

PSI 2026 – 2027

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

DS N°1 : Sujet A

Véhicule intelligent Robucar



Consignes pour la réalisation du sujet

Ce sujet correspond à l'épreuve d'SII du concours E3A - MP - 2015
qui a cependant été modifié.

Le sujet est constitué de :

17 pages d'énoncé (pages 1/18 à 17/18)

1 Page document réponse : 18/18

**Vous répondrez à toutes les questions de l'énoncé
sauf la question 24 qui est grisée**

**Pour la question 8 vous utiliserez
le document réponse que vous détacherez du sujet
et rendrez avec votre copie.**

Véhicule intelligent RobuCar

Le candidat est invité à formuler toute hypothèse cohérente qui lui semblerait nécessaire pour pouvoir répondre aux questions posées.

Contexte

L'optimisation des transports de demain passera par l'emploi de véhicules dits intelligents. Des expériences ont déjà été tentées pour la réalisation de trains de poids lourds capables de se suivre en toute sécurité et à distance fixe, le lien étant télémétrique au lieu d'être physique.

Cette capacité "d'accrochage télémétrique" entre véhicule maître (leader) et véhicule suiveur (esclave) peut-être transposée à de nombreuses applications : transbordeurs de containers, exploitation minière / terrassement, transports en commun du futur...).

Afin d'étudier les comportements possibles de ces trains de véhicules intelligents dans différentes situations, normales et dégradées, le laboratoire d'Automatique Génie Informatique et Signal (LAGIS UMR8219) situé à Polytech-Lille utilise un démonstrateur composé d'un véhicule maître et deux véhicules suiveurs dont on peut voir l'architecture sur la figure 1.

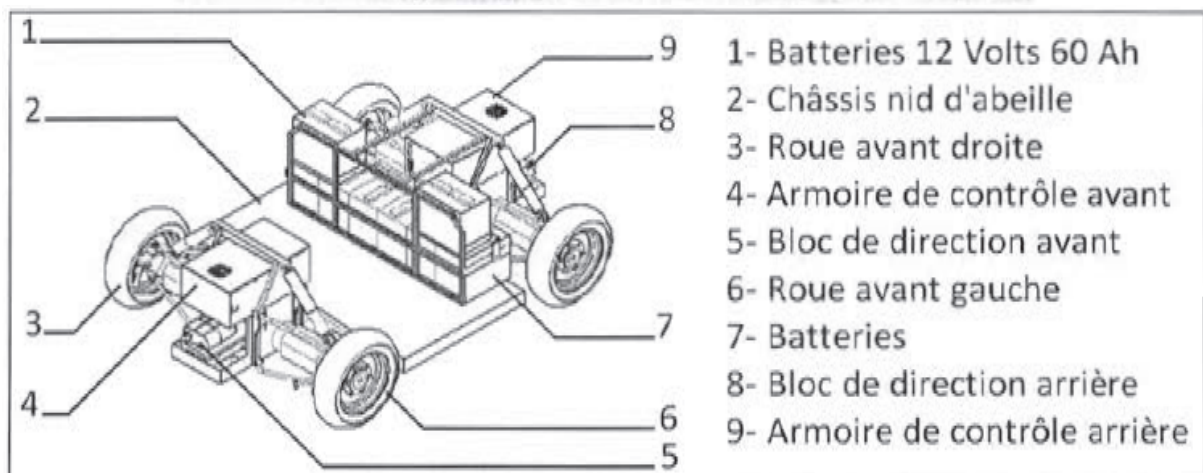
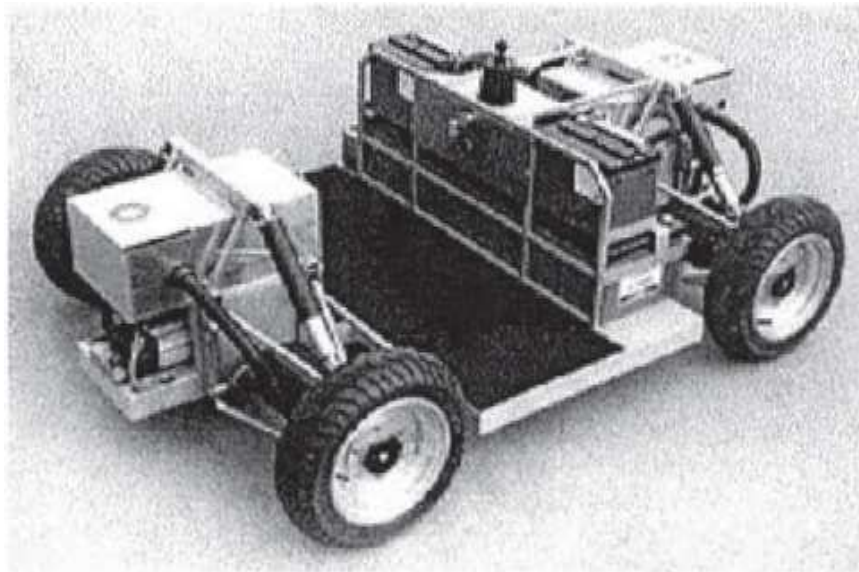


