

Systèmes équivalents

1- Définition et intérêt du système équivalent

1.1- Définition

Un système équivalent doit remplir deux conditions quelque soit les vitesses des systèmes:

- ☞ **Avoir la même énergie cinétique que le système étudié**
- ☞ **Avoir les mêmes puissances que le système étudié**

1.2- Exemple

Soit un système S constitué de deux arbres 1 (arbre moteur) et 2 liés au bâti 0 par deux liaisons pivot. Et une crémaillère liée au bâti par une liaison glissière. Les arbres 1 et 2 ont respectivement I_m et I_2 pour moment d'inertie par rapport aux axes, et la crémaillère 3 à une masse M_3 .

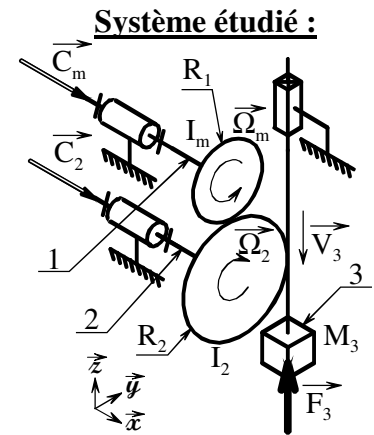
L'arbre 1 porte une roue dentée de rayon R_1 engrenant avec la roue dentée portée par l'arbre 2 et de rayon R_2 . Enfin la crémaillère 3 est entraînée en translation par la roue dentée de l'arbre 2.

Ce système est soumis à trois actions extérieures : Deux couples de vecteurs $\vec{C}_m$ et $\vec{C}_2$ appliqués respectivement sur 1 et 2 et une force $\vec{F}_3$.

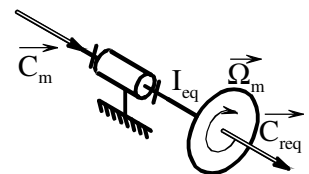
On note $\vec{\Omega}_m$ et $\vec{\Omega}_2$ les taux de rotation des arbres 1 et 2 et $\vec{V}_3$ le vecteur vitesse de la translation de la crémaillère 3 par rapport au bâti.

Le système équivalent se résume à un arbre E lié au bâti par une liaison pivot identique à celle entre le bâti et l'arbre 1. Cet arbre a le même taux de rotation $\vec{\Omega}_m$ par rapport au bâti que l'arbre 1 du système étudié.

Cet arbre équivalent a un moment d'inertie I_{eq} par rapport à son axe de rotation. Et s'applique sur cet arbre un couple résistant équivalent C_{req} .



Système équivalent :



☞ Les deux systèmes ayant la même énergie cinétique, on a :

$$\frac{1}{2} \cdot I_{eq} \cdot \vec{\Omega}_m^2 = \frac{1}{2} \cdot I_m \cdot \vec{\Omega}_m^2 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \vec{\Omega}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot M_3 \cdot \vec{V}_3^2$$

☞ Les deux systèmes ayant les mêmes puissances, on a :

$$\vec{C}_m \cdot \vec{\Omega}_m + \vec{C}_{req} \cdot \vec{\Omega}_m = \Sigma P(Ext \rightarrow S, R_g) + \Sigma P(Int \rightarrow S, R_g)$$

$$\vec{C}_m \cdot \vec{\Omega}_m + \vec{C}_{req} \cdot \vec{\Omega}_m = \vec{C}_m \cdot \vec{\Omega}_m + \vec{C}_2 \cdot \vec{\Omega}_2 + \vec{F}_3 \cdot \vec{V}_3$$

On a alors une écriture simplifiée du PFD : $C_m + C_{req} = I_{eq} \cdot \dot{\omega}_m$

$$\text{Ou du TEC : } C_m \cdot \omega_m + C_{req} \cdot \omega_m = \frac{d(1/2 \cdot I_{eq} \cdot \omega_m^2)}{dt}$$

- ☞ L'inertie équivalente se calcule à partir des différentes inerties et des rapports de transmission.
- ☞ Le couple résistant équivalent se calcule à partir des différentes actions (autre que le couple moteur) extérieures et intérieures et des rapports de transmission.
- ☞ En général on a un couple résistant équivalent négatif.

