

Principe Fondamental de la Dynamique : Cas des mouvements simples

1-principe général

1.1- Enoncé général

Un repère R_1 est galiléen lorsque :

- Ce repère est immobile dans un autre repère galiléen R_0 .
- Ce repère est en translation rectiligne uniforme dans un autre repère galiléen R_0 .

Pour tous les exercices de mécanique que nous traiterons, tous les repères fixes par rapport à la terre seront considérés comme galiléens. (Ce principe n'est pas toujours valable)

1.2- Traduction mathématique du PFD

Si les actions extérieures appliquées sur le système S sont modélisées par un torseur $\{\mathcal{J}(\text{Ext}/S)\}$, et les quantités d'accélération sont modélisées par le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S/R_g)\}$ on a alors :

Pour appliquer le PFD il faut donc exprimer le torseur dynamique et les torseurs des actions mécaniques extérieures

1.3- Remarque sur le PFS

2- Calcul du torseur dynamique

2.1- Quantité d'accélération d'une masse ponctuelle dm

Si on a une masse ponctuelle dm concentrée en un point M , alors la quantité d'accélération de cette masse dans le repère galiléen R_g est le produit de cette masse et du vecteur accélération du point M par rapport au repère galiléen. Quantité d'accélération de la masse dm :

2.2- Quantité d'accélération d'un solide S_i

Les quantités d'accélération d'un solide S_i se modélisent par un torseur constitué d'une résultante dynamique et d'un moment dynamique :

Avec : La résultante dynamique :

et : Le moment dynamique en A :

Pour un système S est constitué de n solides :

Si :

Alors :

3- Résultante dynamique pour tout mouvement

Soit un solide S_i de centre d'inertie G en mouvement quelconque par rapport au repère galiléen R_g .

A tout instant et pour tout point $M \in S_i$ on a : $\vec{V}_{M \in S_i / R_g} = \vec{V}_{G \in S_i / R_g} + \vec{MG} \wedge \vec{\Omega}(S_i / R_g)$ (1)

Sachant que : $\vec{a}_{M \in S_i / R_g} = \left(\frac{d\vec{V}_{M \in S_i / R_g}}{dt} \right)_{R_g}$ et que : $\vec{a}_{G \in S_i / R_g} = \left(\frac{d\vec{V}_{G \in S_i / R_g}}{dt} \right)_{R_g}$

On a en dérivant (1) dans R_g : $\vec{a}_{M \in S_i / R_g} = \vec{a}_{G \in S_i / R_g} + \left(\frac{d\vec{MG}}{dt} \right)_{R_g} \wedge \vec{\Omega}(S_i / R_g) + \vec{MG} \wedge \left(\frac{d\vec{\Omega}(S_i / R_g)}{dt} \right)_{R_g}$

$$\vec{a}_{M \in S_i / R_g} = \vec{a}_{G \in S_i / R_g} + \left[\left(\frac{d\vec{MG}}{dt} \right)_{R_i} + \vec{\Omega}(S_i / R_g) \wedge \vec{MG} \right] \wedge \vec{\Omega}(S_i / R_g) + \vec{MG} \wedge \left(\frac{d\vec{\Omega}(S_i / R_g)}{dt} \right)_{R_g}$$

Les points M et G étant fixes au cours du temps sur le solide S_i on a : $\left(\frac{d\vec{MG}}{dt} \right)_{R_i} = \vec{0}$

$$\vec{a}_{M \in S_i / R_g} = \vec{a}_{G \in S_i / R_g} + (\vec{\Omega}(S_i / R_g) \wedge \vec{MG}) \wedge \vec{\Omega}(S_i / R_g) + \vec{MG} \wedge \left(\frac{d\vec{\Omega}(S_i / R_g)}{dt} \right)_{R_g}$$

