

TD* - Chronométrie du sang : Corrigé**Question 1**

On a : $\vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = \left(\frac{d \vec{OG}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d(R-r) \cdot \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d(R-r) \cdot \vec{z}_1}{dt} \right)_{R_1} + \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge (R-r) \cdot \vec{z}_1$

Soit : $\vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = \vec{0} + \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1 \wedge (R-r) \cdot \vec{z}_1$ $\vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1$

D'autre part : $\vec{\Gamma}_{G \in \text{bille}/0} = \left(\frac{d \vec{V}_{G \in \text{bille}/0}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0}$

$$\vec{\Gamma}_{G \in \text{bille}/0} = \left(\frac{d \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1}{dt} \right)_{R_1} + \vec{\Omega}_{R1/R0} \wedge \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1$$

$$\vec{\Gamma}_{G \in \text{bille}/0} = \ddot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1 + \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1 \wedge \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1$$

Soit finalement : $\vec{\Gamma}_{G \in \text{bille}/0} = \ddot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1 - \dot{\theta}^2 \cdot (R-r) \cdot \vec{z}_1$

Question 2

D'après la relation de Varignon $\vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = \vec{V}_{I \in \text{bille}/0} + \vec{GI} \wedge \vec{\Omega}_{\text{bille}/0} = \vec{V}_{I \in \text{bille}/0} + \omega_b \cdot \vec{y}_1 \wedge r \cdot \vec{z}_1$

Or ayant un roulement sans glissement en I : $\vec{V}_{I \in \text{bille}/0} = \vec{0}$ soit : $\vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = -r \cdot \omega_b \cdot \vec{x}_1$

Sachant que $\vec{V}_{G \in \text{bille}/0} = \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1$ On obtient : $-r \cdot \omega_b = \dot{\theta} \cdot (R-r)$ Soit : $\omega_b = -\dot{\theta} \cdot \frac{R-r}{r}$

Question 3

Faisons un bilan des actions mécaniques extérieures appliquées sur la bille :

- ☞ Le poids de la bille : Force appliquée au point G de vecteur $m \cdot g \cdot \vec{z}_0$
- ☞ Action du fluide sur la bille : Force appliquée au point G de vecteur $-f_v \cdot \vec{V}_{G \in \text{bille}/0}$
- ☞ Action de la cuvette sur la bille : Force appliquée au point I de vecteur $T_1 \cdot \vec{x}_1 - N_1 \cdot \vec{z}_1$
- ☞ Action de la bobine sur la bille : Force appliquée au point G de vecteur $f(t) \cdot \vec{x}_0$

On en déduit la somme des moments en I des actions extérieures projeté sur l'axe $\vec{y}_1$:

$$\Sigma \mathcal{M}_I(\vec{\text{Ext}} \rightarrow \text{bille}) \cdot \vec{y}_1 = \vec{IG} \wedge m \cdot g \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{y}_1 + \vec{IG} \wedge (-f_v \cdot \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1) \cdot \vec{y}_1 + 0 + \vec{IG} \wedge f(t) \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{y}_1$$

$$\Sigma \mathcal{M}_I(\vec{\text{Ext}} \rightarrow \text{bille}) \cdot \vec{y}_1 = -r \cdot \vec{z}_1 \wedge m \cdot g \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{y}_1 + r \cdot \vec{z}_1 \wedge f_v \cdot \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 - r \cdot \vec{z}_1 \wedge f(t) \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{y}_1$$

$$\Sigma \mathcal{M}_I(\vec{\text{Ext}} \rightarrow \text{bille}) \cdot \vec{y}_1 = -r \cdot m \cdot g \cdot \vec{y}_1 \wedge \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_0 + r \cdot f_v \cdot \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 - r \cdot f(t) \cdot \vec{y}_1 \wedge \vec{z}_1 \cdot \vec{x}_0$$

$$\Sigma \mathcal{M}_I(\vec{\text{Ext}} \rightarrow \text{bille}) \cdot \vec{y}_1 = -r \cdot m \cdot g \cdot \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_0 + r \cdot f_v \cdot \dot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1 - r \cdot f(t) \cdot \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0$$

$$\Sigma \mathcal{M}_I(\vec{\text{Ext}} \rightarrow \text{bille}) \cdot \vec{y}_1 = r \cdot m \cdot g \cdot \sin \theta + r \cdot f_v \cdot \dot{\theta} \cdot (R-r) - r \cdot f(t) \cdot \cos \theta$$

D'autre part le mouvement de la bille étant un mouvement plan ($\vec{x}_1, \vec{z}_1$) et G étant le centre d'inertie de la bille, le moment dynamique de la bille en G dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ projeté sur l'axe $\vec{y}_1$ est : $\delta_G(b/0) \cdot \vec{y}_1 = I_{G, \vec{y}_1}(b) \cdot \ddot{\theta}$