Figure 1 – Ensemble Châssis – Train roulant du véhicule RobuCar

Description de la morphologie du système

Le véhicule suiveur intelligent est un châssis à quatre roues motrices et directrices pilotables séparément (figure 1). Il y a donc deux paramètres de commande pour chaque roue (orientation (direction), vitesse de rotation (motricité))

Le schéma suivant présente un diagramme de définition des blocs pour une roue. Il permet de visualiser les deux chaînes d'énergie d'entraînement de la roue et d'orientation de la roue, ainsi que les éléments de la chaîne d'information tels que l'armoire de commande, les capteurs d'orientation et de vitesse de la roue.

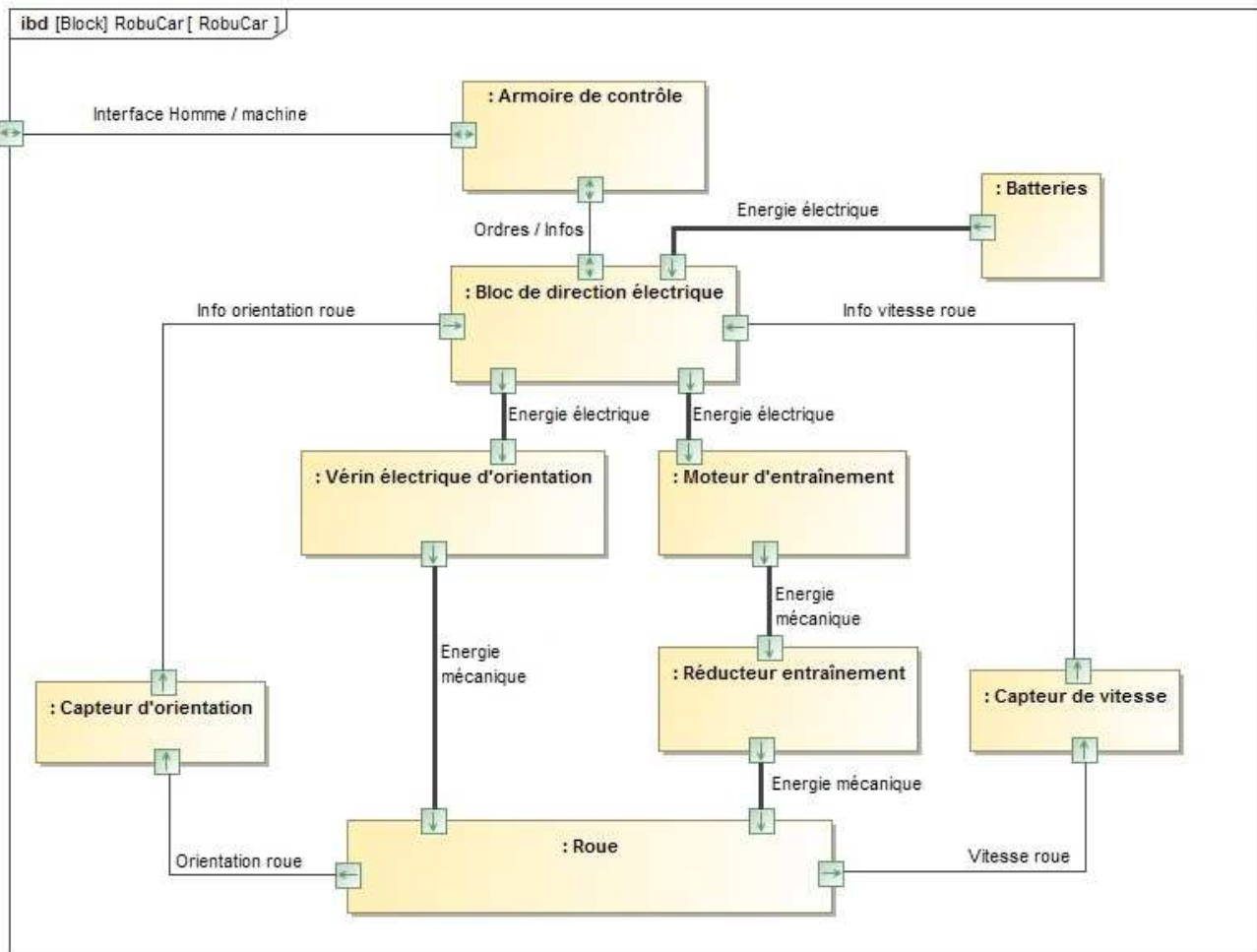


Diagramme de définition des blocs pour une roue

Objectif

L'objectif de l'étude proposée est d'obtenir un modèle analytique liant le comportement dynamique intrinsèque du véhicule suiveur aux paramètres de la chaîne de commande des différents actionneurs.

