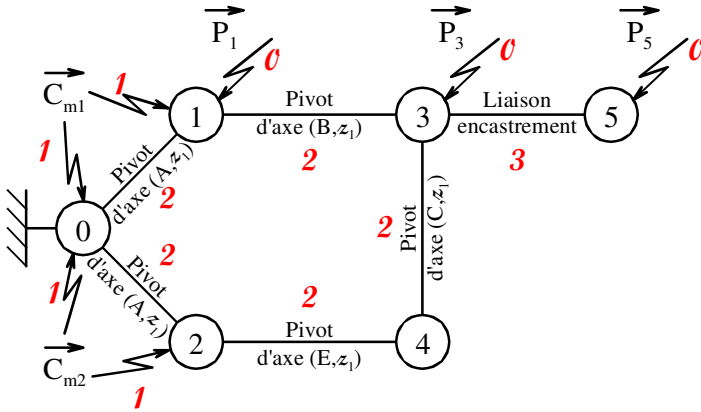


DM1 – PSI**Robot industriel****Corrigé****1- géométrie du robot**

Le quadrilatère ABCE est un parallélogramme (car $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{EC}\|$ et $\|\overrightarrow{EA}\| = \|\overrightarrow{CB}\|$) donc on a quelque soit la position du robot (AB)//(EC) et (EA)//(CD). On a donc bien $\overrightarrow{x_4} = \overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{x_2}$.

2- Graphe de structure

Torseurs sthéniques des différentes liaisons pivot d'axe $\overrightarrow{z_1}$ et de centres A, B, C ou E :

$$\{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & 0 \\ Y_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_1} \quad \text{Donc } \mathbf{2 \text{ inconnues}}$$

2 pour la résultante et 0 pour le moment nul.

Les torseurs de ces différentes actions de liaison sont donc des glisseurs d'axe passant au centre de la liaison. Soit des forces appliquées au centre de la liaison. Sauf pour la liaison entre 3 et 5.

3- Isolement de 4

Bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur 3 :

☞ Action de 2 sur 4 : Force $\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 4}}$ appliquée en E

☞ Action de 3 sur 4 : Force $\overrightarrow{F_{3 \rightarrow 4}}$ appliquée en C

Cette biellette 4 est à l'équilibre (inertie négligée) On a donc les équations vectorielles :

☞ TMD en E : $\vec{0} + \overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 4}} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 4}} // (EC) \Rightarrow \mathbf{L'action \ de \ 3 \rightarrow 4 \ est \ 1 \ force \ de \ support \ (E, \ \overrightarrow{x_1}).}$

☞ TMD en C : $\overrightarrow{CE} \wedge \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 4}} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 4}} // (EC)$

Ou TRD : $\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 4}} + \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 4}} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 4}} = -\overrightarrow{F_{3 \rightarrow 4}} \Rightarrow \mathbf{L'action \ de \ 2 \rightarrow 4 \ est \ 1 \ force \ de \ support \ (E, \ \overrightarrow{x_1}).}$

4- Accélération angulaire du balancier 1

La course du balancier $\left(\frac{\pi}{3} \text{ rad}\right)$ représente l'aire sous le trapèze des vitesses.

$$\text{Donc : } \frac{\pi}{3} = \dot{\alpha}_{\max} \cdot \frac{T_1}{2} + \dot{\alpha}_{\max} \cdot (T - T_1) + \dot{\alpha}_{\max} \cdot \frac{T_1}{2} = \dot{\alpha}_{\max} \cdot (T + T_1) \quad \text{Or : } \dot{\alpha}_{\max} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\text{Donc : } T_1 = T - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3}{\pi} = 0,5 \text{ s} \quad \text{D'autre part : } \ddot{\alpha} = \frac{\dot{\alpha}_{\max}}{T_1} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{0,5} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad.s}^{-2}$$

5- Accélération du bras 3

Sachant que quelque soit t : $\beta = \dot{\beta} = 0$, on a $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_0}$ soit comme $\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{x_2}$.

