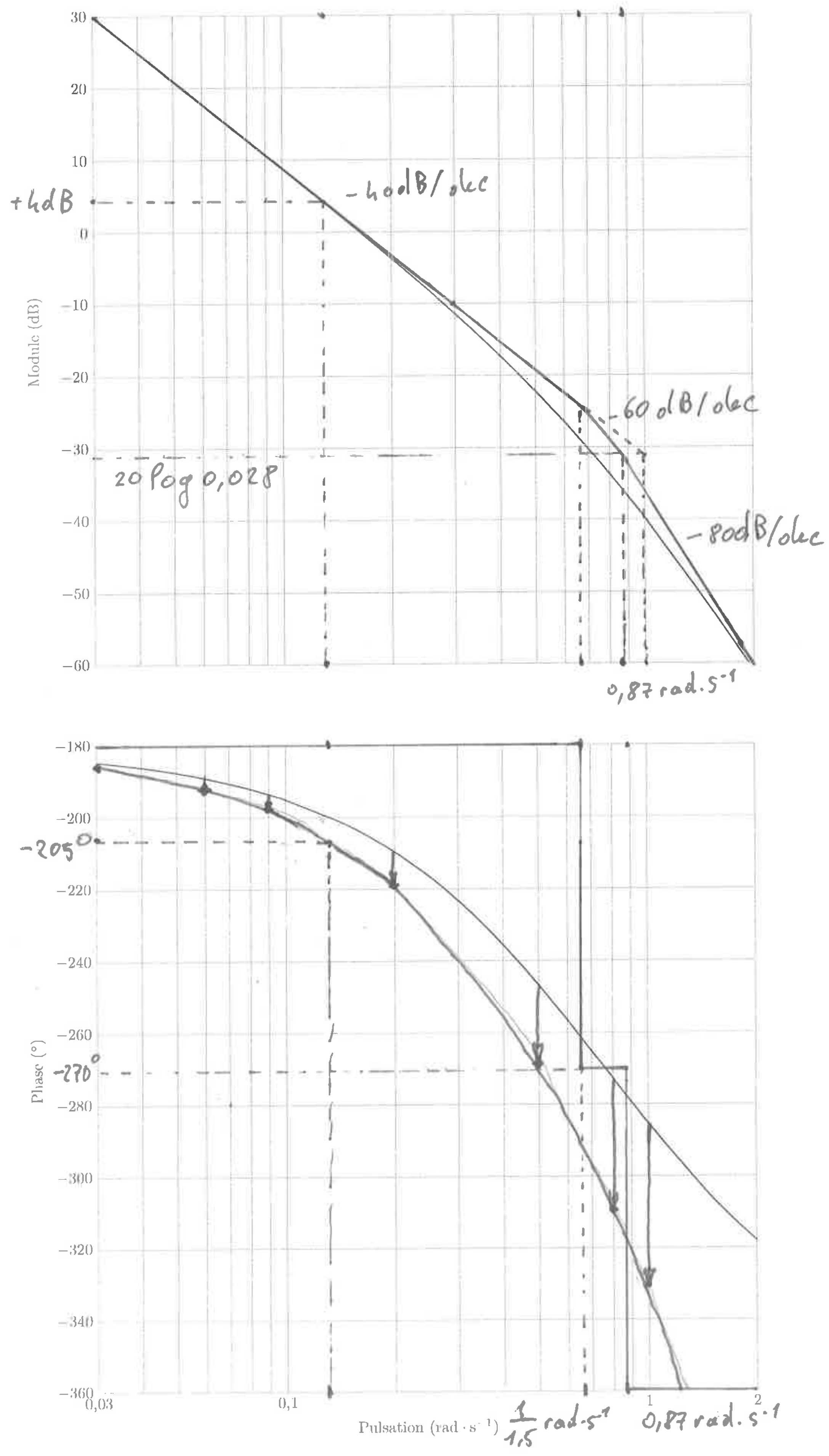


Figure B Diagramme de Bode de la fonction $A_r(p)H(p)F(p)$

On voit que la phase de la FTBO non corrigée est inférieure à $-180°$ donc pour assurer le cahier des charges (critère de stabilité) il faut remonter la phase au dessus de $-180°$.