Le modèle obtenu doit ainsi permettre d'étudier les stratégies de commande adaptées aux différentes situations.

A cet effet, le sujet est articulé autour de six parties (I.A à I.C et II.A à II.C), chacune étant indépendante de la précédente. Le candidat est tout de même invité à les traiter dans l'ordre.

I. Etude des différentes trajectoires possibles

Hypothèses

- L'hypothèse maîtresse de l'étude consiste à considérer que les quatre roues du véhicule sont en contact ponctuel sur un sol parfaitement horizontal, et qu'il y a roulement sans glissement.
- On admet que l'adhérence roue/sol vérifie la loi du frottement sec de Coulomb. Le non-glissement est donc assuré dès lors que :

$$\|\vec{T}\| < \mu \cdot \|\vec{N}\|$$

Où $\|\vec{T}\|$ est le module de l'effort tangentiel sol/roue, $\|\vec{N}\|$ est le module de l'effort normal sol/roue, et μ le coefficient de frottement de Coulomb du contact roue/sol considéré. Sur sol sec et avec des pneumatiques en bon état, on admet que $\mu \approx 0,9$.

Dans ces conditions, le déplacement du châssis est assimilable à un mouvement plan sur plan. Le respect d'une trajectoire revient à piloter les valeurs des paramètres de mouvement de chaque roue (orientation et vitesse de rotation), les valeurs de ces paramètres devant être cohérentes entre elles pour respecter le roulement sans glissement et sans dérapage de chacune des roues.

L'objectif de l'étude cinématique est d'écrire les relations liant les paramètres de mouvement dans les deux cas de figure les plus simples : la ligne droite et le virage.

Dans le cas de la translation, tous les points du châssis ont la même vitesse par rapport au repère fixe.

Les caractéristiques du groupe moto-propulseur sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Moteur	Vitesse de rotation maximale	3200 tr/mn
	Couple nominal	2,7 Nm
	Puissance Maximale	900 W
Réducteur	Rapport de réduction	N = 13
Roue	Rayon	R = 0,20 m

Tableau 1. Caractéristiques du groupe moto-réducteur-roue

Un extrait du cahier des charges est fourni ci-dessous :

Entraîner et freiner le véhicule sur sol sec.	Vitesse à atteindre	15 km/h
	Valeur absolue de la décélération sans glissement des roues (Pour $\mu = 0,9$)	Supérieure à 5 m.s^{-2}
Orienter le véhicule via un rayon de virage standard de 6,4 m	Temps pour un virage de 45°	Inférieur à 3 s

Q1. A l'aide des données fournies dans le tableau 1, et en tenant compte des hypothèses de l'étude, calculer la vitesse maximale ' V_{max} ' en ligne droite du véhicule. Vérifier la performance attendue par le cahier des charges.

I.A. Etude des phases transitoires accélération / freinage en ligne droite.

Dans ces phases transitoires, l'altitude du centre de gravité du véhicule par rapport au sol influe sur l'équilibre dynamique de celui-ci, et notamment sur la répartition avant/arrière de la charge normale/verticale supportée par les roues. La motricité des roues dépend directement de celle-ci. On doit donc calculer la charge normale/verticale appliquée sur chaque roue afin d'en déduire la capacité de transmission d'effort tangentiel correspondant. On pourra ainsi optimiser la répartition de l'effort tangentiel de freinage ou d'accélération entre train avant et train arrière.

Le but de cette partie est d'établir un modèle permettant de valider le cahier des charges. Pour cette étude, le problème étant symétrique, on adopte le modèle simplifié ramené au plan de symétrie conformément au schéma suivant :