Or par définition la résultante dynamique est donnée par : $\vec{R}_D(S_i / R_g) = \iiint_{S_i} \vec{a}_{M \in S_i / R_g} \cdot dm$ donc :

$$\vec{R}_D(S_i / R_g) = \iiint_{S_i} \vec{a}_{G \in S_i / R_g} \cdot dm + \iiint_{S_i} [(\vec{\Omega}(S_i / R_g) \wedge \vec{MG}) \wedge \vec{\Omega}(S_i / R_g)] \cdot dm + \iiint_{S_i} \left[\vec{MG} \wedge \left(\frac{d\vec{\Omega}(S_i / R_g)}{dt} \right)_{R_g} \right] \cdot dm$$

$$\vec{R}_D(S_i / R_g) = \left(\iiint_{S_i} dm \right) \cdot \vec{a}_{G \in S_i / R_g} + \left[\vec{\Omega}(S_i / R_g) \wedge \left(\iiint_{S_i} \vec{MG} \cdot dm \right) \right] \wedge \vec{\Omega}(S_i / R_g) + \left(\iiint_{S_i} \vec{MG} \cdot dm \right) \wedge \left(\frac{d\vec{\Omega}(S_i / R_g)}{dt} \right)_{R_g}$$

Sachant que par définition de la masse m du solide S_i : $\iiint_{S_i} dm = m$ et que par définition du centre d'inertie G du solide S_i : $\iiint_{S_i} \vec{MG} \cdot dm = \vec{0}$ On obtient, quelque soit le mouvement du solide S_i par rapport au solide S_0 , la résultante dynamique du solide S_i dans le repère lié au solide S_0 :

4- Cas du mouvement de translation

4.1- Moment dynamique au centre de gravité

Soit le moment dynamique en G centre d'inertie du solide S_i : $\delta_{G(S_i / R_g)} = \iiint_{S_i} \vec{GM} \wedge \vec{a}_{M \in S_i / R_g} \cdot dm$

Or en translation : $\vec{a}_{M \in S_i / R_g} = \vec{a}_{G \in S_i / R_g}$ donc : $\delta_{G(S_i / R_g)} = \iiint_{S_i} \vec{GM} \wedge \vec{a}_{G \in S_i / R_g} \cdot dm = \left(\iiint_{S_i} \vec{GM} \cdot dm \right) \wedge \vec{a}_{G \in S_i / R_g}$

Or par définition du centre d'inertie : $\iiint_{S_i} \vec{MG} \cdot dm = \vec{0}$ Donc :

4.2- Expression du torseur dynamique

Soit S_i un solide de masse m et de centre d'inertie G , en mouvement de translation quelconque par rapport au repère galiléen R_g . Alors le torseur dynamique de ce solide par rapport au repère R_g est :

4.3- Théorème de la résultante dynamique

Si un solide S_i de masse m et de centre d'inertie G est en mouvement de translation quelconque par rapport au repère galiléen R_g . Alors :

Où : $\Sigma \overrightarrow{F_{Ext \rightarrow S}}$ est la somme des forces extérieures s'appliquant sur le système S

Et : $\overrightarrow{a_{G \in S/R_g}}$ est le vecteur accélération du centre de gravité G

4.4- Théorème du moment dynamique

Si un solide S_i de masse m et de centre d'inertie G est en mouvement de translation quelconque par rapport au repère galiléen R_g . Alors :

ou :

Où : $\Sigma \overrightarrow{M_G(Ext \rightarrow S_i)}$ et $\Sigma \overrightarrow{M_A(Ext \rightarrow S_i)}$ sont respectivement la somme des moments en G et en A des actions extérieures s'appliquant sur le solide S_i .

4.5- Cinématique du mouvement de translation rectiligne

Soit un solide S en mouvement de translation rectiligne pour lequel on pose :

☞ V_f et V_i les modules des vecteurs vitesses finales et initiales (Vecteurs de même sens). Et $v(t)$ la vitesse du solide S à un instant t .

