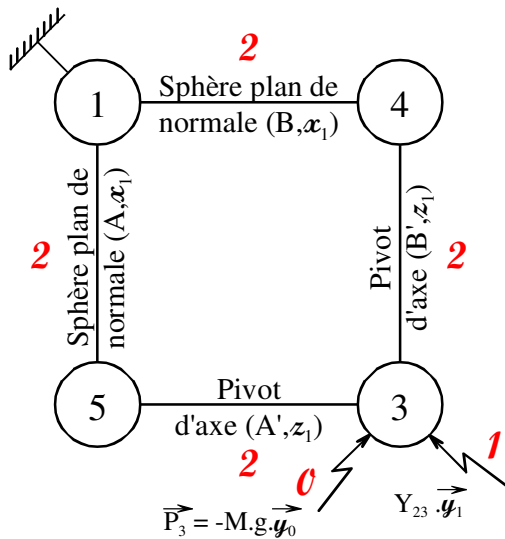


TD2 : Skip de levage : Corrigé

1- Graphe de structure

(En rouge le nombre d'inconnues des actions)



(En rouge le nombre d'inconnues des actions)

Du fait de la liaison pivot d'axe $(A', \overrightarrow{z_1})$ le torseur de l'action

$$\text{de 3 sur 4 s'écrit : } \{T_{3 \rightarrow 4}\} = {}_{B'} \begin{Bmatrix} X_{34} & L_{34} \\ Y_{34} & M_{34} \\ Z_{34} & 0 \end{Bmatrix} {}_{\mathcal{B}_1}.$$

$$\text{Avec le problème plan } (A, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}) : \{T_{3 \rightarrow 4}\} = {}_{B'} \begin{Bmatrix} X_{34} & 0 \\ Y_{34} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} {}_{\mathcal{B}_1}$$

$$\text{De même pour l'action de 3 sur 5 : } \{T_{3 \rightarrow 5}\} = {}_{A'} \begin{Bmatrix} X_{35} & 0 \\ Y_{35} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} {}_{\mathcal{B}_1}$$

Du fait de la liaison sphère plan de normale $(A, \overrightarrow{x_1})$ le torseur

$$\text{de l'action de 1 sur 4 s'écrit : } \{T_{1 \rightarrow 4}\} = {}_B \begin{Bmatrix} X_{14} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} {}_{\mathcal{B}_1}.$$

$$\text{Mais la liaison est non parfaite (avec frottement) donc ce torseur s'écrit : } \{T_{1 \rightarrow 4}\} = {}_B \begin{Bmatrix} X_{14} & 0 \\ Y_{14} & 0 \\ Z_{14} & 0 \end{Bmatrix} {}_{\mathcal{B}_1}$$

$$\text{Avec le problème plan } (A, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}) \text{ ce torseur est donc de la forme : } \{T_{1 \rightarrow 4}\} = {}_B \begin{Bmatrix} X_{14} & 0 \\ Y_{14} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} {}_{\mathcal{B}_1}$$

$$\text{De même pour l'action de 1 sur 5 : } \{T_{1 \rightarrow 5}\} = {}_A \begin{Bmatrix} X_{15} & 0 \\ Y_{15} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} {}_{\mathcal{B}_1}$$

2- Isolement des galets 4 et 5

On isole le galet 4 et on fait un bilan des actions extérieures appliquées sur 4 :

☞ Action de 1 sur 4 : Force $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 4}}$ appliquée en B (Torseur d'axe passant par le point B)

☞ Action de 3 sur 4 : Force $\overrightarrow{F_{3 \rightarrow 4}}$ appliquée en B' (Torseur d'axe passant par le point B')

Ce galet 4 étant à l'équilibre (car inertie négligée), l'application du TMD (TMS) en B' : $\vec{0} + B' \vec{B} \wedge \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 4}} = \vec{0}$ montre que $B' \vec{B}$ est colinéaire à $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 4}}$.

Donc, le support de la force de 1 sur 4 (axe du glisseur $\{T_{1 \rightarrow 4}\}$) est la droite $(B'B) = (B, \overrightarrow{x_1})$.

Par un raisonnement identique avec le galet 5, On montre que :

Le support de la force de 1 sur 5 (axe du glisseur $\{T_{1 \rightarrow 5}\}$) est la droite $(A'A) = (A, \overrightarrow{x_1})$.

Ces deux actions ont donc des résultantes de la forme : $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 4}} = X_{14} \cdot \overrightarrow{x_1}$ et : $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 5}} = X_{15} \cdot \overrightarrow{x_1}$

3- Condition sur l'accélération pour maintenir la chaîne tendue

On isole l'ensemble $S = \{3, 4, 5\}$ et on fait un bilan des actions extérieures appliquées sur S :

☞ Action de 1 sur 4 : Force $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 4}} = X_{14} \cdot \overrightarrow{x_1}$ appliquée en B.

☞ Action de 1 sur 5 : Force $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 5}} = X_{15} \cdot \overrightarrow{x_1}$ appliquée en A.

☞ Action de 2 sur 3 : Force $\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 3}} = Y_{23} \cdot \overrightarrow{y_1}$ appliquée en C.

