

Théorème de l'énergie cinétique : cas des mouvements simples

1-Théorème de l'énergie cinétique : Enoncé

1.1- Démonstration pour une masse ponctuelle

Soit une masse ponctuelle au point P de masse m en mouvement à la vitesse $\vec{V}_{P \in m/R_g}$ par rapport à un repère galiléen.

Si cette masse ponctuelle m est soumise à une force $\vec{F}$ alors celle-ci fera varier la vitesse $\vec{V}_{P \in m/R_g}$ conformément au PFD : $\vec{F} = m \cdot \vec{a}_{P \in m/R_g} = m \left(\frac{d \vec{V}_{P \in m/R_g}}{dt} \right)_{R_g}$

Faisons le produit scalaire de cette égalité avec la vitesse $\vec{V}_{P \in m/R_g}$. On a alors :

$$\vec{F} \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g} = m \left(\frac{d \vec{V}_{P \in m/R_g}}{dt} \right)_{R_g} \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g} = \frac{d \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g}^2}{dt}$$

Le terme : $\frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g}^2$ est homogène à une énergie. Cette énergie est due à la vitesse de la masse ponctuelle m dans le repère galiléen R_g . **Il s'agit donc de l'énergie cinétique de la masse m dans son mouvement par rapport au repère R_g .**

Le terme $\vec{F} \cdot \vec{V}_{P \in m/R_g}$ fait donc varier l'énergie cinétique. Il s'agit donc d'un échange d'énergie avec l'extérieur de la masse m. Il est homogène à une énergie par unité de temps, c'est-à-dire à une puissance. **Il s'agit donc de la puissance de la force $\vec{F}$ par rapport au repère galiléen R_g .**

1.2- Enoncé pour une masse ponctuelle

La puissance des forces extérieures par rapport à un repère galiléen s'appliquant sur une masse ponctuelle au point P est égale à la variation par rapport au temps de l'énergie cinétique par rapport à ce même repère galiléen.

Où :

1.3- Généralisation à un solide

Un solide S de masse m peut se décomposer en une infinité de petite masses ponctuelles dm situées en P pour lesquelles on a : $m = \iiint_S dm$. La somme de toutes les égalités liées au théorème de l'énergie cinétique appliqué à toutes les masses dm donne alors :

$$\iiint_S \vec{F}_{Ext} \cdot \vec{V}_{P \in S/R_g} + \iiint_S \vec{F}_{Int} \cdot \vec{V}_{P \in S/R_g} = \iiint_S \frac{d E_c(dm/R_g)}{dt} = \frac{d \iiint_S E_c(dm/R_g)}{dt}$$

A partir du principe des actions mutuelles, On montre pour un solide que : $\iiint_S \vec{F}_{Int} \cdot \vec{V}_{P \in S/R_g} = 0$

D'autre part : $\iiint_S \vec{F}_{Ext} \cdot \vec{V}_{P \in S/R_g} = \Sigma P(Ext \rightarrow S/R_g)$ et : $\iiint_S E_c(dm/R_g) = E_c(S/R_g)$

On a donc pour un solide S :

$$\Sigma P(Ext \rightarrow S/R_g) = \frac{d E_c(S/R_g)}{dt}$$

1.4- Généralisation à un ensemble de solides

Pour un système S constitué d'un ensemble de solides indéformables $S : S = \sum_{i=1}^n S_i$.