☞ d la distance parcourue sur le mouvement

☞ T la durée de ce mouvement

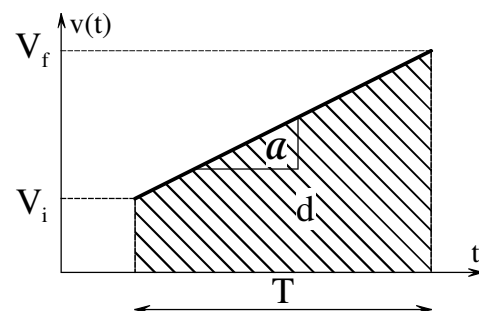
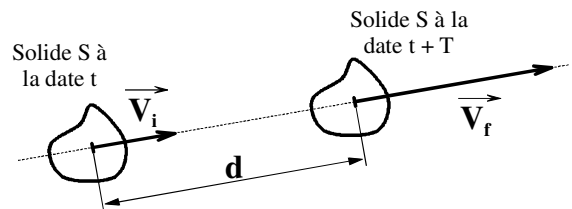
☞ a la valeur algébrique de l'accélération : $\|\overrightarrow{a_{G \in S/R_g}}\| = |a|$

En considérant le diagramme des vitesses du mouvement (courbe représentative de $v(t)$) on a :

☞ L'accélération $a(t)$ qui est la pente du diagramme des vitesses : $v(t)$

☞ La distance d parcourue sur la durée T qui est l'aire sous la courbe.

Par exemple, pour un mouvement uniformément varié (a est constante) on a :



Et : $\overrightarrow{a_{G \in S/R_g}}$ est parallèle à la direction de translation

5- Cas des mouvements de rotation autour d'un axe fixe

Soit le solide S_i en mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ par rapport au repère galiléen $R_g = (\overrightarrow{X_g}, \overrightarrow{Y_g}, \overrightarrow{u_\Delta})$.

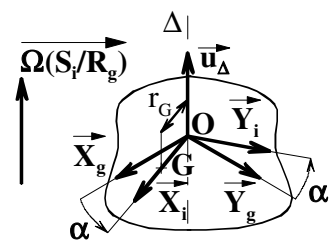
☞ $R_i = (\overrightarrow{X_i}, \overrightarrow{Y_i}, \overrightarrow{u_\Delta})$ un repère fixe par rapport au solide S_i

☞ O un point de l'axe Δ de direction $\overrightarrow{u_\Delta}$

☞ α le paramètre angulaire de la position de S_i dans R_g : $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{X_g}, \overrightarrow{X_i}})$

☞ $\overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)}$ le vecteur rotation du solide S_i par rapport au repère R_g : $\overrightarrow{\Omega(S_i/R_g)} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \omega \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$

☞ G le centre de gravité du solide S_i situé à une distance r_G de l'axe de rotation $\Delta = (O, \overrightarrow{u_\Delta})$



5.1- Moment dynamique par rapport à l'axe de rotation

On sait que le moment dynamique en O est défini par : $\delta_{O(S_i/R_g)} = \iiint_{S_i} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a_{M \in S_i/R_g}} . dm$

Associations à chaque point M du solide S_i un repère local $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{u}_\Delta)$ où :
 $\vec{u}_\Delta$ est parallèle à l'axe de rotation : $\vec{z} = \vec{Z}_0$
 $\vec{n}$ est perpendiculaire à l'axe de rotation et tel que (M, $\vec{n}$) est sécant à Δ (Il est défini par un rayon passant par M)
 $\vec{t}$ est orthogonal à l'axe de rotation (Il est tangent au cercle d'axe Δ passant par M).

Etant donné le mouvement de rotation autour de l'axe Δ à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\alpha}$ du solide S_i par rapport au Repère R_g , l'accélération du point M se compose de deux accélérations

☞ une accélération centripète : $-\vec{r} \cdot \omega^2 \cdot \vec{n}$

☞ une accélération tangentielle : $\vec{r} \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{t}$

On en déduit le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a_{M \in S_i/R_g}} = (\vec{r} \cdot \vec{n} + h \cdot \vec{u}_\Delta) \wedge (-\vec{r} \cdot \omega^2 \cdot \vec{n} + \vec{r} \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{t})$$