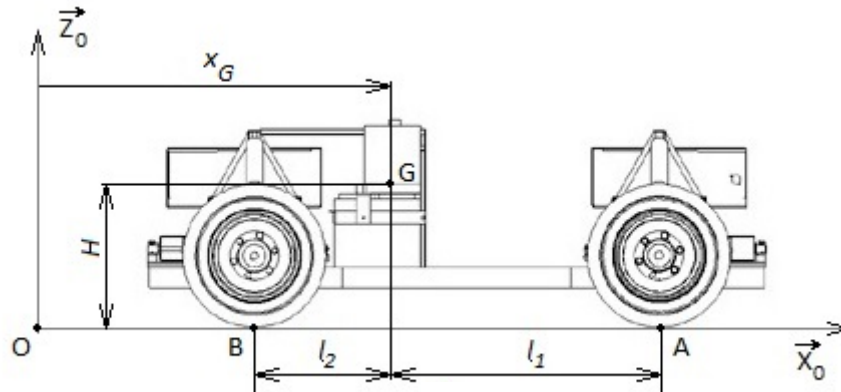


Figure 2 - Modèle plan proposé –

On définit la base B_0 liée au sol : $B_0 = (\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$

Le choix d'orientation des axes $\vec{X}_0$ et $\vec{Z}_0$ impose un axe $\vec{Y}_0$ vers l'arrière de la figure.

L'avant du véhicule étant sur ce schéma à droite la vitesse au début de la phase de freinage la vitesse est telle que :

$$\vec{V}_{G \in \text{veh./Sol}} = \dot{x}_G \cdot \vec{X}_0 \quad \text{avec : } \dot{x}_G > 0$$

Hypothèses :

On note G le centre d'inertie du véhicule, et M sa masse.

On considère un problème plan $(G, \vec{X}_0, \vec{Z}_0)$.

Le véhicule est considéré comme trois solides (Châssis + les essieux avant et arrière).

On néglige l'inertie des roues sur le comportement dynamique du véhicule. C'est-à-dire que les roues (et donc des essieux) ont des inerties nulles.

Les roues restent en contact avec le sol et les suspensions sont suffisamment rigides pour que le phénomène de plongée soit négligé (Le châssis ne tangue pas vers l'avant).

Le contact sol/roue est assimilable à un contact ponctuel frottant, c'est-à-dire une liaison sphère plan non parfaite avec deux composantes : normale et tangentielle.

Le modèle cinématique du véhicule sur le sol a donc les liaisons suivantes :

- ☞ Sol/essieu-avant : Liaison sphère plan de normale $(A, \vec{Z}_0)$
- ☞ Châssis/essieu-avant : Pivot parfaite d'axe $(O_A, \vec{Y}_0)$
- ☞ Sol/essieu-arrière : Liaison sphère plan de normale $(B, \vec{Z}_0)$
- ☞ Châssis/essieu-arrière : Pivot parfaite d'axe $(O_B, \vec{Y}_0)$

Constantes : $\vec{g}$: Champs de pesanteur : $\vec{g} = -g \cdot \vec{Z}_0$ avec : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

$$l_1, l_2, R \text{ et } H \text{ dimensions du véhicule : } \begin{aligned} \vec{BA} &= (l_1 + l_2) \cdot \vec{X}_0 \\ \vec{BG} &= l_2 \cdot \vec{X}_0 + H \cdot \vec{Z}_0 \\ \vec{BO}_B &= \vec{AO}_A = R \cdot \vec{Z}_0 \end{aligned}$$

Variable : $x_G(t)$: Abscisse du centre de gravité par rapport à l'origine du repère.

On se place en phase de freinage. Les composantes de la résultante des actions de contact du sol sur les roues sont notées T_A , N_A , en A pour les roues avant, T_B et N_B en B pour les roues arrière, où T est mis pour la composante Tangentielle au sol et N pour la composante normale. Le moment de chaque action de contact, au point de contact, est négligé.

Le torseur des actions de contact sol roues-avants, exprimé au point de contact A, et pour le modèle plan adopté est donc :

$$\{T(\text{sol} \rightarrow \text{essieu_avant})\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{cc} T_A & 0 \\ 0 & 0 \\ N_A & 0 \end{array} \right\}}_{B_0}$$

$$\{T(\text{sol} \rightarrow \text{essieu_arrière})\} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_B \\ \vec{0} \end{array} \right\}} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{cc} T_B & 0 \\ 0 & 0 \\ N_B & 0 \end{array} \right\}}_{B_0}$$

T_A, N_A, T_B, N_B
sont des valeurs algébriques
(positives ou négatives).

Pour les applications numériques on utilisera les valeurs suivantes :

$$M = 310 \text{ kg} \quad \ell_1 = 0,75 \text{ m} \quad \ell_2 = 0,55 \text{ m} \quad H = 0,42 \text{ m}$$

Q2. On se place dans le cas d'un freinage optimal pour lequel les roues avant et arrière sont toutes à la limite de l'adhérence. Donner, dans ce cas, la relation liant les composantes des résultantes suivant $\vec{X}_0$ et $\vec{Z}_0$ des actions du sol sur les essieux avant et arrière. En déduire la valeur de la décélération en fonction de la valeur μ du coefficient de frottement. Préciser les théorèmes et projections utilisés.

