

TD4 : Mécanisme de fermeture : Corrigé

1- Vitesse et accélération du centre d'inertie du rouleau 2

Par la relation de Varignon : $\vec{V}_{A \in 1/0} = \vec{V}_{O \in 1/0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{OA}$

Or O étant le centre de la liaison pivot entre 1 et 0 : $\vec{V}_{O \in 1/0} = \vec{0}$

Donc : $\vec{V}_{A \in 1/0} = \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 \wedge d \cdot \vec{y}_1 = d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$

Or A étant le centre de la liaison pivot entre 2 et 1 : $\vec{V}_{A \in 1/0} = \vec{V}_{A \in 2/0}$

On en déduit donc : $\vec{V}_{A \in 2/0} = d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$

On a : $\vec{\Gamma}_{A \in 2/0} = \left(\frac{d \vec{V}_{A \in 2/0}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0} = \left(\frac{d \vec{V}_{A \in 2/0}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{V}_{A \in 2/0} = d \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 \wedge d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$

On en déduit donc : $\vec{\Gamma}_{A \in 2/0} = d \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 - d \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{y}_1$

2- Relations entre les paramètres cinématiques α , β et v

Par la relation de Varignon : $\vec{V}_{I \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 2/0} + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{AI} = d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + \beta \cdot \vec{x}_0 \wedge R \cdot \vec{z}_0$

On en déduit donc : $\vec{V}_{I \in 2/0} = d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 - R \cdot \beta \cdot \vec{y}_0$

Par composition des vitesses : $\vec{V}_{I \in 3/0} = \vec{V}_{I \in 3/2} + \vec{V}_{I \in 2/0}$

Or il y a roulement sans glissement entre 3 et 2 au point I. Donc : $\vec{V}_{I \in 3/2} = \vec{0}$

On a donc : $\vec{V}_{I \in 3/0} = \vec{V}_{I \in 2/0} = d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 - R \cdot \beta \cdot \vec{y}_0$

D'autre par le mouvement de 3 par rapport à 0 est une translation (liaison glissière). On a donc : $\vec{V}_{I \in 3/0} = \vec{V}_{G_3 \in 3/0} = v \cdot \vec{z}_0$. On en déduit : $v \cdot \vec{z}_0 = d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 - R \cdot \beta \cdot \vec{y}_0$. On obtient donc par projection :

$$\text{Sur } \vec{z}_0 : \quad v = d \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha \quad \text{Sur } \vec{y}_0 : \quad 0 = -d \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \alpha - R \cdot \beta$$

$$\text{Soit :} \quad \beta = -\frac{d}{R} \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \alpha$$

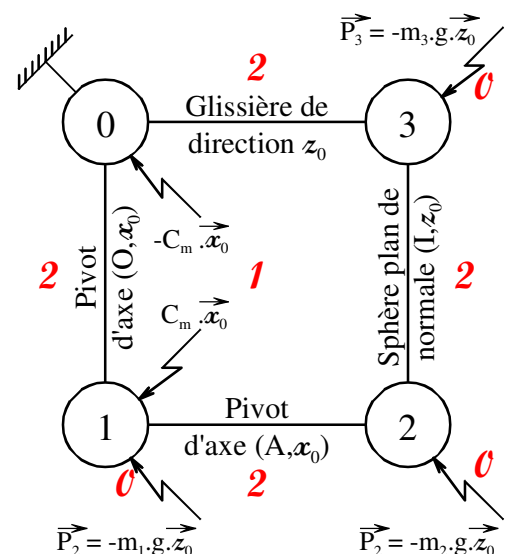
Par dérivation par rapport au temps on obtient alors : $\dot{v} = d \cdot (\ddot{\alpha} \cdot \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \cdot \sin \alpha)$

$$\text{Et :} \quad \dot{\beta} = -\frac{d}{R} \cdot (\ddot{\alpha} \cdot \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cdot \cos \alpha)$$

3- Graphe de structure

Remarques :

- ☞ En rouge le nombre d'inconnues de chacune des actions.
- ☞ Les actions de liaison pivot ont 2 inconnues car il s'agit de liaisons pivot d'axe $\vec{x}_0$ pour un problème plan (O, $\vec{y}_0, \vec{z}_0$). Ce sont des glisseurs d'axe passant par O et A.
- ☞ L'action de liaison glissière a 2 inconnues car il s'agit d'une liaison de direction $\vec{z}_0$ pour un problème plan (O, $\vec{y}_0, \vec{z}_0$).
- ☞ L'action de liaison ponctuelle a deux inconnues car la liaison est avec adhérence (Roulement sans glissement) et on a un problème plan (O, $\vec{y}_0, \vec{z}_0$).
- ☞ Le couple moteur à une seule inconnue. Les poids de 1 n'a pas d'inconnue car masse et accélération gravitationnelle connues.