Sachant que le moment dynamique en O est défini par : $\delta_{O(S_i/R_g)} = \iiint_{S_i} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{a_{M \in S_i/R_g}} . dm$

$$\delta_{O(S_i/R_g)} = \iiint_{S_i} (\vec{r}^2 \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{u}_\Delta - \vec{r} \cdot h \cdot \omega^2 \cdot \vec{t} - \vec{r} \cdot h \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{n}) . dm$$

$$\delta_{O(S_i/R_g)} = \iiint_{S_i} r^2 . dm \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{u}_\Delta + \iiint_{S_i} (-\vec{r} \cdot h \cdot \omega^2 \cdot \vec{t} - \vec{r} \cdot h \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{n}) . dm$$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{t}$ varient à l'intérieur de l'intégrale, mais restent toujours orthogonaux à $\vec{u}_\Delta$.

Donc le vecteur : $\iiint_{S_i} (-\vec{r} \cdot h \cdot \omega^2 \cdot \vec{t} - \vec{r} \cdot h \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{n}) . dm$ est orthogonal à $\vec{u}_\Delta$.

Donc : $\left[\iiint_{S_i} (-\vec{r} \cdot h \cdot \omega^2 \cdot \vec{t} - \vec{r} \cdot h \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{n}) . dm \right] \cdot \vec{u}_\Delta = 0$

Où : ☞ $I_\Delta(S_i)$ est le moment d'inertie du solide S_i par rapport à l'axe $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$

☞ $I_\Delta(S_i)$ est défini par l'intégrale sur le solide S_i :

☞ L'unité S.I. de ce moment d'inertie est le :

5.2- Théorème du moment dynamique par rapport à un axe de rotation fixe

Soit le solide S_i en rotation d'axe (Δ) (fixe dans R_g) à la vitesse angulaire ω par rapport au repère R_g . En posant :

☞ α : la position angulaire du solide S_i par rapport au repère galiléen R_g :

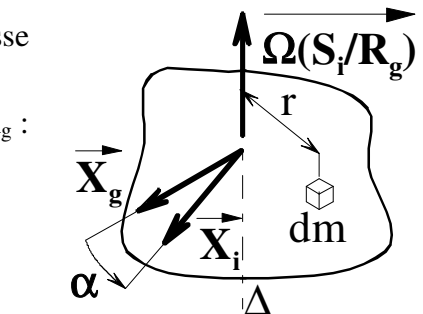
$$\omega = \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$$

☞ $I_\Delta(S_i)$: Le moment d'inertie par rapport à l'axe (Δ) du solide S_i :

$$I_\Delta(S_i) = \iiint_{S_i} r^2 . dm$$

☞ $\Sigma \mathcal{M}_\Delta(\text{Ext} \rightarrow S_i)$: la somme des moments par rapport à l'axe Δ des actions extérieures.

On a alors :



Cas où l'axe de rotation est l'axe $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$:

Dans ce cas la somme des moments par rapport à l'axe de rotation est la projection sur l'axe $\vec{Z}$ de la somme des moments en O des actions extérieures. On a donc :

5.3- Cinématique du mouvement de rotation autour d'un axe fixe

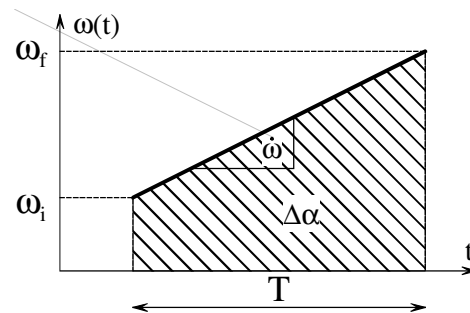
Soit un solide S en mouvement de rotation autour d'un axe fixe pour lequel on pose :

- ☞ ω_f et ω_i les vitesses angulaires finales et initiales du mouvement. Et $\omega(t)$ la vitesse angulaire du solide S à un instant t.
- ☞ $\dot{\omega}(t)$ l'accélération angulaire du mouvement
- ☞ T la durée de ce mouvement
- ☞ $\Delta\alpha$ l'angle parcouru sur la durée T du mouvement

En considérant le diagramme des vitesses du mouvement (courbe représentative de $\omega(t)$) on a :

- ☞ L'accélération $\dot{\omega}(t)$ qui est la pente du diagramme des vitesses : $\omega(t)$
- ☞ L'angle parcouru $\Delta\alpha$ sur la durée T qui est l'aire sous la courbe $\omega(t)$.