Q3. Vérifier la performance attendue par le cahier des charges par une application numérique.

Q4. Quelle est alors la distance de freinage pour une vitesse initiale de 15 km/h.

Q5. On envisage maintenant que seules les roues avant freinent. L'essieu arrière, n'est donc plus soumis à un couple de freinage. En déduire dans ce cas (en justifiant) la direction de la résultante de l'action du sol sur l'essieu arrière.

Q6. Peut-on envisager de respecter le cahier des charges en ne freinant qu'avec les roues avant ? Justifier votre réponse par l'application d'un PFD et une application numérique, sachant que la roue avant est en limite d'adhérence.

Q7. Peut-on envisager de respecter le cahier des charges en ne freinant qu'avec les roues arrière ? Justifier votre réponse en donnant les hypothèses faites, les systèmes isolés et les théorèmes utilisés.

Dans la pratique, le coefficient de frottement n'est pas constant mais varie de façon complexe en fonction de plusieurs paramètres. On adopte un modèle simplifié basé sur la valeur de la vitesse V du véhicule par la loi :

$$\mu = 0,8 + 0,2 \cdot e^{\frac{-V}{V_{REF}}} \quad \text{avec } V_{REF} = 5 \text{ m.s}^{-1}$$

Etudier l'évolution de la vitesse pour déterminer la distance de freinage nécessite donc une résolution numérique par la méthode d'Euler. On écrit pour cela un programme en langage Python (donné à la page 18/18) en considérant les deux roues en limite d'adhérence.

Q8. Compléter le programme en langage Python (Compléter directement sur la page 18/18 que vous rendrez avec votre copie). On respectera le codage proposé pour les noms des variables.

Q8.a- Donner sur la page 18/18 la condition de la boucle while : Zone A

Q8.b- Donner sur la page 18/18 les lignes de d'intégration en temps : Zone B

Q8.c- Donner sur la page 18/18 les lignes d'affectation des résultats : Zone C

I.B. Etude du suivi de trajectoire / Modélisation du virage

On considère que les virages sont effectués en pilotant de façon conjuguée les orientations des trains avant et arrière conformément au modèle de la figure 3. De cette façon à la valeur près des paramètres a et b , le pilotage du train arrière (roues 3 et 4) est une image du pilotage du train avant (roues 1 et 2).

L'objectif de cette partie est de définir les lois de pilotage d'entraînement des roues afin de suivre une trajectoire définie. On se limite à une trajectoire circulaire.