4- Ordonnement des isolements

On isole {3} et on applique un TRD projeté sur $\vec{z}_0$:

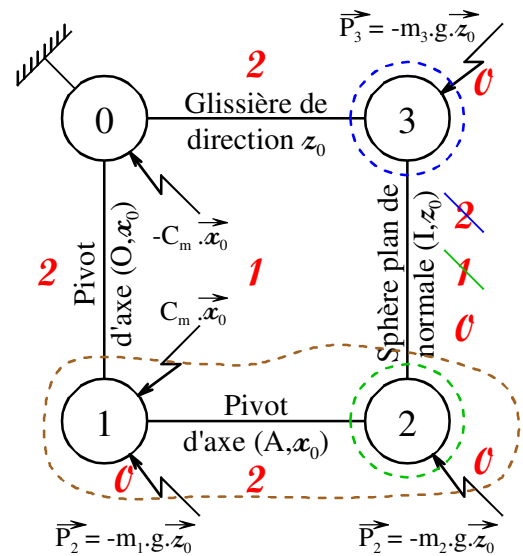
Trois actions et 4 inconnues. Mais la résultante de l'action de 0→3 n'ayant pas de composante sur $\vec{z}_0$ on peut en déduire celle de l'action de 2→3 : $Z_{23} = -Z_{32}$.

On isole {2} et on applique un TMD en A projeté sur $\vec{x}_0$:

Trois actions et 3 inconnues. Le moment en A de l'action de 1→2 étant nul, et la composante sur $\vec{z}_0$ de l'action de 3→2 (Z_{32}) étant connue on peut en déduire la composante de cette même action sur $\vec{y}_0$: Y_{32}

On isole {1,2} et on applique un TMD en O projeté sur $\vec{x}_0$:

Cinq actions et 3 inconnues. Le moment en O de l'action de 0→1 étant nul, et l'action de 3→2 étant connue on peut en déduire le couple moteur : C_m



5- Détermination du couple moteur

- On isole {3}. B.A.M.E.**
- ☞ Action de 0 sur 3 due à la glissière de direction $\vec{z}_0$
 - ☞ Action de la pesanteur sur 3 : Force $\vec{P}_3 = -m_3.g.\vec{z}_0$ appliquée en G_3
 - ☞ Action de 0 sur 3 : Force $\vec{F}_{2\rightarrow3} = Y_{23}.\vec{y}_0 + Z_{23}.\vec{z}_0$ appliquée en I

TRD en projection sur $\vec{z}_0$:

$$0 + \vec{P}_3 \cdot \vec{z}_0 + \vec{F}_{0\rightarrow3} \cdot \vec{z}_0 = m_3 \cdot \vec{\Gamma}_{G_3/0} \cdot \vec{z}_0 \Rightarrow -m_3.g + Z_{23} = m_3.\dot{v} \Rightarrow Z_{23} = m_3.(\dot{v} + g)$$

Par le principe des actions mutuelles : $Z_{32} = -Z_{23}$ et avec le résultat de la question 2 on obtient la composante sur $\vec{z}_0$ de la résultante de l'action de 2 sur 3 :

$$Z_{32} = -m_3.[d.(\ddot{\alpha}.\cos \alpha - \dot{\alpha}^2.\sin \alpha) + g]$$

- On isole {2}. B.A.M.E.**
- ☞ Action de 3 sur 2 : Force $\vec{F}_{3\rightarrow2} = Y_{32}.\vec{y}_0 + Z_{32}.\vec{z}_0$ appliquée en I
 - ☞ Action de 1 sur 2 due à la liaison pivot d'axe $(A, \vec{x}_0)$
 - ☞ Action de la pesanteur sur 2 : Force $\vec{P}_2 = -m_2.g.\vec{z}_0$ appliquée en A

$$\begin{aligned} \text{TMD en A en projection sur } \vec{x}_0 &\Rightarrow \vec{AI} \wedge \vec{F}_{3\rightarrow2} \cdot \vec{x}_0 + 0 + 0 = \delta_A(2/0) \cdot \vec{x}_1 \\ &\Rightarrow R.\vec{z}_0 \wedge (Y_{32}.\vec{y}_0 + Z_{32}.\vec{z}_0) \cdot \vec{x}_0 = \delta_A(2/0) \cdot \vec{x}_1 \end{aligned}$$