L'énergie cinétique de ce système est la somme des énergies cinétiques de chacun des solides :

Prenons l'exemple d'un système S constitué de deux solides S_1 et S_2 :

$$\sum_{i=1}^2 \sum P(\text{Ext}_{S_i} \rightarrow S_i / R_g) = \sum P(\text{Ext}_S \rightarrow S_1 / R_g) + P(S_2 \rightarrow S_1 / R_g) + \sum P(\text{Ext}_S \rightarrow S_2 / R_g) + P(S_1 \rightarrow S_2 / R_g)$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum P(\text{Ext}_{S_i} \rightarrow S_i / R_g) = \sum P(\text{Ext}_S \rightarrow S / R_g) + P(S_2 \rightarrow S_1 / R_g) + P(S_1 \rightarrow S_2 / R_g)$$

Le terme $P(S_2 \rightarrow S_1 / R_g) + P(S_1 \rightarrow S_2 / R_g)$ est appelé la puissance des inter-efforts du système constitué des deux solides, ou puissance des actions intérieures du système. On la note : $P(\text{Int}_S \rightarrow S / R_g)$.

On obtient alors :

$$\sum_{i=1}^2 \sum P(\text{Ext}_{S_i} \rightarrow S_i / R_g) = \sum P(\text{Ext}_S \rightarrow S / R_g) + P(\text{Int}_S \rightarrow S / R_g)$$

On montre de la même manière en généralisant à un système S constitué de n solides S_i :

Donc pour un système S constitué d'un ensemble de solides si on note :

☞ $\sum P(\text{Ext}_S \rightarrow S, R_g)$ et $\sum P(\text{Int}_S \rightarrow S, R_g)$ les sommes des puissances des actions extérieures et intérieures au système S, par rapport au repère Galiléen R_g .

☞ $E_C(S/R_g)$ l'énergie cinétique du système S par rapport au repère R_g .

Alors le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

2- Calcul de l'énergie cinétique

Soit un solide S décomposé en une infinité de petite masse ponctuelles dm situées en P. On a alors :

$$m = \iiint_S dm \quad \text{et :} \quad E_C(S/R_g) = \iiint_S E_C(dm/R_g) = \iiint_S \frac{1}{2} \overrightarrow{V_{P \in S/R_g}}^2 \cdot dm$$

2.1- Cas d'un solide en translation

Pour un solide en translation quelque soit les points P et A on a : $\overrightarrow{V_{P \in S/R_g}} = \overrightarrow{V_{A \in S/R_g}}$

On en déduit :

$$E_C(S/R_g) = \iiint_S \frac{1}{2} \overrightarrow{V_{A \in S/R_g}}^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \overrightarrow{V_{A \in S/R_g}}^2 \cdot \iiint_S dm$$

Donc :

Cette relation est notamment valable avec le centre de gravité G du solide : $E_C(S/R_g) = \frac{1}{2} m \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}}^2$

2.2- Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe dans la repère galiléen R_g

Soit un solide S en rotation d'axe Δ telle que la vitesse de rotation est ω .

Quelque soit le point P de S il existe un point P' défini comme le projeté orthogonal du point P sur l'axe Δ . Le segment $\overline{PP'}$ est alors le rayon de la trajectoire circulaire de P ($T_{P \in S/R_g}$) défini par la rotation.

Quelques soit le point P on a alors : $\overrightarrow{V_{P \in S/R_g}} = \overrightarrow{V_{P' \in S/R_g}} + \overrightarrow{PP'} \wedge \overrightarrow{\Omega(S/R_g)}$

Or le point P' étant sur l'axe Δ : $\overrightarrow{V_{P' \in S/R_g}} = \vec{0}$ donc : $\overrightarrow{V_{P \in S/R_g}} = \overrightarrow{PP'} \wedge \overrightarrow{\Omega(S/R_g)}$

D'autre part : $\overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \perp \overrightarrow{PP'}$ donc : $\overrightarrow{V_{P \in S/R_g}}^2 = \|\overrightarrow{PP'}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}\|^2$

Par conséquent : $E_C(S/R_g) = \iiint_S \frac{1}{2} \|\overrightarrow{PP'}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}\|^2 dm$

Or : $\|\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}\| = \omega$ quelque soit le point P

Et : $\overline{PP'}$ est un rayon.