La bille étant une sphère homogène pleine de masse m et de rayon r : $I_{G, \vec{y}_1}(b) = \frac{2 \cdot m \cdot r^2}{5}$

Or on a montré que : $\omega_b = -\dot{\theta} \cdot \frac{R-r}{r}$ Donc : $\delta_G(b/0) \cdot \vec{y}_1 = -\ddot{\theta} \cdot \frac{R-r}{r} \cdot \frac{2 \cdot m \cdot r^2}{5} = -\frac{2 \cdot m \cdot r \cdot (R-r)}{5} \cdot \ddot{\theta}$

Sachant que : $\vec{\Gamma}_{G \in \text{bille}/0} = \ddot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1 - \dot{\theta}^2 \cdot (R-r) \cdot \vec{z}_1$ par la relation de Varignon on a :

$$\delta_I(b/0) \cdot \vec{y}_1 = \delta_G(b/0) \cdot \vec{y}_1 + \vec{IG} \wedge m \cdot (\ddot{\theta} \cdot (R-r) \cdot \vec{x}_1 - \dot{\theta}^2 \cdot (R-r) \cdot \vec{z}_1) \cdot \vec{y}_1 \quad \text{Avec : } \vec{IG} = -r \cdot \vec{z}_1$$

$$\delta_I(b/0) \cdot \vec{y}_1 = -\frac{2 \cdot m \cdot r \cdot (R-r)}{5} \cdot \ddot{\theta} - m \cdot r \cdot (R-r) \cdot \ddot{\theta}$$

Soit finalement : $\delta_I(b/0) \cdot \vec{y}_1 = -\frac{7 \cdot m \cdot r \cdot (R-r)}{5} \cdot \ddot{\theta}$

D'où le TMD en I appliqué à la bille et projeté sur l'axe $\vec{y}_1$: $\Sigma \mathcal{M}_I(\vec{E} \rightarrow \vec{bille}) \cdot \vec{y}_1 = \delta_I(b/0) \cdot \vec{y}_1$

$$r.m.g.\sin \theta + r.f_v.\dot{\theta}.(R-r) - r.f(t).\cos \theta = -\frac{7.m.r.(R-r)}{5}.\ddot{\theta}$$

Soit après simplification on obtient l'équation différentielle du mouvement de la bille :

$$\frac{7.m.(R-r)}{5}.\ddot{\theta} + f_v.\dot{\theta}.(R-r) + m.g.\sin \theta = f(t).\cos \theta$$

Question 4

La linéarisation de l'équation différentielle pour un angle θ petit ($\sin \theta \approx \theta$ et $\cos \theta \approx 1$) donne :

$$f(t) = \frac{7}{5}.m.(R-r).\ddot{\theta} + f_v.(R-r).\dot{\theta} + m.g.\theta$$

En passant cette équation dans le domaine de Laplace on obtient :

$$F(p) = \frac{7}{5}.m.(R-r).p^2.\Theta(p) + f_v.(R-r).p.\Theta(p) + m.g.\Theta(p)$$

On obtient donc la fonction de transfert : $H(p) = \frac{\Theta(p)}{F(p)} = \frac{1}{m.g + f_v.(R-r).p + \frac{7}{5}.m.(R-r).p^2}$

Soit sous une forme canonique :

$$H(p) = \frac{\frac{1}{m.g}}{1 + \frac{f_v.(R-r)}{m.g}.p + \frac{7.(R-r)}{5.g}.p^2}$$

Question 5

Il s'agit d'une fonction de transfert du 2nd

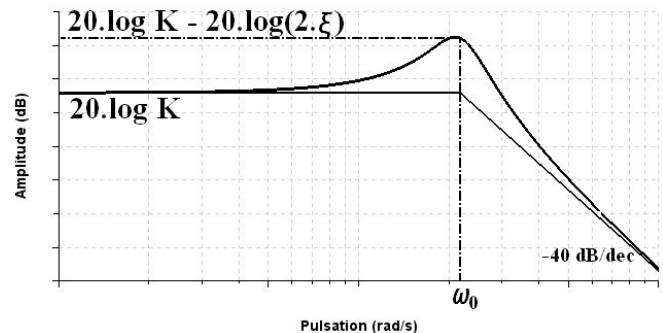
ordre : ☞ De gain statique : $K = \frac{1}{m.g}$

☞ De pulsation propre non amortie :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{5.g}{7.(R-r)}}$$

☞ De facteur d'amortissement :

$$\xi = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{f_v.(R-r)}{m.g} \quad \xi = \frac{f_v}{2.m} \cdot \sqrt{\frac{5.(R-r)}{7.g}}$$



Question 6

Le plus simple est de régler la pulsation des bobines motrices à la pulsation $\omega_{bob} = \omega_0$. Ainsi nous aurons toujours quelque soit la viscosité du sang une amplitude A du mouvement de la bille telle que :

$$20.\log A = 20.\log K - 20.\log(2.\xi) \quad \text{Avec : } K = \frac{1}{m.g} = 25 \text{ rad.N}^{-1} \quad \text{et} \quad 2.\xi = \frac{f_v}{m} \cdot \sqrt{\frac{5.(R-r)}{7.g}} = 8.f_v$$