Or 2 est en mouvement plan de taux de rotation $\vec{\Omega}_{2/0} = \beta.\vec{x}_0$ et A est son centre d'inertie donc :

$$\delta_A(2/0) \cdot \vec{x}_1 = I_2.\beta \Rightarrow -R.Y_{32} = I_2.\beta$$

Par ailleurs, d'une part le rouleau 2 est assimilée à un cylindre plein et homogène de rayon R et de masse m_2 . D'où : $I_2 = \frac{m_2.R^2}{2}$ et d'autre part on a montré que ; $\beta = -\frac{d}{R} . (\ddot{\alpha}.\sin \alpha + \dot{\alpha}^2.\cos \alpha)$ Donc :

$$-R.Y_{32} = \frac{m_2.R^2}{2} \cdot \left[-\frac{d}{R} . (\ddot{\alpha}.\sin \alpha + \dot{\alpha}^2.\cos \alpha) \right] \Rightarrow Y_{32} = \frac{m_2.d}{2} . (\ddot{\alpha}.\sin \alpha + \dot{\alpha}^2.\cos \alpha)$$

Déterminons le moment dynamique en O projeté sur $\vec{x}_0$ du solide 1 par rapport à 0 : $\delta_O(1/0) \cdot \vec{x}_1$

I_1 est le moment d'inertie du solide 1 de masse m_1 par rapport à l'axe $(G_1, \vec{x}_0)$ où G_1 est le centre d'inertie de ce solide 1. Par le théorème de Huygens on obtient le moment d'inertie du solide 1 par rapport à l'axe $(O, \vec{x}_0)$ (avec $\vec{OG}_1 = d.\vec{y}_1$) :

$$I_{(O, \vec{x}_0)}(1) = I_1 + m_1.d^2$$

Or le mouvement du solide 1 par rapport à 0 est une rotation d'axe fixe $(O, \vec{x}_0)$ et de taux de rotation $\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}.\vec{x}_0$ Donc : $\delta_O(1/0) \cdot \vec{x}_1 = (I_1 + m_1.d^2).\ddot{\alpha}$

Déterminons le moment dynamique en O projeté sur $\vec{x_0}$ du solide 2 par rapport à 0 : $\delta_{O(2/0)}. \vec{x_1}$

Par la relation de Varignon on a : $\delta_{O(2/0)}. \vec{x_0} = \delta_A(2/0). \vec{x_0} + m_2. \vec{OA} \wedge \vec{\Gamma_{A \in 2/0}. \vec{x_0}}$

Des résultats précédents on a alors :

$$\delta_{O(2/0)}. \vec{x_1} = \frac{m_2.R^2}{2} \cdot \left[-\frac{d}{R} \cdot (\ddot{\alpha} \cdot \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cdot \cos \alpha) \right] + m_2.d. \vec{y_1} \wedge (d.\ddot{\alpha}. \vec{z_1} - d.\dot{\alpha}^2. \vec{y_1}). \vec{x_0}$$

On obtient alors : $\delta_{O(2/0)}. \vec{x_1} = -\frac{m_2.d.R}{2} \cdot (\ddot{\alpha} \cdot \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cdot \cos \alpha) + m_2.d^2.\ddot{\alpha}$

- On isole {1,2}. B.A.M.E.**
- ☞ Action de 3 sur 2 : Force $\vec{F_{3 \rightarrow 2}} = Y_{32}. \vec{y_0} + Z_{32}. \vec{z_0}$ appliquée en I
 - ☞ Action de 0 sur 1 due à la liaison pivot d'axe (O, $\vec{x_0}$)
 - ☞ Action de la pesanteur sur 1 : Force $\vec{P_1} = -m_1.g. \vec{z_0}$ appliquée en G₁
 - ☞ Action de la pesanteur sur 2 : Force $\vec{P_2} = -m_2.g. \vec{z_0}$ appliquée en A
 - ☞ Couple moteur de vecteur : $\vec{C_m} = C_m. \vec{x_0}$