Donc si on note r ce rayon on a : $E_C(S/R_g) = \iiint_S \frac{1}{2} r^2 \cdot \omega^2 dm$

Donc si un solide S est en rotation d'axe Δ alors son énergie cinétique dans le repère R_g est :

Où : $\mathcal{I}_\Delta$ est le moment d'inertie de S par rapport à l'axe de rotation Δ (fixe dans R_g)

ω est la vitesse de rotation de S par rapport à R_g

2.3- Cas des mouvements plan quelconques

Considérons un solide S de centre d'inertie G en mouvement plan de normale $\Delta_G = (G, \overrightarrow{u_\Delta})$ par rapport au repère Galiléen R_g . Le torseur cinématique de ce mouvement est donc tel que :

$$\{\mathcal{V}(S/R_g)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \\ \overrightarrow{V_{P \in S/R_g}} \end{array} \right\}_P \quad \text{Avec :} \quad \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} = \omega \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \quad \text{et} \quad \forall M : \quad \overrightarrow{V_{P \in S/R_g}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0$$

Quelque soit le point P de S posons le point P' projeté orthogonal du point P sur l'axe $\Delta_G = (G, \overrightarrow{u_\Delta})$.

En appliquant deux fois la relation de Varignon on obtient :

$$\overrightarrow{V_{P \in S/R_g}} = \overrightarrow{V_{P' \in S/R_g}} + \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'P} = \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}} + \overrightarrow{P'G} \wedge \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} + \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'P}$$

P' étant le projeté orthogonal de P sur $\Delta_G = (G, \overrightarrow{u_\Delta})$ les vecteurs $\overrightarrow{P'G}$ et $\overrightarrow{u_\Delta}$ sont colinéaires et comme $\overrightarrow{\Omega(S/R_g)} = \omega \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$, les vecteurs $\overrightarrow{P'G}$ et $\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}$ sont colinéaires. Donc : $\overrightarrow{P'G} \wedge \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} = \vec{0}$.

$$\text{D'où :} \quad \overrightarrow{V_{P \in S/R_g}} = \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}} + \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'P}$$

D'où l'énergie cinétique du solide S dans son mouvement par rapport au repère R_g :

$$E_C(S/R_g) = \iiint_S \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{V_{P \in S/R_g}}^2 \cdot dm = \iiint_S \frac{1}{2} \cdot [\overrightarrow{V_{G \in S/R_g}} + \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'P}]^2 \cdot dm$$

$$E_C(S/R_g) = \iiint_S \frac{1}{2} \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}}^2 \cdot dm + 2 \cdot \iiint_S \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'P} \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}} \cdot dm + \iiint_S \frac{1}{2} [\overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'P}]^2 \cdot dm$$

$$E_C(S/R_g) = \frac{1}{2} \cdot \left(\iiint_S dm \right) \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}}^2 + \iiint_S \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'P} \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}} \cdot dm + \frac{1}{2} \cdot \iiint_S [\overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'P}]^2 \cdot dm$$

Par la relation de Chasles : $\overrightarrow{P'P} = \overrightarrow{P'G} + \overrightarrow{GP}$, on obtient donc :

$$\iiint_S \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'P} \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}} \cdot dm = \iiint_S \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'G} \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}} \cdot dm + \iiint_S \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}} \cdot dm$$

$$\text{Ayant : } \overrightarrow{P'G} \wedge \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} = \vec{0} \Rightarrow \iiint_S \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'P} \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}} \cdot dm = \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \left(\iiint_S \overrightarrow{GP} \cdot dm \right) \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}}$$

On obtient donc l'énergie cinétique du solide S dans son mouvement par rapport au repère R_g :

$$E_C(S/R_g) = \frac{1}{2} \cdot \left(\iiint_S dm \right) \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}}^2 + \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \left(\iiint_S \overrightarrow{GP} \cdot dm \right) \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}} + \frac{1}{2} \cdot \iiint_S \left[\overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'P} \right]^2 \cdot dm$$