Par exemple, pour un mouvement **uniformément varié** ($\dot{\omega}$ est constante) on a :



6- Cas des mouvements plan quelconques

Considérons un solide S_i de centre d'inertie G en mouvement plan de normale $\Delta = (G, \vec{u}_\Delta)$ par rapport au repère Galiléen R_g . Le torseur cinématique de ce mouvement est donc tel que :

$$\{\mathcal{V}(S_i/R_g)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_i/R_g) \\ \vec{V}_{M \in S_i/R_g} \end{array} \right\}_M \quad \text{Avec :} \quad \vec{\Omega}(S_i/R_g) = \omega \cdot \vec{u}_\Delta \quad \text{et} \quad \forall M : \quad \vec{V}_{M \in S_i/R_g} \cdot \vec{u}_\Delta = 0$$

5.1- Démonstration

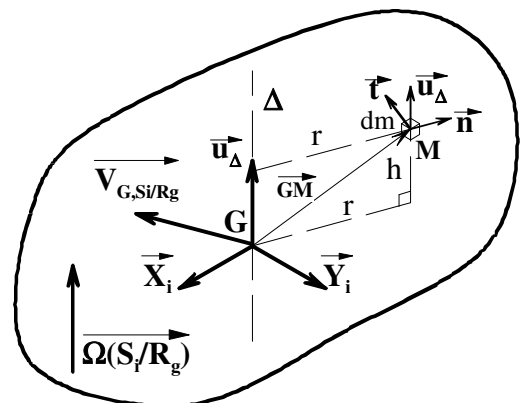
On pose les repères suivant : $R_g = (\vec{X}_g, \vec{Y}_g, \vec{u}_\Delta)$ un repère galiléen et $R_i = (\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{u}_\Delta)$ un repère fixe par rapport au solide S_i .

Associés à chaque point M du solide S_i une masse infiniment petite dm et un repère local orthonormé $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{u}_\Delta)$ où :

- ☞ $\vec{u}_\Delta$ est orthogonal au plan du mouvement.
- ☞ $\vec{n}$ est tel que $(M, \vec{n})$ est sécant à $(G, \vec{u}_\Delta)$
- ☞ $\vec{t}$ est orthogonal à $\vec{n}$ et $\vec{u}_\Delta$. avec $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{u}_\Delta)$ direct

Chaque point M de S_i peut alors être défini par des coordonnées cylindrique où r est la distance de M à l'axe $\Delta = (G, \vec{u}_\Delta)$ et h la distance entre le point M et le plan normal à Δ passant par G.

On a donc : $\vec{GM} = r \cdot \vec{n} + h \cdot \vec{u}_\Delta$



Déterminons la projection sur $\vec{u}_\Delta$ du moment dynamique du solide S_i dans son mouvement par rapport au repère Galiléen R_g . Par définition :

$$\delta_G(\vec{S}_i/R_g) \cdot \vec{u}_\Delta = \iiint_{S_i} \vec{GM} \wedge \vec{a}_{M \in S_i/R_g} \cdot d\vec{m} \cdot \vec{u}_\Delta$$

Par la relation de Varignon :

$$\vec{V}_{M \in S_i/R_g} = \vec{V}_{G \in S_i/R_g} + \vec{\Omega}(S_i/R_g) \wedge \vec{GM}$$

Par dérivation temporelle dans le repère R_g :

$$\vec{a}_{M \in S_i/R_g} = \vec{a}_{G \in S_i/R_g} + \left(\frac{d \vec{\Omega}(S_i/R_g)}{dt} \wedge \vec{GM} \right)_{R_g}$$