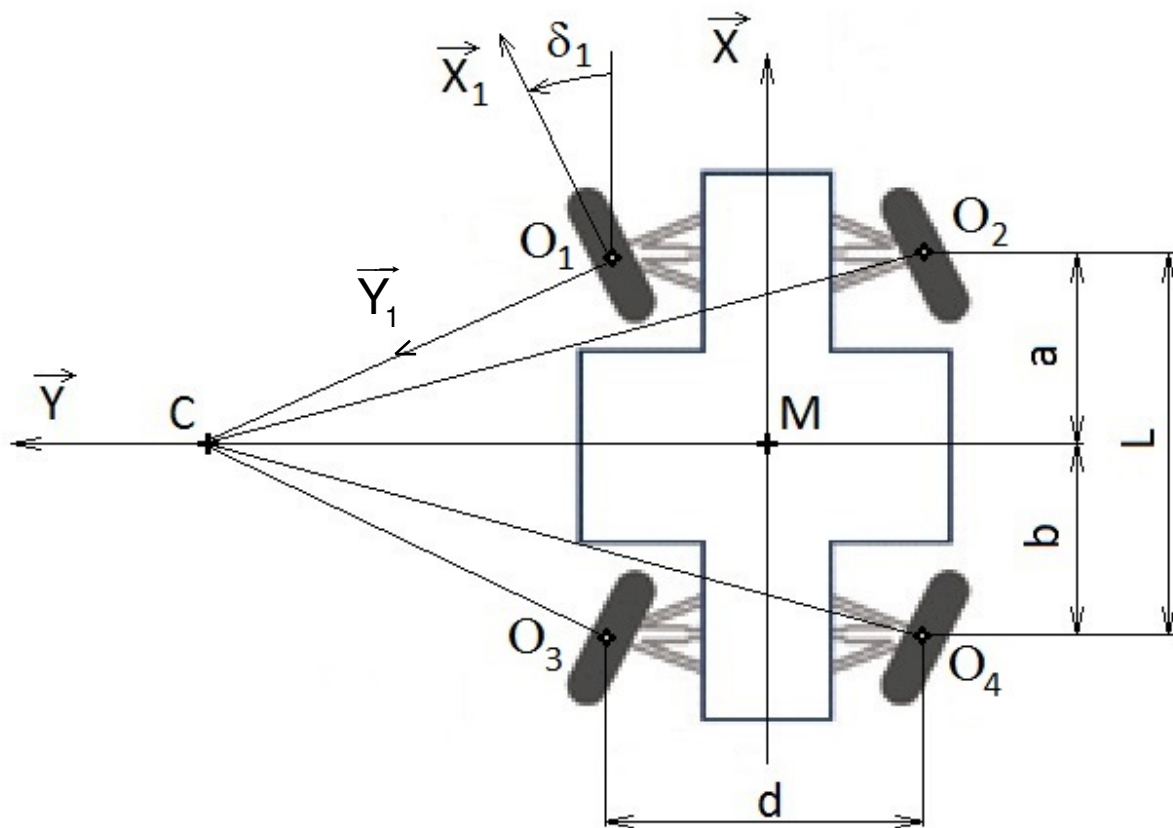


Figure 3. - Véhicule en virage vue du dessus -

Le pilotage conjugué des directions avant et arrière conduit à l'identification d'un point M de l'axe longitudinal du châssis défini par rapport à C , centre de la trajectoire circulaire à l'instant t par : $\overrightarrow{CM} \perp \vec{X}$ avec $\overrightarrow{CM} = -\rho \vec{Y}$.

On définit les bases suivantes :

- $(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ liée au sol,
- $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}_0)$ liée au châssis S du véhicule,
- $(\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_0)$ liée à l'axe de la roue i .

On note : O_i : Le point du plan médian de la roue i appartenant à l'axe (cf figure 4).
 S : le Châssis

Le mouvement du véhicule est un mouvement de rotation autour du point C fixe.

On note que le taux de changement d'orientation du châssis par rapport au repère fixe lié au sol, dû à la trajectoire circulaire autour de C est : $\vec{\Omega}(S / R_0) = \dot{\psi} \vec{Z}_0$.

On note V la vitesse du point M : $\overrightarrow{V_{M \in S / Sol}} = V \cdot \vec{X} = \rho \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{X}$ avec V constante.

Pour chaque roue, on peut considérer localement la figure ci-dessous :

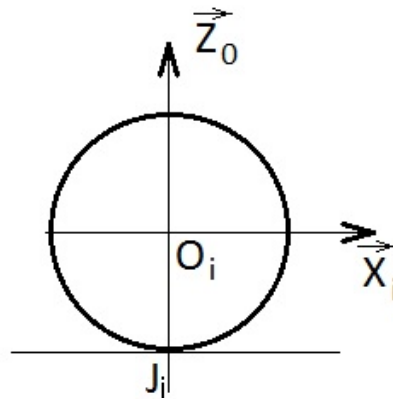


Figure 4. - Modélisation du contact en J_i roue/sol dans le plan médian de la roue -

Soit :

$\vec{\Omega}(Roue_i/S) = \dot{\theta}_i \cdot \vec{Y}_i$: vitesse de rotation de la roue i par rapport au châssis S .

R : la valeur du rayon des roues.

Q9. Donner l'expression vectorielle dans la base $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}_0)$ des vitesses $\vec{V}_{O1 \in S/Sol}$ et $\vec{V}_{O2 \in S/Sol}$ en fonction de ρ, a, d et $\dot{\psi}$.

Q10. Donner en justifiant votre réponse l'expression dans la base $(\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_0)$ du taux de rotation de la roue i (1, 2, 3 ou 4) par rapport au sol : $\vec{\Omega}(Roue_i/R_0)$.

Q11. En déduire en faisant l'hypothèse du roulement sans glissement de la roue sur le sol au point J_i , l'expression vectorielle dans la base $(\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_0)$ de $\vec{V}_{O1 \in Roue1/Sol}$ et dans la base $(\vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_0)$ de $\vec{V}_{O2 \in Roue2/Sol}$ en fonction de R et $\dot{\theta}_i$.

Q12. Justifier que $\vec{V}_{O1 \in Roue1/S} = \vec{0}$, et établir deux relations scalaires, entre $\dot{\theta}_1$, δ_1 et $\dot{\psi}$, après projection dans la base $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}_0)$.

Q13. Etablir de la même manière deux relations scalaires, entre $\dot{\theta}_2$, δ_2 et $\dot{\psi}$.

Q14. En déduire les expressions de $\tan(\delta_1)$ et de $\tan(\delta_2)$ en fonction de ρ , a et d . Effectuer l'application numérique pour : $a = 0,65$ m ; $d = 1,2$ m ; $\rho = 5$ m

Q15. Etant donné les valeurs de δ_1 et δ_2 , pour $\rho \geq 5$ m. En déduire les expressions simplifiées (linéaires) de $\dot{\theta}_1$ et de $\dot{\theta}_2$ en fonction de $\dot{\psi}$.