☞ Action de la pesanteur sur 3 (Poids de 3) : Force $\overrightarrow{P_3} = -M \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0}$ appliquée en G.

On en déduit la somme des résultantes des actions extérieures appliquées sur S projetée sur $\vec{y}_1$:

$$\Sigma \vec{F}_{\text{Ext} \rightarrow S} \cdot \vec{y}_1 = X_{14} \cdot \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 + X_{15} \cdot \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 + Y_{23} \cdot \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1 + - M \cdot g \cdot \vec{y}_0 \cdot \vec{y}_1 = Y_{23} - M \cdot g \cdot \cos \alpha$$

L'inertie des galets 4 et 5 étant négligée la résultante dynamique du système S projeté sur $\vec{y}_1$ est :

$$\vec{R}_D(S/\vec{0}) \cdot \vec{y}_1 = M \cdot \vec{a}_{G \in 3/1} \cdot \vec{y}_1 = M \cdot \gamma$$

Le théorème de la résultante dynamique projeté sur $\vec{y}_1$ ($\Sigma \vec{F}_{\text{Ext} \rightarrow S} \cdot \vec{y}_1 = \vec{R}_D(S/\vec{0}) \cdot \vec{y}_1$) donne donc :

$$M \cdot \gamma = Y_{23} - M \cdot g \cdot \cos \alpha \quad \text{Soit :} \quad Y_{23} = M \cdot \gamma + M \cdot g \cdot \cos \alpha = M \cdot (\gamma + g \cdot \cos \alpha)$$

La condition permettant de garder la chaîne tendue ($Y_{23} \geq 0$) s'écrit donc : $\gamma \geq -g \cdot \cos \alpha$

4- Détermination des actions en A, B et C

On isole l'ensemble $S = \{3, 4, 5\}$ et on fait un bilan des actions extérieures appliquées sur S :

☞ Action de 1 sur 4 : Force $\vec{F}_{1 \rightarrow 4} = X_{14} \cdot \vec{x}_1$ appliquée en B.

☞ Action de 1 sur 5 : Force $\vec{F}_{1 \rightarrow 5} = X_{15} \cdot \vec{x}_1$ appliquée en A.

☞ Action de 2 sur 3 : Force $\vec{F}_{2 \rightarrow 3} = Y_{23} \cdot \vec{y}_1$ appliquée en C.

☞ Action de la pesanteur sur 3 (Poids de 3) : Force $\vec{P}_3 = -M \cdot g \cdot \vec{y}_0$ appliquée en G.

On en déduit la somme des moments en D des actions extérieures projeté sur l'axe $\vec{z}_1$:

$$\Sigma \vec{M}_D(\text{Ext} \rightarrow S) \cdot \vec{z}_1 = \vec{DB} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 4} \cdot \vec{z}_1 + \vec{DA} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 5} \cdot \vec{z}_1 + \vec{DC} \wedge \vec{F}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_1 + \vec{DG} \wedge \vec{P}_3 \cdot \vec{z}_1$$

$$\Sigma \vec{M}_D(\text{Ext} \rightarrow S) \cdot \vec{z}_1 = -((d+b) \cdot \vec{x}_1 + a \cdot \vec{y}_1) \wedge X_{14} \cdot \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_1 - (d+b) \cdot \vec{x}_1 \wedge X_{15} \cdot \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_1 - (d \cdot \vec{x}_1 + (a+c) \cdot \vec{y}_1) \wedge Y_{23} \cdot \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_1 - h \cdot \vec{y}_0 \wedge (-M \cdot g \cdot \vec{y}_0) \cdot \vec{z}_1$$

$$\text{Soit :} \quad \Sigma \vec{M}_D(\text{Ext} \rightarrow S) \cdot \vec{z}_1 = a \cdot X_{14} - b \cdot Y_{23}$$

On en déduit également la somme des résultantes des actions extérieures :

$$\text{En projection sur } \vec{x}_1 : \quad \Sigma \vec{F}_{\text{Ext} \rightarrow S} \cdot \vec{x}_1 = X_{14} + X_{15} - M \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$\text{En projection sur } \vec{y}_1 : \quad \Sigma \vec{F}_{\text{Ext} \rightarrow S} \cdot \vec{y}_1 = Y_{23} - M \cdot g \cdot \cos \alpha$$

L'inertie des galets 4 et 5 étant négligée la résultante dynamique du système S projeté sur $\vec{y}_1$ est :

$$\text{En projection sur } \vec{x}_1 : \quad \vec{R}_D(S/\vec{0}) \cdot \vec{x}_1 = 0$$

$$\text{En projection sur } \vec{y}_1 : \quad \vec{R}_D(S/\vec{0}) \cdot \vec{y}_1 = M \cdot \gamma$$

L'inertie des galets 4 et 5 étant négligée et la wagonnet 3 étant en translation, le moment dynamique du système S au centre d'inertie de 3 est nulle : $\delta_G(S/\vec{0}) = \vec{0}$. Donc au point D : $\delta_D(S/\vec{0}) = \vec{DG} \wedge M \cdot \vec{a}_{G \in 3/1}$