TMD en O en projection sur $\vec{x_0}$

$$\Rightarrow \vec{OI} \wedge \vec{F_{3 \rightarrow 2}}. \vec{x_0} + 0 + \vec{OG_1} \wedge \vec{P_1}. \vec{x_0} + \vec{OA} \wedge \vec{P_2}. \vec{x_0} + \vec{C_m}. \vec{x_0} = \delta_{O(1/0)}. \vec{x_1} + \delta_{O(2/0)}. \vec{x_1}$$

$$\Rightarrow (R. \vec{z_0} + d. \vec{y_1}) \wedge (Y_{32}. \vec{y_0} + Z_{32}. \vec{z_0}). \vec{x_0} + (-d. \vec{y_1}) \wedge (-m_1.g. \vec{z_0}). \vec{x_0} + \dots$$

$$\dots d. \vec{y_1} \wedge (-m_2.g. \vec{z_0}). \vec{x_0} + C_m = (I_1 + m_1.d^2).\ddot{\alpha} - \frac{m_2.d.R}{2} \cdot (\ddot{\alpha} \cdot \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cdot \cos \alpha) + m_2.d^2.\ddot{\alpha}$$

Par permutation circulaire du produit mixte on a :

$$\Rightarrow -R.Y_{32} + d.Y_{32}. \vec{y_0} \wedge \vec{x_0}. \vec{y_1} + d.Z_{32}. \vec{z_0} \wedge \vec{x_0}. \vec{y_1} + m_1.g.d. \vec{z_0} \wedge \vec{x_0}. \vec{y_1} + \dots$$

$$\dots -m_2.g.d. \vec{z_0} \wedge \vec{x_0}. \vec{y_1} + C_m = (I_1 + m_1.d^2).\ddot{\alpha} - \frac{m_2.d.R}{2} \cdot (\ddot{\alpha} \cdot \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cdot \cos \alpha) + m_2.d^2.\ddot{\alpha}$$

$$\Rightarrow -R.Y_{32} - d.Y_{32} \cdot \sin \alpha + d.Z_{32} \cdot \cos \alpha + m_1.g.d \cdot \cos \alpha - m_2.g.d \cdot \cos \alpha + C_m$$

$$\dots = (I_1 + m_1.d^2).\ddot{\alpha} - \frac{m_2.d.R}{2} \cdot (\ddot{\alpha} \cdot \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cdot \cos \alpha) + m_2.d^2.\ddot{\alpha}$$

$$\Rightarrow -(R + d \cdot \sin \alpha).Y_{32} + d.Z_{32} \cdot \cos \alpha + (m_1 - m_2).g.d \cdot \cos \alpha + C_m$$

$$\dots = (I_1 + m_1.d^2).\ddot{\alpha} - \frac{m_2.d.R}{2} \cdot (\ddot{\alpha} \cdot \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cdot \cos \alpha) + m_2.d^2.\ddot{\alpha}$$

Or on a vu que : $Y_{32} = \frac{m_2.d}{2} \cdot (\ddot{\alpha} \cdot \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cdot \cos \alpha)$ et : $Z_{32} = -m_3 \cdot [d \cdot (\ddot{\alpha} \cdot \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \cdot \sin \alpha) + g]$

On obtient après calcul :

$$C_m = (m_2 + m_3 - m_1).g.d \cdot \cos \alpha + \left(I_1 + m_1.d^2 + m_2.d^2 + m_3.d^2 \cdot \cos^2 \alpha + \frac{m_2.d^2}{2} \cdot \sin^2 \alpha \right) \cdot \ddot{\alpha} \dots$$

$$+ \left(\frac{m_2}{2} - m_3 \right) \cdot d^2 \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$$

6- Equilibrage du mécanisme

Pour équilibrer le mécanisme ($C_m = J_e.\ddot{\alpha}$) il faut que les termes en $g.d \cdot \cos \alpha$ et $d^2.\dot{\alpha}^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$ soit nuls. C'est-à-dire qu'il faut : $m_2 + m_3 - m_1 = 0$ et $\frac{m_2}{2} - m_3 = 0 \Leftrightarrow m_2 = 2.m_3$ et : $m_1 = 3.m_3$