On a d'une part $\iiint_S dm = m$ où m est la masse du solide. Et d'autre part G étant le centre d'inertie du solide S on a : $\iiint_S \overrightarrow{GP} \cdot dm = \vec{0}$. D'où : $E_C(S/R_g) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \overrightarrow{V_{G \in S/R_g}}^2 + \frac{1}{2} \cdot \iiint_S \left[\overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'P} \right]^2 \cdot dm$

$$\text{D'autre part : } \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \perp \overrightarrow{PP'} \quad \text{donc : } \left[\overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'P} \right]^2 = \|\overrightarrow{PP'}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}\|^2$$

$$\text{Par conséquent : } \frac{1}{2} \cdot \iiint_S \left[\overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'P} \right]^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \cdot \iiint_S \|\overrightarrow{PP'}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}\|^2 \cdot dm$$

Or : $\|\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}\| = |\omega|$ quelque soit le point P Et : $\|\overrightarrow{PP'}\| = r_{\Delta_G}$ où r_{Δ_G} est la distance entre P et Δ_G .

$$\text{Donc : } \frac{1}{2} \cdot \iiint_S \left[\overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{P'P} \right]^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \cdot \iiint_S r_{\Delta_G}^2 \cdot \omega^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \cdot \left(\iiint_S r_{\Delta_G}^2 \cdot dm \right) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot I_{\Delta_G}(S) \cdot \omega^2.$$

Donc finalement pour un mouvement plan quelconque :

Où : $\curvearrowright$ G est le centre d'inertie du solide S de masse m

$\curvearrowright$ I_{Δ_G} est le moment d'inertie de S par rapport à l'axe Δ_G passant par G et orthogonal au plan

$\curvearrowright$ ω est la vitesse de rotation de S par rapport à R_g

2.4- Cas de plusieurs solides

Si un système S est constitué de n solides S_i : $S = \sum_{i=1}^n S_i$ alors l'énergie cinétique du système par rapport au repère R_g est la somme des énergies cinétiques de chacun de ces solides par rapport à R_g .

3- Puissance d'une action mécanique

3.1- Action mécanique

Une action mécanique d'un corps S_1 sur un autre corps S_2 est en générale la somme sur une surface Σ d'une pression répartie $\overrightarrow{p(P)}$, ou sur un volume V d'une charge de densité $\overrightarrow{g(P)}$, variable ou constante en fonction du point P. L'action mécanique qui résulte de cette charge répartie peut être modélisée par le torseur dont les éléments de réduction en A sont pour :

$$\curvearrowright \text{ La résultante } R(\overrightarrow{1 \rightarrow 2}) \text{ tel que : } \mathbf{R}(\overrightarrow{1 \rightarrow 2}) = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{p(P)} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{ou} \quad = \iiint_V \overrightarrow{g(P)} \cdot d\mathbf{v}$$

$$\curvearrowright \text{ Le moment en A } \mathcal{M}_A(\overrightarrow{1 \rightarrow 2}) \text{ tel que : } \mathcal{M}_A(\overrightarrow{1 \rightarrow 2}) = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{p(P)} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{ou} \quad = \iiint_V \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{g(P)} \cdot d\mathbf{v}$$

3.2- Puissance d'une action mécanique

3.2.1- Définition

La puissance d'une action mécanique sur d'un corps 1 sur un solide 2 par rapport au repère R_g est la somme des puissances des forces élémentaires créées par la charge répartie de densité $\vec{p}(P)$

On a donc :
$$P(1 \rightarrow 2/R_g) = \iint_{\Sigma} \vec{p}(P) \cdot \vec{V}_{P \in 2/R_g} ds$$

3.2.2- Démonstration

Quelque soit les points A et P on a : $\vec{V}_{P \in 2/R_g} = \vec{V}_{A \in 2/R_g} + \vec{\Omega}(2/R_g) \wedge \vec{AP}$