On a donc : $\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{x_0}$. Par conséquent : $\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \vec{0}$.

Donc le mouvement de 3 et 5 par rapport à 0 est un mouvement de translation.

On a donc : $\overrightarrow{V_{G3 \in 3/0}} = \overrightarrow{V_{J \in 5/0}} = \overrightarrow{V_{B \in 3/0}}$

B est le centre de la liaison pivot entre 1 et 3 donc : $\overrightarrow{V_{B \in 3/0}} = \overrightarrow{V_{B \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

A est le centre de la liaison pivot entre 1 et 0 donc : $\overrightarrow{V_{A \in 1/0}} = \vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{V_{G3 \in 3/0}} = \overrightarrow{V_{J \in 5/0}} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -\ell \cdot \overrightarrow{x_1} \wedge \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \quad \overrightarrow{V_{G3 \in 3/0}} = \overrightarrow{V_{J \in 5/0}} = \ell \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1}$

Par dérivation vectorielle on a donc : $\overrightarrow{a_{G3 \in 3/0}} = \overrightarrow{a_{J \in 5/0}} = \left(\frac{d \overrightarrow{V_{G3 \in 3/0}}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0}$

Par la relation de Bour : $\left(\frac{d \overrightarrow{V_{G3 \in 3/0}}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_0} = \left(\frac{d \overrightarrow{V_{G3 \in 3/0}}}{dt} \right)_{\mathcal{B}_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G3 \in 3/0}}$

Soit : $\overrightarrow{a_{G3 \in 3/0}} = \ell \ddot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \ell \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1}$

On obtient donc finalement : $\overrightarrow{a_{G3 \in 3/0}} = \overrightarrow{a_{J \in 5/0}} = \ell \ddot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} - \ell \dot{\alpha}^2 \cdot \overrightarrow{x_1}$

6- Isolement du système {bras 3 + charge 5}

Bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur {3,5} :

- ☞ Action de la pesanteur sur 3 : Force $\overrightarrow{P_3} = -m_3 \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0}$ appliquée en G_3 .
- ☞ Action de la pesanteur sur 5 : Force $\overrightarrow{P_5} = -m_5 \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0}$ appliquée en J.
- ☞ Action de 4 sur 3 : Force $\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}} = X_{43} \cdot \overrightarrow{x_1}$ appliquée en C
- ☞ Action de 1 sur 3 : Due à la liaison pivot d'axe (B, $\overrightarrow{z_1}$)

Théorème de la résultante dynamique : $\overrightarrow{P_3} + \overrightarrow{P_5} + \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}} + \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 3}} = m_3 \cdot \overrightarrow{a_{G3 \in 3/0}} + m_5 \cdot \overrightarrow{a_{J \in 5/0}}$

Théorème du moment dynamique au point B :

$$\overrightarrow{BG_3} \wedge \overrightarrow{P_3} \cdot \overrightarrow{z_1} + \overrightarrow{BJ} \wedge \overrightarrow{P_5} \cdot \overrightarrow{z_1} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 3}} \cdot \overrightarrow{z_1} + 0 = \overrightarrow{BG_3} \wedge m_3 \cdot \overrightarrow{a_{G3 \in 3/0}} \cdot \overrightarrow{z_1} + \overrightarrow{BJ} \wedge m_5 \cdot \overrightarrow{a_{J \in 5/0}} \cdot \overrightarrow{z_1}$$