Dans ce cas : $m_3.d^2 \cdot \cos^2 \alpha + \frac{m_2.d^2}{2} \cdot \sin^2 \alpha = m_3.d^2 \cdot \cos^2 \alpha + m_3.d^2 \cdot \sin^2 \alpha = m_3.d^2$

On a donc : $C_m = (I_1 + m_1.d^2 + m_2.d^2 + m_3.d^2).\ddot{\alpha}$ Avec : $m_2 = 2.m_3$ et : $m_1 = 3.m_3$

Donc finalement le système est équilibré c'est-à-dire que : $C_m = J_e.\ddot{\alpha}$ lorsque :

$$m_2 = 2.m_3 \quad \text{et} \quad m_1 = 3.m_3 \quad \text{Avec} \quad J_e = I_1 + 6.m_3.d^2$$

7- Résolution par le Théorème de l'Energie Cinétique

Considérons le système S constitué de l'ensemble des solides en mouvement : $S = \{1, 2, 3\}$. Et déterminons dans un premier temps son énergie cinétique : $E_C(S/0) = E_C(1/0) + E_C(2/0) + E_C(3/0)$.

Le mouvement du solide 3 par rapport à 0 est une translation (Car liaison glissière de direction $\vec{z}_0$) avec : $\vec{V}_{G_3 \in 3/0} = v \cdot \vec{z}_0$. On a donc : $E_C(3/0) = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \vec{V}_{G_3 \in 3/0}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot v^2$

Le mouvement du solide 1 par rapport à 0 est une rotation d'axe fixe $(O, \vec{x}_0)$ (Car liaison pivot de même axe) avec $\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_0$, et un moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{x}_0)$: $I_{(O, \vec{x}_0)}(1) = I_1 + m_1 \cdot d^2$ (Par le théorème de Huygens). On a donc : $E_C(1/0) = \frac{1}{2} \cdot I_{(O, \vec{x}_0)} \cdot \vec{\Omega}_{1/0}^2 = \frac{1}{2} \cdot (I_1 + m_1 \cdot d^2) \cdot \dot{\alpha}^2$

Le solide 2 est en mouvement plan $(O, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ par rapport à 0 de taux de rotation $\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_0$. D'autre part son centre d'inertie est le point A avec un moment d'inertie par rapport à l'axe $(A, \vec{x}_0)$: $I_2 = \frac{m_2 \cdot R^2}{2}$ (Car cylindre plein de révolution de masse m_2 et rayon R). Et on a vu que : $\vec{V}_{A \in 2/0} = d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$.

On en déduit donc : $E_C(2/0) = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \vec{V}_{A \in 2/0}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \vec{\Omega}_{2/0}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2 \cdot R^2}{2} \cdot \dot{\beta}^2$

On obtient donc : $E_C(S/0) = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot (I_1 + m_1 \cdot d^2) \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot d^2 \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2 \cdot R^2}{2} \cdot \dot{\beta}^2$

Or on a : $v = d \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha$ et $\dot{\beta} = -\frac{d}{R} \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \alpha$ On en déduit :

$$E_C(S/0) = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot (d \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha)^2 + \frac{1}{2} \cdot (I_1 + m_1 \cdot d^2) \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot d^2 \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2 \cdot R^2}{2} \cdot \left(\frac{d}{R} \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \alpha \right)^2$$

Soit après calcul : $E_C(S/0) = \frac{1}{2} \cdot \left(I_1 + m_1 \cdot d^2 + m_2 \cdot d^2 + \frac{m_2}{2} \cdot d^2 \cdot \sin^2 \alpha + m_3 \cdot d^2 \cdot \cos^2 \alpha \right) \cdot \dot{\alpha}^2$

Bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur le système S :

- ☞ Poids de 1 : Force $\vec{P}_1 = -m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0$ appliquée en G_1 .
- ☞ Poids de 2 : Force $\vec{P}_2 = -m_2 \cdot g \cdot \vec{z}_0$ appliquée en A.
- ☞ Poids de 3 : Force $\vec{P}_3 = -m_3 \cdot g \cdot \vec{z}_0$ appliquée en G_3 .
- ☞ Action de 0 sur 1 due à la liaison pivot parfaite d'axe $(O, \vec{x}_0)$
- ☞ Action de 0 sur 3 due à la liaison glissière parfaite de direction $\vec{z}_0$
- ☞ Action du couple moteur sur 1 : Couple $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{x}_0$