I.C. Etude du taux de rotation des roues 1 et 2 au cours d'un virage

L'objectif de cette partie est d'établir les lois de commande et de valider le cahier des charges du point de vue du temps de virage de 45° .

On souhaite conserver V (module de la vitesse du point M centre du châssis) constant au cours d'un changement de direction de 45° .

Le scénario retenu pour piloter un virage imposé par le suivi de trajectoire est décomposé en cinq phases :

- $t < t_0$: translation rectiligne
- $t_0 < t < t_1$: mouvement transitoire
- $t_1 < t < t_2$: mouvement de rotation autour de C
- $t_2 < t < t_3$: mouvement transitoire
- $t_3 < t$: translation rectiligne

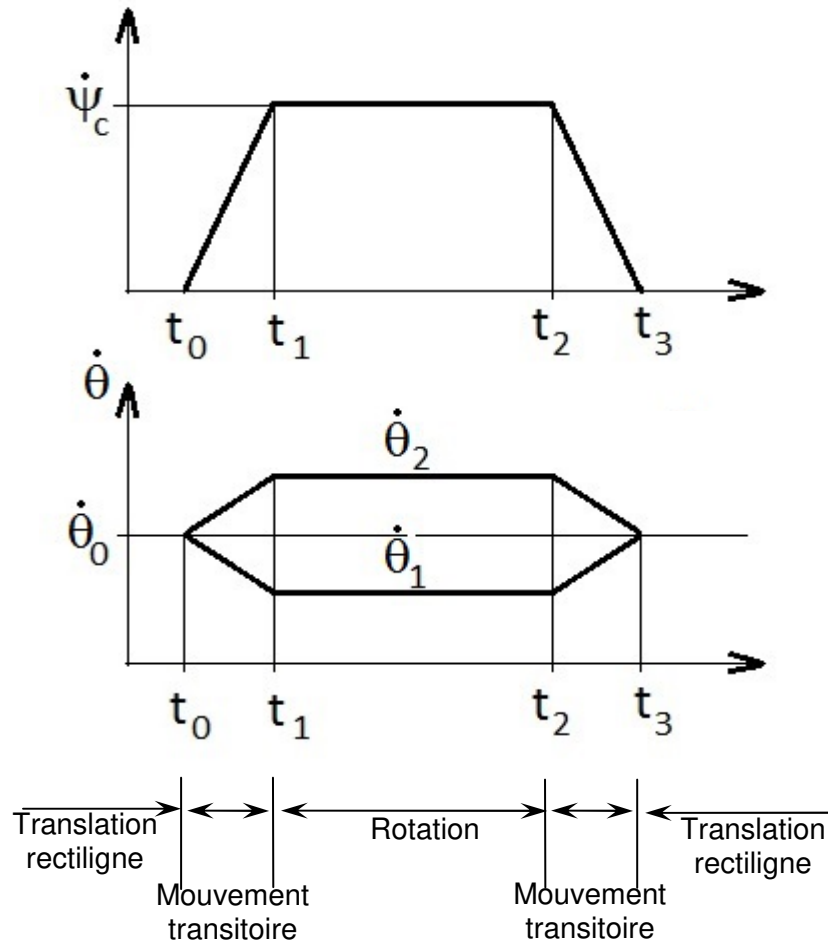


Figure 5. - Scénario retenu pour effectuer un virage -

Ce scénario est nécessaire car on ne peut pas passer brutalement de la ligne droite à un virage de rayon donné. En effet, cela imposerait un changement instantané des taux de rotation des roues, ce qui est physiquement impossible.

On définit $\vec{V}_{M \in S/Sol} = V \cdot \vec{X}$ avec le vecteur $\vec{X}$ lié au véhicule donc mobile par rapport au sol.

$\dot{\psi}_c$ représente la valeur de consigne et est directement calculée par $\dot{\psi}_c = \frac{V}{\rho}$, avec ρ le rayon de virage imposée par le parcours à l'instant t et V la vitesse du point M au même instant t .

On peut aisément montrer que : $\dot{\psi} = \frac{(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)}{d} R$, $\rho \dot{\psi} = V = \frac{(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1)}{2} R$

On donne : $|\ddot{\psi}_{Max}| = |\ddot{\psi}_0| = 1 \text{ rad.s}^{-2}$, valeur constante pendant les deux phases transitoires qui

on la même durée : $(t_3 - t_2) = (t_1 - t_0) = \left| \frac{\dot{\psi}_c}{\ddot{\psi}_0} \right|$

Q16. Déterminer l'expression littérale du changement d'orientation total effectué $\psi_{TOT} = \psi(t_3)$ en fonction de $\dot{\psi}_C$ et $(t_2 - t_0)$

Q17. En déduire $(t_3 - t_0)$, la durée totale d'un changement d'orientation de 45° pour un virage à gauche de rayon $\rho = 6,4 \text{ m}$ effectué à $V = 10 \text{ km/h}$. le cahier des charges est-il vérifié ?