Or la phase d'une correction proportionnelle est nulle et celle d'un correction P.I. est comprise entre $-90°$ et $0°$. Donc ce type de correction ne permettra pas de vérifier le cahier des charges.

Q17 On lit sur le diagramme tracé que à la pulsation de coupure à 0dB exigée par le cahier des charges : $\omega_c = 0{,}13 \text{ rad.s}^{-1}$ le gain et la phase de la FTBO non corrigée sont :

$$\underline{\varphi_{BONC}(\omega_c) = -205° \quad \text{et} \quad G_{dB\,BONC}(\omega_c) = +4 \text{ dB}}$$

Or on doit avoir $M\varphi = 30° = 180 + \varphi_{BONC}(\omega_c) + \arg(R(j\omega_c))$

et $G_{dB\,BO}(\omega_c) = 0 = G_{dB\,BONC}(\omega_c) + 20\log|R(j\omega_c)|$

Donc il faut : $\boxed{\arg(R(j\omega_c)) = 55° \quad \text{et} \quad 20\log|R(j\omega_c)| = -4 \text{ dB}}$

Ces valeurs peuvent aussi être déterminées par calcul :

$$\arg(R(j\omega_c)) = 30° - 180° + \arctan\left(\frac{0{,}13}{0{,}87}\right) + \arctan(1{,}5 \times 0{,}13) + 180° + 0{,}8 \times 0{,}13 \times \frac{180}{\pi}$$

soit $\boxed{\arg(R(j\omega_c)) = 55{,}5°}$

$$20\log|R(j\omega_c)| = 20\log 0{,}028 - 40\log 0{,}13 - 10\log\left(1 + \left(\frac{0{,}13}{0{,}87}\right)^2\right) - 10\log\left(1 + (1{,}5 \times 0{,}13)^2\right)$$

soit $\boxed{20\log|R(j\omega_c)| = -4{,}13 \text{ dB}}$

Q18 $$\boxed{T(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)\,B(p)\,R(p)\,F(p)\,A(p)}}$$

Q19 Pour une pulsation $\omega_0 = 0{,}001\ rad.s^{-1}$ ou $2\omega_0$ la courbe de gain de $H(p)\,B(p)\,F(p)\,A(p)$ est très proche de son asymptote d'équation $G_{dB\,BONC}(\omega) \approx 10 - 40\log\left(\frac{\omega}{0{,}09}\right)$ car $G_{dB\,BONC}(0{,}09) \approx 10\ dB$ soit $G_{dB\,BONC}(\omega) \approx -32 - 40\log\omega$

Or $R(p)$ est un correcteur P.I.D. dont la courbe de gain sera, pour un gain unitaire et une pulsation faible, proche d'une droite d'équation $G_{dB\,R}(\omega) = -20\log(\omega)$

car $C(p) = \dfrac{K\left(1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}{p}$

Donc le gain de $T_{BO}(\omega)$ pour une pulsation faible sera proche de $20\log|T_{BO}(j\omega)| \approx -32 - 60\log(\omega)$

Pour ω_0 et $2\omega_0$ on a respectivement 148 dB et 130 dB

Donc $\|T_{BO}(j\omega)\| \gg 1$

Donc $\|1 + H(j\omega).B(j\omega).R(j\omega).F(j\omega).A(j\omega)\| \approx \|H(j\omega).B(j\omega).R(j\omega).F(j\omega).A(j\omega)\|$

D'où $\|T(j\omega)\| \approx \dfrac{\|H(j\omega)\|}{\|H(j\omega).B(j\omega).R(j\omega).F(j\omega).A(j\omega)\|}$

Donc $$\boxed{\|T(j\omega)\| \approx \frac{1}{\|B(j\omega).R(j\omega).F(j\omega).A(j\omega)\|}}$$

Sachant que $\omega_0 < 2\omega_0 \ll \frac{1}{1{,}5}$ et $\omega_0 < 2\omega_0 \ll 0{,}87$