Calculons les puissances des ces actions appliquées sur les solides 1, 2 et 3 dans leur mouvement par rapport au bâti 0 : $P(\text{pes} \rightarrow 1/0) = \vec{P}_1 \cdot \vec{V}_{G_1 \in 1/0} = -m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \cdot (-d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1) = +m_1 \cdot g \cdot d \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha$

$$P(\text{pes} \rightarrow 2/0) = \vec{P}_2 \cdot \vec{V}_{A \in 2/0} = -m_2 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \cdot d \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = -m_2 \cdot g \cdot d \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha$$

$$P(\text{pes} \rightarrow 3/0) = \vec{P}_3 \cdot \vec{V}_{G_3 \in 3/0} = -m_3 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \cdot v \cdot \vec{z}_0 = -m_3 \cdot g \cdot d \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha$$

$$P(0 \rightarrow 1/0) = 0 \text{ et } P(0 \rightarrow 3/0) = 0 \text{ car action de liaisons parfaites avec le bâti 0}$$

$$P(\vec{C}_m \rightarrow 1/0) = \vec{C}_m \cdot \vec{\Omega}_{1/0} = C_m \cdot \vec{x}_0 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_0 = C_m \cdot \dot{\alpha}$$

On a donc la somme des puissances des actions extérieures s'appliquant sur S dans son mouvement par rapport à 0 : $\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/0) = [m_1 - (m_2 + m_3)] g \cdot d \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha + C_m \cdot \dot{\alpha}$

Pour les actions intérieures on a les actions des liaisons intérieures entre 1&2 et entre 2&3.

☞ Liaison entre 1 et 2 : $P(1 \rightarrow 2/0) + P(2 \rightarrow 1/0) = P(1 \rightarrow 2/1) = 0$ car liaison parfaite :

☞ Liaison entre 2 et 3 : $P(2 \rightarrow 3/0) + P(3 \rightarrow 2/0) = P(2 \rightarrow 3/2) = \{\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}\} \otimes \{\mathcal{V}(3/2)\}$ avec :

$$\{\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{2 \rightarrow 3} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}(3/2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{3/2} \\ \vec{V}_{I \in 3/2} \end{Bmatrix} \quad \text{Car on a une liaison sphère plan non parfaite.}$$

Donc la puissance des inter-efforts entre 2&3 est : $P(2 \rightarrow 3/2) = \vec{F}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{V}_{I \in 3/2}$

Or entre 2&3 on a un roulement sans glissement au point I donc : $\vec{V}_{I \in 3/2} = \vec{0} \Rightarrow P(2 \rightarrow 3/2) = 0$

On a donc la somme des puissances des inter-efforts (Somme des puissances intérieures) s'appliquant sur S dans son mouvement par rapport au bâti 0 : **$\Sigma P(\text{Int} \rightarrow S/0) = 0$**

En appliquant au système $S = \{1, 2, 3\}$ le Théorème de l'énergie cinétique :

$$\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow S/0) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow S/0) = \frac{d E_C(S/0)}{dt} \quad \text{on obtient donc :}$$

$$\begin{aligned} [m_1 - (m_2 + m_3)] \cdot g \cdot d \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha + C_m \cdot \dot{\alpha} = & \left(I_1 + m_1 \cdot d^2 + m_2 \cdot d^2 + \frac{m_2}{2} \cdot d^2 \cdot \sin^2 \alpha + m_3 \cdot d^2 \cdot \cos^2 \alpha \right) \cdot \dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha} \dots \\ & + \left(\frac{m_2}{2} \cdot d^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha - m_3 \cdot d^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \right) \cdot \dot{\alpha}^2 \end{aligned}$$

En simplifiant par $\dot{\alpha}$ on retrouve bien le résultat de la question 5 :

$$\begin{aligned} C_m = (m_2 + m_3 - m_1) \cdot g \cdot d \cdot \cos \alpha + & \left(I_1 + m_1 \cdot d^2 + m_2 \cdot d^2 + m_3 \cdot d^2 \cdot \cos^2 \alpha + \frac{m_2 \cdot d^2}{2} \cdot \sin^2 \alpha \right) \cdot \ddot{\alpha} \dots \\ & + \left(\frac{m_2}{2} - m_3 \right) \cdot d^2 \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$