2- Calcul des inerties et moments équivalents

2.1- Moment d'inertie équivalent

Posons : $\Rightarrow \mathbf{k} = \frac{\omega_2}{\omega_m} = -\frac{\mathbf{R}_1}{\mathbf{R}_2}$ le rapport de transmission de l'arbre 1 à l'arbre 2

$\Rightarrow \mathbf{\lambda} = \frac{V_3}{\omega_2} = \mathbf{R}_2$ le rapport de transmission de l'arbre 2 à la crémaillère 3

L'équation (a) devient : $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{I}_{eq} \cdot \overrightarrow{\Omega_m}^2 = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{I}_m \cdot \overrightarrow{\Omega_m}^2 + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \overrightarrow{\Omega_m}^2 + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{\lambda}^2 \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \overrightarrow{\Omega_m}^2$

D'où le moment d'inertie équivalent sur l'arbre 1 : $\mathbf{I}_{eq} = \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{k}^2 + \mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{\lambda}^2 \cdot \mathbf{k}^2$

2.2- Inertie équivalente ramenée sur un arbre

On définit : $\Rightarrow$ l'inertie équivalente de l'arbre 2 ramenée sur l'arbre 1 : $\mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{k}^2$

$\Rightarrow$ l'inertie équivalente du solide 3 ramenée sur l'arbre 1 : $\mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{\lambda}^2 \cdot \mathbf{k}^2$

2.3- Couple équivalent

L'équation (b) devient : $\overrightarrow{C_{req}} \cdot \overrightarrow{\Omega_m} = \overrightarrow{C_2} \cdot \mathbf{k} \cdot \overrightarrow{\Omega_m} + \overrightarrow{F_3} \cdot \mathbf{\lambda} \cdot \mathbf{k} \cdot \overrightarrow{\Omega_m}$

D'où le couple équivalent sur l'arbre 1 : $\mathbf{C_{req}} = \mathbf{C_2} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{F_3} \cdot \mathbf{\lambda} \cdot \mathbf{k}$

2.4- Couple équivalent ramené sur un arbre

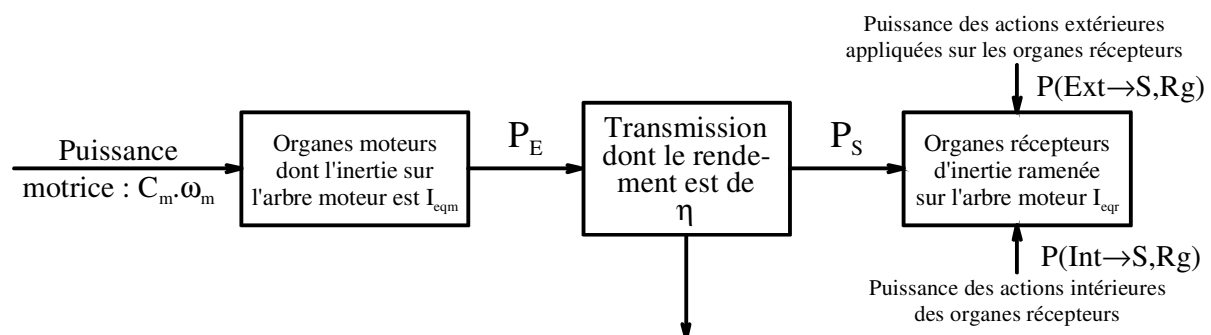
On définit : $\Rightarrow$ le couple équivalent au couple $\mathbf{C_2}$ ramené sur l'arbre 1 : $\mathbf{C_2} \cdot \mathbf{k}$

$\Rightarrow$ le couple équivalent à la force $\mathbf{F_3}$ ramenée sur l'arbre 1 : $\mathbf{F_3} \cdot \mathbf{\lambda} \cdot \mathbf{k}$