Il sera facile d'obtenir ξ et donc f_v en connaissant l'amplitude A_0 du mouvement de la bille pour une pulsation faible qui est telle que : $20.\log A = 20.\log A_0$

Application numérique :

$$\omega_{bob} = \omega_0 = \sqrt{\frac{5.g}{7.(R-r)}} = \sqrt{\frac{5 \times 9,81}{7.10^{-3} \cdot (19,7-5)}} = 21,8 \text{ rad.s}^{-1}$$

Question 7

On a : $20.\log A_m = 20.\log K - 20.\log(8.f_v)$ et : $1 \text{ rad.s}^{-1} \ll \omega_0 \Rightarrow 20.\log A_0 \approx 20.\log K$

D'où : $20.\log A_m = 20.\log A_0 - 20.\log(8.f_v) \Rightarrow 20.\log \frac{A_0}{A_m} = 20.\log(8.f_v)$ Soit :

$$f_v = \frac{A_0}{8.A_m} = \frac{0,055}{8 \times 6,5} = 1,06.10^{-3} \text{ N.s.m}^{-1}$$

$$\text{Et : } \eta = \frac{f_v}{6.\pi.r} = \frac{1,06.10^{-3}}{6.\pi \times 5.10^{-3}} = 1,1.10^{-2} \text{ Pa.s}$$

Question 8

Faisons un bilan des actions mécaniques extérieures appliquées sur la bille :

- ☞ Le poids de la bille : Force appliquée au point G de vecteur $m.g. \vec{z}_0$
- ☞ Action du fluide sur la bille : Force appliquée au point G de vecteur $-f_v. \vec{V}_{G \in \text{bille}/0}$
- ☞ Action de la cuvette sur la bille : Force appliquée au point I de vecteur $T_1. \vec{x}_1 - N_1. \vec{z}_1$
- ☞ Action de la bobine sur la bille : Force appliquée au point G de vecteur $f(t). \vec{x}_0$

On en déduit la somme des moments en G des actions extérieures projeté sur l'axe $\vec{y}_1$:

$$\Sigma \mathcal{M}_G(\vec{E}_{\text{Ext}} \rightarrow \text{bille}). \vec{y}_1 = 0 + 0 + \overrightarrow{GI} \wedge (T_1. \vec{x}_1 + N_1. \vec{z}_1). \vec{y}_1 + 0$$

$$\Sigma \mathcal{M}_G(\vec{E}_{\text{Ext}} \rightarrow \text{bille}). \vec{y}_1 = r. \vec{z}_1 \wedge (T_1. \vec{x}_1 + N_1. \vec{z}_1). \vec{y}_1 \quad \Sigma \mathcal{M}_G(\vec{E}_{\text{Ext}} \rightarrow \text{bille}). \vec{y}_1 = r.T_1$$

On a également la somme des résultantes des actions extérieures projeté sur l'axe $\vec{z}_1$:

$$\Sigma \vec{F}_{\text{Ext} \rightarrow \text{bille}}. \vec{z}_1 = m.g. \vec{z}_0. \vec{z}_1 - f_v. \dot{\theta}. (R-r). \vec{x}_1. \vec{z}_1 + (T_1. \vec{x}_1 - N_1. \vec{z}_1). \vec{z}_1 + f(t). \vec{x}_0. \vec{z}_1$$

$$\Sigma \vec{F}_{\text{Ext} \rightarrow \text{bille}}. \vec{z}_1 = m.g.\cos \theta + N_1 + f(t).\sin \theta$$

D'autre part on a déterminé précédemment les projections du moment dynamique en G sur l'axe $\vec{y}_1$ et de la résultante dynamique sur l'axe $\vec{z}_1$:

$$\delta_{G(b/0)}. \vec{y}_1 = -\frac{2.m.r.(R-r)}{5}.\ddot{\theta} \quad \text{et :} \quad m.\Gamma_{G \in \text{bille}/0}. \vec{z}_1 = -m.\dot{\theta}^2.(R-r)$$

Donc l'application à la bille du TMD en G projeté sur $\vec{y}_1$ et du TRD projeté sur $\vec{z}_1$ donne :

$$-\frac{2.m.r.(R-r)}{5}.\ddot{\theta} = r.T_1 \quad \text{et :} \quad m.g.\cos \theta - N_1 + f(t).\sin \theta = -m.\dot{\theta}^2.(R-r)$$

On a donc bien : $T_1(t) = a_1.\ddot{\theta}(t)$ et $N_1(t) = f(t).\sin \theta(t) + b_1.\cos \theta + c_1.\dot{\theta}^2(t)$

Avec : $a_1 = -\frac{2.m.(R-r)}{5}$ $b_1 = m.g$ $c_1 = m.(R-r)$