On obtient donc les trois équations scalaires :

$$\text{TRD} / \overrightarrow{x_1} : -m_3 \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{x_1} - m_5 \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{x_1} + X_{43} + X_{13} = (m_3 + m_5) \cdot (\ell \ddot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} - \ell \dot{\alpha}^2 \cdot \overrightarrow{x_1}) \cdot \overrightarrow{x_1}$$

$$\text{TRD} / \overrightarrow{y_1} : -m_3 \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{y_1} - m_5 \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{y_1} + 0 + Y_{13} = (m_3 + m_5) \cdot (\ell \ddot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} - \ell \dot{\alpha}^2 \cdot \overrightarrow{x_1}) \cdot \overrightarrow{y_1}$$

$$\text{TMD en A} / \overrightarrow{z_1} : \frac{h-d}{2} \cdot \overrightarrow{x_0} \wedge (-m_3 \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0}) \cdot \overrightarrow{z_1} + h \cdot \overrightarrow{x_0} \wedge (-m_5 \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0}) \cdot \overrightarrow{z_1} + d \cdot \overrightarrow{x_0} \wedge X_{43} \cdot \overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{z_1} + 0 =$$

$$m_3 \cdot \frac{h-d}{2} \cdot \overrightarrow{x_0} \wedge (\ell \ddot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} - \ell \dot{\alpha}^2 \cdot \overrightarrow{x_1}) \cdot \overrightarrow{z_1} + m_5 \cdot h \cdot \overrightarrow{x_0} \wedge (\ell \ddot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} - \ell \dot{\alpha}^2 \cdot \overrightarrow{x_1}) \cdot \overrightarrow{z_1}$$

$$\left| \begin{array}{l} X_{43} + X_{13} = (m_3 + m_5) \cdot (g \cdot \sin \alpha - \ell \dot{\alpha}^2) \\ Y_{13} = (m_3 + m_5) \cdot (g \cdot \cos \alpha + \ell \ddot{\alpha}) \\ d \cdot X_{43} \cdot \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{z_1} \cdot \overrightarrow{x_0} = \left(m_3 \cdot \frac{h-d}{2} + m_5 \cdot h \right) [(\ell \ddot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} - \ell \dot{\alpha}^2 \cdot \overrightarrow{x_1}) \wedge \overrightarrow{z_1} \cdot \overrightarrow{x_0} + g \cdot \overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{z_1}] \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} X_{43} + X_{13} = (m_3 + m_5) \cdot (g \cdot \sin \alpha - \ell \dot{\alpha}^2) \\ Y_{13} = (m_3 + m_5) \cdot (g \cdot \cos \alpha + \ell \ddot{\alpha}) \\ -d \cdot X_{43} \cdot \sin \alpha = \left(m_3 \cdot \frac{h-d}{2} + m_5 \cdot h \right) [(\ell \ddot{\alpha} \cdot \cos \alpha - \ell \dot{\alpha}^2 \cdot \sin \alpha) + g] \end{array} \right.$$

Soit :

$$X_{43} = \frac{[m_3 \cdot (h-d) + 2 \cdot m_5 \cdot h] \cdot (\ell \dot{\alpha}^2 \cdot \sin \alpha - \ell \ddot{\alpha} \cdot \cos \alpha - g)}{2 \cdot d \cdot \sin \alpha}$$

$$X_{13} = (m_3 + m_5) \cdot (g \cdot \sin \alpha - \ell \dot{\alpha}^2) - \frac{[m_3 \cdot (h-d) + 2 \cdot m_5 \cdot h] \cdot (\ell \dot{\alpha}^2 \cdot \sin \alpha - \ell \ddot{\alpha} \cdot \cos \alpha - g)}{2 \cdot d \cdot \sin \alpha}$$

$$Y_{13} = (m_3 + m_5) \cdot (g \cdot \cos \alpha + \ell \ddot{\alpha})$$

7- Composante minimale de l'action de 3 sur 1

Du principe des actions mutuelles : $\overrightarrow{F_{3 \rightarrow 1}} = -\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 3}}$. Soit : $Y_{31} = -(m_3 + m_5) \cdot (g \cdot \cos \alpha + \ell \ddot{\alpha})$