3- Transmission avec un rendement η

3.1- Systèmes étudié et équivalent

Soit la chaîne de transmission de puissance suivante :



$$\text{dissipée (quantité positive)} = \mathbf{P_E} - \mathbf{P_S} = (1 - \eta) \cdot \mathbf{P_E}$$

La transmission a un rendement η . Par définition ce rendement est le rapport entre les puissances à l'entrée de la transmission et celle à la sortie de la transmission.

$$\text{Le rendement s'écrit donc : } \eta = \frac{\mathbf{P_S}}{\mathbf{P_E}}$$

3.2- Application du TEC

☞ Sur le système constitué des organes moteur :

$$C_m \cdot \omega_m - P_E = I_{eqm} \cdot \omega_m \cdot \dot{\omega}_m$$

On en déduit : $P_E = C_m \cdot \omega_m - I_{eqm} \cdot \omega_m \cdot \dot{\omega}_m$

☞ Sur le système constitué des organes récepteurs :

$$\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S, R_g) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow S, R_g) + \eta \cdot P_E = I_{eqr} \cdot \omega_m \cdot \dot{\omega}_m$$

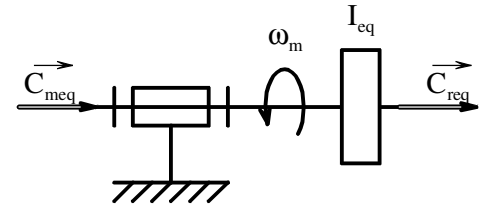
On en déduit :

$$\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S, R_g) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow S, R_g) + \eta \cdot C_m \cdot \omega_m = (\eta \cdot I_{eqm} + I_{eqr}) \cdot \omega_m \cdot \dot{\omega}_m$$

3.3- Modèle équivalent

Le modèle équivalent est un arbre dont la vitesse de rotation est celle du moteur : ω_m .

L'inertie I_{eq} de cet arbre est égale à la somme des inerties des organes en mouvement ramenées sur l'arbre moteur.



Cet arbre est soumis à deux couples :

- ☞ Un couple moteur équivalent au couple moteur du modèle étudié
- ☞ Un couple résistant équivalent aux différentes actions (autre que le couple moteur) extérieures et intérieures appliquées sur le système étudié

L'application du TEC à ce système donne : $C_{meq} \cdot \omega_m + C_{req} \cdot \omega_m = I_{eq} \cdot \omega_m \cdot \dot{\omega}_m$

On a alors une écriture simplifiée du PFD : $C_{meq} + C_{req} = I_{eq} \cdot \dot{\omega}_m$

Ou du TEC : $C_{meq} \cdot \omega_m + C_{req} \cdot \omega_m = \frac{d(1/2 \cdot I_{eq} \cdot \omega_m^2)}{dt}$

Les différents paramètres du système équivalent se calculent alors de la manière suivante :

☞ **Couple moteur équivalent :** $C_{meq} = \eta \cdot C_m$

☞ **Moment d'inertie équivalent :** $I_{eq} = \eta \cdot I_{eqm} + I_{eqr}$

avec I_{eqm} et I_{eqr} les inerties équivalentes des organes moteur et récepteur ramenées sur l'arbre moteur.

☞ **Couple résistant équivalent calculé à partir des actions extérieures et intérieures et des rapports de transmission.**

Remarques :

- ☞ En général la puissance du couple résistant équivalent est négative.
- ☞ Si on a des puissances d'actions extérieures ou intérieures appliquées sur les organes moteur (autre que le couple moteur) celles-ci sont multipliées par le rendement η :

$$C_{req} = \eta \cdot C_{reqm} + C_{reqr}$$

où : C_{reqm} est le couple résistant équivalent aux actions appliquées sur les organes moteur

et : C_{reqr} est le couple résistant équivalent aux actions appliquées sur les organes récepteur