$\|F(j\omega_0)\| \approx \|F(j2\omega_0)\| \approx 1$ $\quad \|A(j\omega_0)\| \approx \|A(j2\omega_0)\| \approx 1$

D'autre part $\|B(j\omega)\| = 1$ Donc $\boxed{\|T(j\omega)\| \approx \dfrac{1}{\|R(j\omega)\|}}$

Q20 On sait que pour un système linéaire de fonction de transfert $H(p)$ ayant une entrée de la forme $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$ la sortie sera de la forme (Après le régime transitoire)

$$s(t) \approx E_0 \cdot \|H(j\omega)\| \sin(\omega t + \arg(H(j\omega)))$$

Donc $\theta(t) \approx C_{00} \|T(j\omega)\| \sin(\omega t + \arg(T(j\omega)))$

D'où l'amplitude de $\theta(t)$ sera pour $\omega \in [\omega_0 ; 2\omega_0]$

$$\boxed{\Theta_{00} = \frac{C_{00}}{\|R(j\omega)\|}}$$

Pour respecter le critère d'écart de pointage on doit avoir $\Theta_{00} \leq 0{,}04° = 6{,}98.10^{-4}\ rad.s^{-1}$

soit $\boxed{\|R(j\omega)\| \geq \frac{C_{00}}{6{,}98.10^{-4}} \iff \|R(j\omega)\| \geq 0{,}043}$

Q21 La phase de $R(p)$ est de $\varphi_R(\omega) = -90° + 2\arctan(\tau\omega)$

or pour une marge de phase de $M\varphi = 30°$ à $\omega_c = 0{,}13\ rad.s^{-1}$ on doit avoir (voir Q17) $\varphi_R(\omega_c) = 55°$

Donc on a $\boxed{\tau = \frac{\tan\left(\frac{90+55}{2}\right)}{\omega_c} = 24{,}45}$

Q22 Le gain de $R(p)$ est de $G_{dBR}(\omega) = 20\log K - 20\log\omega + 20\log(1+\tau^2\omega^2)$

or pour une marge de phase de $M\varphi = 30°$ à $\omega_c = 0{,}13\ rad.s^{-1}$ on doit avoir (voir Q17) $G_{dBR}(\omega_c) = -4{,}13\ dB$

$20\log K = -4{,}13 + 20\log\omega_c - 20\log(1+\tau^2\omega_c^2) = -42{,}7 \Rightarrow \boxed{K = 7{,}33.10^{-3}}$

(23) $R(p) = \dfrac{K(1+\tau p)^2}{p}$

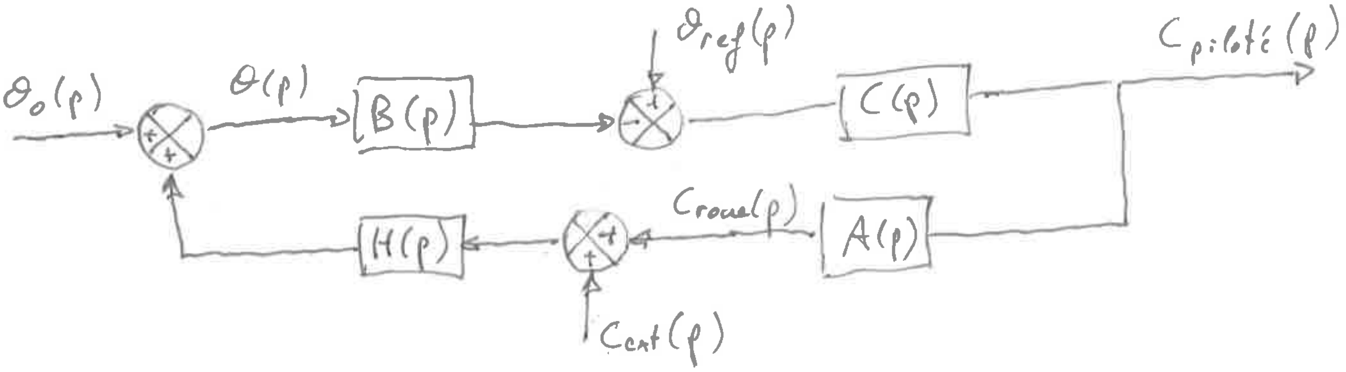
Donc $\|R(j\omega)\| = \dfrac{K}{\omega}(1+\tau^2\omega^2)$