Donc :
$$P(1 \rightarrow 2/R_g) = \iint_{\Sigma} \vec{p}(P) \cdot [\vec{V}_{A \in 2/R_g} + \vec{\Omega}(2/R_g) \wedge \vec{AP}] ds$$

$$P(1 \rightarrow 2/R_g) = \iint_{\Sigma} \vec{p}(P) \cdot \vec{V}_{A \in 2/R_g} ds + \iint_{\Sigma} \vec{p}(P) \cdot \vec{\Omega}(2/R_g) \wedge \vec{AP} ds$$

$$P(1 \rightarrow 2/R_g) = \vec{V}_{A \in 2/R_g} \cdot \iint_{\Sigma} \vec{p}(P) ds + \iint_{\Sigma} \vec{\Omega}(2/R_g) \cdot \vec{AP} \wedge \vec{p}(P) ds$$

$$P(1 \rightarrow 2/R_g) = \vec{V}_{A \in 2/R_g} \cdot \iint_{\Sigma} \vec{p}(P) ds + \vec{\Omega}(2/R_g) \cdot \iint_{\Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{p}(P) ds$$

Or:
$$\iint_{\Sigma} \vec{p}(P) ds = \vec{R}(1 \rightarrow 2)$$
 est la résultante de l'action de 1 sur 2

$$\iint_{\Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{p}(P) ds = \vec{\mathcal{M}}_A(1 \rightarrow 2)$$
 est le moment au point A de l'action de 1 sur 2

3.2.3- Conclusion

La puissance d'une action mécanique d'un corps 1 sur corps 2 par rapport au repère R_g est :

La somme de ces deux produits scalaire est appelée :

Remarque : Pour calculer le comoment d'un torseur cinématique et d'un torseur sthénique, on fait la somme des produits scalaires entre les résultantes et moments. Cependant ATTENTION

3.2.4- Puissance d'une force

Si l'action est une **force** $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ appliquée en un Point A :
$$P(1 \rightarrow 2, R_g) = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{2/R_g} \\ \vec{V}_{A \in 2/R_g} \end{matrix} \right\}_A$$

Soit :

3.2.5- Puissance d'un couple

Si l'action est un **couple de vecteur** $\vec{C}_{1 \rightarrow 2}$:
$$P(1 \rightarrow 2, R_g) = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{C}_{1 \rightarrow 2} \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{2/R_g} \\ \vec{V}_{A \in 2/R_g} \end{matrix} \right\}_A$$

Soit :

4- Travail et puissance des actions de liaison

4.1- Puissances des actions de liaisons intérieures

Soit un ensemble S constitué de deux solides 1 et 2. La puissance des actions intérieures à l'ensemble S est la somme de la puissance de l'action de 1 sur 2 par rapport au repère R_g et de celle de 2 sur 1 par rapport au repère R_g .

On a donc : $P(\text{Int} \rightarrow S/R_g) = P(1 \rightarrow 2, R_g) + P(2 \rightarrow 1, R_g)$

Soit : $P(\text{Int} \rightarrow S/R_g) = \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/R_g)\} + \{T(2 \rightarrow 1)\} \otimes \{\mathcal{V}(1/R_g)\}$

$P(\text{Int} \rightarrow S/R_g) = \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/R_g)\} + \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(R_g/1)\}$

$P(\text{Int} \rightarrow S/R_g) = \{T(1 \rightarrow 2)\} \otimes [\{\mathcal{V}(2/R_g)\} + \{\mathcal{V}(R_g/1)\}]$

Soit :

Conclusions La puissance des efforts intérieurs (puissance des inter-efforts) est :



4.2- Puissances des actions de liaisons extérieures

Soit un ensemble S constitué de plusieurs solides dont le solide 1 et un solide 0 extérieur à l'ensemble S. Tel que ce solide 0 est en liaison avec le solide 1.

La puissance de l'action extérieure du solide 0 sur le solide 1 par rapport au repère R_g est :

Le premier comoment est nul si la liaison est parfaite et le deuxième comoment est nul si le solide extérieur 0 est fixe dans le repère R_g .

Conclusions



Et :