On en déduit sa projection sur la direction $\vec{z}_1$:

$$\delta_D(S/\vec{0}) \cdot \vec{z}_1 = -h \cdot \vec{y}_0 \wedge M \cdot \gamma \cdot \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_1 = -M \cdot h \cdot \gamma \cdot \vec{y}_1 \wedge \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_0 = -M \cdot h \cdot \gamma \cdot \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0 = -M \cdot h \cdot \gamma \cdot \sin \alpha$$

L'application du PFD au système S donne donc les trois équations :

$$\text{TRD en projection sur } \vec{x}_1 : \quad X_{14} + X_{15} - M \cdot g \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\text{TRD en projection sur } \vec{y}_1 : \quad Y_{23} - M \cdot g \cdot \cos \alpha = M \cdot \gamma$$

$$\text{TMD en D en projection sur } \vec{z}_1 : \quad a \cdot X_{14} - b \cdot Y_{23} = -M \cdot h \cdot \gamma \cdot \sin \alpha$$

La résolution de ce système de trois équation à trois inconnues donne alors :

$$Y_{23} = M \cdot (\gamma + g \cdot \cos \alpha)$$

$$X_{14} = \frac{b \cdot M \cdot (\gamma + g \cdot \cos \alpha) - M \cdot h \cdot \gamma \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{M \cdot [g \cdot b \cdot \cos \alpha + \gamma \cdot (b - h \cdot \sin \alpha)]}{a}$$

$$X_{15} = M \cdot g \cdot \sin \alpha - \frac{M \cdot [g \cdot b \cdot \cos \alpha + \gamma \cdot (b - h \cdot \sin \alpha)]}{a} = \frac{M \cdot [g \cdot (a \cdot \sin \alpha - b \cdot \cos \alpha) - \gamma \cdot (b - h \cdot \sin \alpha)]}{a}$$

Les actions sont donc des glisseurs passant par A, B et C et de résultantes : $\vec{F}_{2 \rightarrow 3} = M \cdot (\gamma + g \cdot \cos \alpha) \cdot \vec{y}_1$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 4} = \frac{M \cdot [g \cdot b \cdot \cos \alpha + \gamma \cdot (b - h \cdot \sin \alpha)]}{a} \cdot \vec{x}_1$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 5} = \frac{M \cdot [g \cdot (a \cdot \sin \alpha - b \cdot \cos \alpha) - \gamma \cdot (b - h \cdot \sin \alpha)]}{a} \cdot \vec{x}_1$$

5- Signes des composantes des actions en A et B

Le galet 5 étant à gauche du rail 1 la résultante de l'action de 1 sur 5 est dirigée vers la gauche.

Le galet 4 étant à droite du rail 1 la résultante de l'action de 1 sur 4 est dirigée vers la droite.

Le vecteur $\vec{x}_1$ étant dirigé vers la droite les signes des composantes de ces résultante sont :

Positif pour l'action de 1 sur 4 : $X_{14} \geq 0$

Négatif pour l'action de 1 sur 5 : $X_{15} \leq 0$

6- Variation des composantes des actions en A et B

Sachant que : $b > h \cdot \sin \alpha$, on a : $b - h \cdot \sin \alpha > 0$. Donc d'après les expressions de X_{14} et X_{15} on en déduit que : **Lorsque l'accélération γ augmente :**

X_{14} augmente. Et donc comme $X_{14} \geq 0$, on en déduit la norme de $\vec{F}_{1 \rightarrow 4}$: $|X_{14}|$ augmente

X_{15} diminue. Et donc comme $X_{15} \leq 0$, on en déduit la norme de $\vec{F}_{1 \rightarrow 5}$: $|X_{15}|$ augmente

La conclusion est qu'il ne peut y avoir décollement des galets du rail que lorsque l'accélération diminue. Donc le cas le plus critique est lorsque l'accélération est minimale : $\gamma = -g \cdot \cos \alpha$ (Question 3)

7- Condition de non basculement

Etant donné les expressions de X_{14} et X_{15} lorsque γ va diminuer , c'est X_{15} qui va atteindre la valeur nulle le premier. Donc on cherche la condition pour avoir $X_{15} \leq 0$ lorsque γ est minimal : $\gamma = -g \cdot \cos \alpha$.

D'après la question 4, pour $\gamma = -g \cdot \cos \alpha$, on la valeur de X_{15} qui devient :

$$X_{15} = \frac{M \cdot g}{a} (a \cdot \sin \alpha - b \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot (b - h \cdot \sin \alpha)) = \frac{M \cdot g \cdot \sin \alpha}{a} \cdot (a - h \cdot \cos \alpha)$$

Donc la condition pour avoir $X_{15} \leq 0$ est que : $a - h \cdot \cos \alpha \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad h \cdot \cos \alpha \geq a$

Donc la condition pour maintenir le galet 5 en contact sur le rail est que : $h \cdot \cos \alpha \geq a$

En étudiant le schéma de l'énoncé on voit que pour maintenir le contact du galet 5 sur le rail 1, il faut que G le centre d'inertie du wagonnet 3 soit situé sous la droite $(B, \vec{x}_1)$.