A.N. $\|R(j\omega_0)\| = 7,33$ et $\|R(j.2.\omega_0)\| = 3,67$

Or pour respecter le critère de pointage il faut que $\|R(j\omega)\| \geqslant 0,043$ or $\|R(j\omega_0)\| > \|R(j2\omega_0)\| > 0,043$

Donc avec ce régulateur le critère de pointage du cahier des charges est verifié

(Q24) Le schema de la figure 12 est equivalent à :



Donc si $\theta_{ref} = 0$ et $C_{ext} = 0$ on a

$$T_d(p) = \frac{B(p).(-C(p))}{1 - B(p)(-C(p))\,A(p)\,H(p)}$$

soit $\boxed{T_d(p) = \dfrac{-B(p)\,C(p)}{1+B(p)\,C(p)\,A(p)\,H(p)}}$

$C_{pa}(t) = C_{piloté}(t+\tau) \Rightarrow C_{pa}(p) = C_{piloté}\, e^{\tau p}$

$$\frac{C_{pa}(p)}{\theta_0(p)} = \frac{C_{pa}(p)}{C_{piloté}(p)} \times T_d(p) \Rightarrow \frac{C_{pa}(p)}{\theta_0(p)} = \frac{-B(p)\,C(p)\,e^{0,7p}}{1+B(p)\,C(p)\,A(p)\,H(p)}$$

or $B(p) = e^{-0,7p}$ Donc $\boxed{\dfrac{C_{pa}(p)}{\theta_0(p)} = \dfrac{-C(p)}{1+B(p)\,C(p)\,A(p)\,H(p)} = \dfrac{T_d(p)}{B(p)}}$

Q25 $C_{pa}(p) = \dfrac{-C(p)}{1+B(p).C(p)A(p)H(p)}\Theta_0(p)$

or $\Theta_0(p) = \dfrac{\Theta_0}{p}$ Donc $p\,C_{pa}(p) = \dfrac{-C(p)\,\Theta_0}{1+B(p).C(p)A(p).H(p)}$

* $B(p) = e^{-0,7p}$ donc $\lim\limits_{p\to\infty} B(p) = 0$

* $A(p) = \dfrac{1}{1+\frac{p}{0,87}}e^{-0,1p}$ donc $\lim\limits_{p\to\infty} A(p) = 0$

* $H(p) = \dfrac{0,028}{p^2}$ donc $\lim\limits_{p\to\infty} H(p) = 0$

* $C(p) = \dfrac{K(1+\tau p)^2}{p} \times \dfrac{1}{1+1,5p} = \dfrac{K\left(\frac{1}{p}+\tau\right)^2}{\left(\frac{1}{p}+1,5\right)}$

Donc $\lim\limits_{p\to\infty} C(p) = \dfrac{K\tau^2}{1,5}$

Par consequent $\lim\limits_{p\to\infty} p\,C_{pa}(p) = \dfrac{-K\tau^2\Theta_0}{1,5}$

Or d'après le théorème de la valeur initiale.