Donc Y_{31} est minimal pour $(g \cdot \cos \alpha + \ell \ddot{\alpha})$ maximal. Or au début de la phase 1 $\cos \alpha$ et $\ddot{\alpha}$ sont maximal avec $\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \left(\cos \alpha = \frac{1}{2} \right)$ et $\ddot{\alpha} = \frac{2 \cdot \pi}{3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$. Soit : $(g \cdot \cos \alpha + \ell \ddot{\alpha}) = \frac{g}{2} + \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot \ell$

Donc Y_{31} est minimal (maximal en valeur absolue) au début de la phase 1 avec :

$$Y_{31\text{min}} = -(m_3 + m_5) \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot \ell + \frac{g}{2} \right)$$

8- Moment d'inertie du balancier1

Le balancier 1 ayant une section constante et petite devant sa longueur son moment d'inertie par rapport à l'axe $(G_1, \vec{z}_1)$ est $\frac{m_1 \cdot \ell^2}{12}$. Par le théorème de Huygens on en déduit le moment d'inertie I_{A1} du

balancier 1 par rapport à l'axe $(A, \vec{z}_0)$: $I_{A1} = \frac{m_1 \cdot \ell^2}{12} + m_1 \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$ Soit : $I_{A1} = \frac{m_1 \cdot \ell^2}{3}$

9- Isolement de la barre 1

Bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur 1 :

- ☞ Action de la pesanteur : Force $\vec{P}_1 = -m_1 \cdot g \cdot \vec{y}_0$ appliquée en G_1 .
- ☞ Action de 3 sur 1 : Force $\vec{F}_{3 \rightarrow 1} = X_{31} \cdot \vec{x}_1 + Y_{31} \cdot \vec{y}_1$ appliquée en B
- ☞ Action de 0 sur 1 : Due à la liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_1)$
- ☞ Action du couple moteur : Couple de vecteur moment : $\vec{C}_{m1} = C_{m1} \cdot \vec{z}_1$

Le théorème du moment dynamique (TMD) au point A donne :

$$\overrightarrow{AG_1} \wedge \vec{P}_1 + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_{3 \rightarrow 1} + \vec{0} + \vec{C}_{m1} = I_{A1} \cdot \ddot{\alpha}$$

$$\frac{\ell}{2} \cdot \vec{x}_1 \wedge (-m_1 \cdot g \cdot \vec{y}_0) + \ell \cdot \vec{x}_1 \wedge (X_{31} \cdot \vec{x}_1 + Y_{31} \cdot \vec{y}_1) + C_{m1} = \frac{m_1 \cdot \ell^2}{3} \cdot \ddot{\alpha}$$

$$C_{m1} = \frac{m_1 \cdot g \cdot \ell}{2} \cdot \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0 - \ell \cdot Y_{31} \cdot \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_1 + \frac{m_1 \cdot \ell^2}{3} \cdot \ddot{\alpha}$$

$$C_{m1} = \frac{m_1 \cdot g \cdot \ell}{2} \cdot \cos \alpha - \ell \cdot Y_{31} + \frac{m_1 \cdot \ell^2}{3} \cdot \ddot{\alpha}$$

Or $\cos \alpha$ et $\ddot{\alpha}$ sont maximal et Y_{31} minimal au début de la phase 1 avec :

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \ddot{\alpha} = \frac{2 \cdot \pi}{3} \quad Y_{31} = -(m_3 + m_5) \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot \ell + \frac{g}{2} \right)$$

Donc
$$C_{m1} = \frac{m_1 \cdot g \cdot \ell}{2} \cdot \frac{1}{2} + \ell \cdot (m_3 + m_5) \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot \ell + \frac{g}{2} \right) + \frac{m_1 \cdot \ell^2}{3} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$$

Soit finalement :

$$C_{m1} = m_1 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot \ell^2}{9} + \frac{g \cdot \ell}{4} \right) + (m_3 + m_5) \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot \ell^2}{3} + \frac{g \cdot \ell}{2} \right)$$