D'où :

$$\delta_G(\vec{S}_i/R_g) \cdot \vec{u}_\Delta = \iiint_{S_i} \vec{GM} \wedge \vec{a}_{G \in S_i/R_g} \cdot d\vec{m} \cdot \vec{u}_\Delta + \iiint_{S_i} \vec{GM} \wedge \left(\frac{d \vec{\Omega}(S_i/R_g)}{dt} \wedge \vec{GM} \right)_{R_g} \cdot d\vec{m} \cdot \vec{u}_\Delta$$

$$\delta_G(\vec{S}_i/R_g) \cdot \vec{u}_\Delta = \left(\iiint_{S_i} \vec{GM} \cdot d\vec{m} \right) \wedge \vec{a}_{G \in S_i/R_g} \cdot \vec{u}_\Delta + \iiint_{S_i} \vec{GM} \wedge \left(\frac{d \vec{\Omega}(S_i/R_g)}{dt} \wedge \vec{GM} \right)_{R_g} \cdot d\vec{m} \cdot \vec{u}_\Delta$$

Or G étant le centre d'inertie du solide S_i :

$$\iiint_{S_i} \vec{GM} \cdot d\vec{m} = \vec{0} \quad \text{Et par permutation circulaire du}$$

produit mixte, on en déduit :

$$\delta_G(\vec{S}_i/R_g) \cdot \vec{u}_\Delta = \iiint_{S_i} \vec{u}_\Delta \wedge \vec{GM} \cdot \left(\frac{d \vec{\Omega}(S_i/R_g)}{dt} \wedge \vec{GM} \right)_{R_g} \cdot d\vec{m}$$

$$\delta_G(\vec{S}_i/R_g) \cdot \vec{u}_\Delta = \iiint_{S_i} \vec{u}_\Delta \wedge (\vec{r} \cdot \vec{n} + h \cdot \vec{u}_\Delta) \cdot \left(\frac{d \vec{\Omega}(S_i/R_g)}{dt} \wedge \vec{GM} \right)_{R_g} \cdot d\vec{m}$$

$$\delta_G(\vec{S}_i/R_g) \cdot \vec{u}_\Delta = \iiint_{S_i} \vec{r} \cdot \vec{t} \cdot \left(\frac{d \vec{r} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{t}}{dt} \right)_{R_g} \cdot d\vec{m} = \iiint_{S_i} \vec{r} \cdot \vec{t} \cdot (\vec{r} \cdot \dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{t} + \vec{r} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{u}_\Delta \wedge \vec{t}) \cdot d\vec{m}$$

$$\delta_G(\vec{S}_i/R_g) \cdot \vec{u}_\Delta = \iiint_{S_i} \vec{r} \cdot \vec{t} \cdot (\vec{r} \cdot \dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{t} + \vec{r} \cdot \vec{\omega}^2 \cdot \vec{n}) \cdot d\vec{m}$$

Soit finalement :

$$\delta_G(\vec{S}_i/R_g) \cdot \vec{u}_\Delta = \dot{\vec{\omega}} \cdot \iiint_{S_i} \vec{r}^2 \cdot d\vec{m}$$

La projection du moment dynamique sur la direction $\vec{u}_\Delta$ orthogonal au plan du mouvement est donc :

Où $I_{G,\Delta}$ est le moment d'inertie du solide S_i par rapport à l'axe (G,Δ) orthogonale au plan du mouvement.

5.2- Théorème de la résultante dynamique

Si un solide S_i de masse m et de centre d'inertie G est en mouvement plan quelconque par rapport au repère galiléen R_g . Alors :

Où : $\sum \vec{F}_{\text{Ext} \rightarrow S}$ est la somme des forces extérieures s'appliquant sur le système S

Et : $\vec{a}_{G \in S/R_g}$ est le vecteur accélération du centre de gravité G

5.3- Théorème du moment dynamique

Si un solide S_i de masse m et de centre d'inertie G est en **mouvement plan orthogonal à la direction Δ** (orthogonal au vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$) par rapport au repère galiléen R_g . Alors :

ou :

Où : $\sum \vec{\mathcal{M}}_G(\text{Ext} \rightarrow S_i)$ et $\sum \vec{\mathcal{M}}_A(\text{Ext} \rightarrow S_i)$ sont respectivement la somme des moments en G et en A des actions extérieures s'appliquant sur le solide S_i .