$\lim\limits_{t\to 0} C_{pa}(t) = \lim\limits_{p\to\infty} p\,C_{pa}(p)$ Donc

$C_{pa}(0) = \dfrac{-K\tau^2\Theta_0}{1,5} = \dfrac{-7,33.10^{-3}\times 24,4^2\times 20\times\frac{\pi}{180}}{1,5}$

$\Rightarrow \boxed{C_{pa}(0) = -1,016\ N.m}$

Q26 La relation de la question 10 est

$$I_y \dot{\theta}(t) = -I_{ry}\, \omega_r(t)$$

Or de la figure 13 on en déduit $\dot{\theta}_{max} = -3{,}1°.s^{-1}$

soit $\dot{\theta}_{max} = \dfrac{-3{,}1 \times 60}{360} = -0{,}517$ tr/min

Donc $\omega_{r\,max} = \dfrac{-I_y}{I_{ry}}\, \dot{\theta}_{max} = \dfrac{-35{,}7}{4.10^{-4}} \times -0{,}517$

$$\boxed{\omega_{r\,max} = 46\,100 \text{ tr/min}}$$

Q27 Le cahier des charges impose que pour l'actionneur à roue de reaction on ait

$|C_{max}| \leqslant 0{,}005$ N.m et $|\Omega_{max}| \leqslant 2800$ tr/min

or $C_{pa}(0) = 1{,}016$ N.m et $\omega_{r\,max} = 46\,100$ tr/min

Donc le cahier des charges ne peut pas être vérifié pour un depointage initial de 20°

Q28 Pour $|\Delta\theta| > 0{,}3°$ la fonction de transfert du correcteur est proportionnelle à $p\,\Theta(p)$ qui est la transformée de Laplace de $\dot{\theta}(t)$ est bien une regulation en vitesse de rotation du satellite, de consigne $\dot{\theta}_c(t)$

Q29 Il faut une consigne maximale de

$$|\dot{\theta}_c|_{max} = \frac{I_{ry}}{I_r}\, \omega_{r\,max} = \frac{4.10^{-4}}{35{,}7} \times 2800 \times \frac{360}{60}$$

$$\boxed{|\dot{\theta}_c|_{max} = 0{,}188°.s^{-1}}$$

Q30 (A) Les quatre courbes montrent bien les deux phases de la correction :

* Pour $t \leqslant 1350\,s$ on a une régulation en vitesse avec une consigne constante de $|\dot{\theta}_c| = 0{,}015\,°.s^{-1}$ (pente de l'attitude θ)
* pour $t \geqslant 1350\,s$ on a une regulation en position avec une consigne constante $\theta_c = 0$

(B) On voit que la vitesse maximale de la roue de reaction est de $34\,rad.s^{-1} = 325\,tr/min$ ce qui verifie le cahier des charges $(\omega_r)_{max} \leqslant 2800\,tr/min$

On voit que le couple maximal de la roue de reaction est de $0{,}9\,mN.m = 0{,}0009\,N.m$ ce qui verifie le cahier des charges : $(C_{piloté})_{max} \leqslant 0{,}005\,Nm$

Q31 Le regulateur $R(p) = \dfrac{K(1+Tp)^2}{p}$ introduit un intégrateur sur la FTBO en amont de la perturbation. Donc l'ecart en regime permanent en reponse à un couple perturbateur constant sera nul.

Q32 En regime permanent, comme $H(p)$ est un double integrateur, on a $C_{roue} + C_{ext} = 0$

Donc $C_{roue} = -C_{ext} = -10^{-6}\,N.m$.

si on applique le TMD à la roue en projection sur son axe de rotation on obtient $C_{roue}(t) = I_{ry} \dfrac{d\omega_r(t)}{dt} = C_0$

Donc si C_0 est constant la vitesse de rotation de la roue va augmenter de manière constante. $\omega_r(t) = -\dfrac{C_0}{I_{ry}} t$

La valeur absolue de $\omega_r(t)$ étant limitée à 2800 tr/min. ~~A~~ une certaine durée T on aura une saturation de l'actionneur.

cette durée sera de $T = \dfrac{I_{ry}}{C_0} . \Omega_{max}$

$$\boxed{T = \frac{4.10^{-4}}{10^{-6}} \times 2800 \times \frac{2\pi}{60} = 1,17.10^{5}\,s \simeq 32,6\,h}$$

Q33 Les magneto coupleur permettent d'exercer un couple qui viendra s'opposer au couple de perturbation et permettra ainsi de ne pas arriver à un saturation des actionneurs.

l'action des magneto coupleurs est cependant periodique, et sinusoïdale. de periode π/ω_0