II. Modélisation et Commande du véhicule

II.A Modélisation du comportement de l'ensemble moto-réducteur-roue

La trajectoire et la vitesse du véhicule autonome est assurée par la commande de 4 roues indépendantes assurée chacune par un moteur électrique. Le schéma de principe de chaque système de commande et le schéma-bloc représentés par les figures 6 (a) et (b), sont constitués d'un moteur électrique à courant continu, d'un réducteur de vitesse et de la roue.

La partie électrique est pilotée par une source de tension $u(t)$ alimentant le stator représenté par la mise en série d'une résistance électrique (R_e) et d'une inductance (L). Le courant induit $i(t)$, fournit un couple moteur $c_m(t)$ ($c_m(t) = K_{em}i(t)$) à l'arbre du moteur soumis à des frottements visqueux f_m et ayant une inertie J_m .

Le couple moteur est transmis avec un rapport $1/N$ à l'arbre de la roue de raideur K et soumis à des frottements visqueux f_r et ayant une inertie J_r . La roue est soumise à un couple résistant $c_p(t)$ du contact pneu-chaussée dû à la force longitudinale F_p . Le tableau 2 (page 11/17) définit la nomenclature des variables utilisées.

L'objectif est d'obtenir les équations du comportement dynamique dans la direction longitudinale pour la synthèse du système asservi de la vitesse angulaire. La figure 7 représente le schéma de principe de la commande du véhicule.

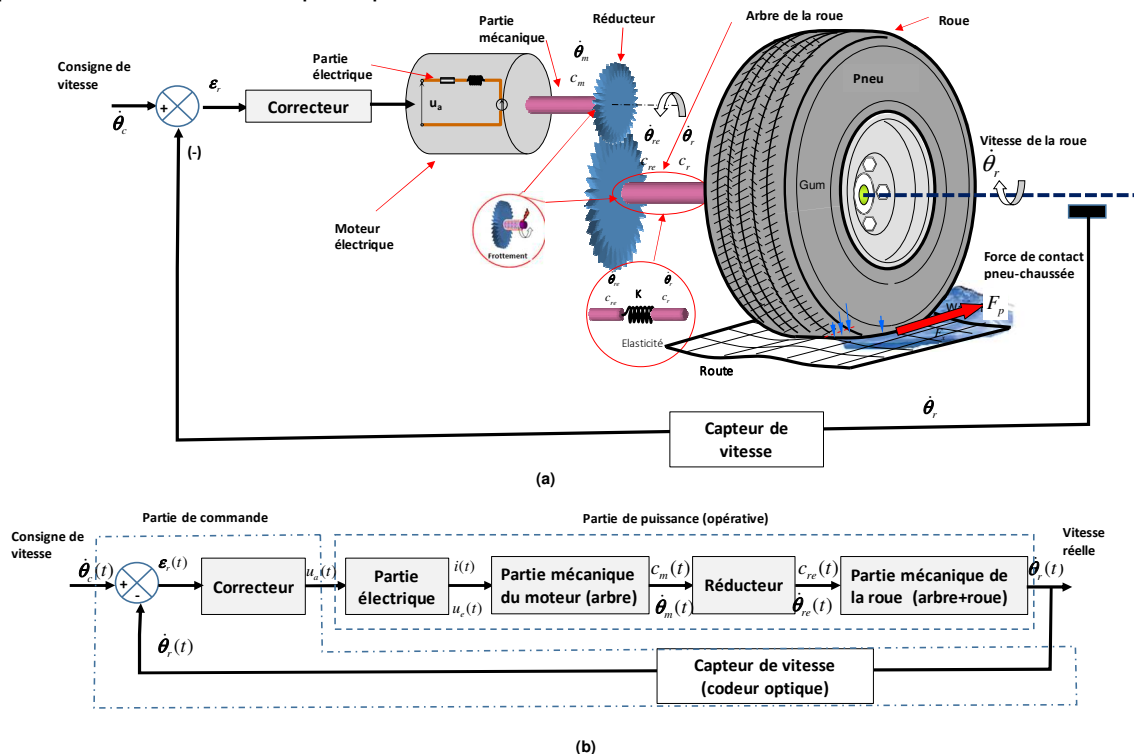
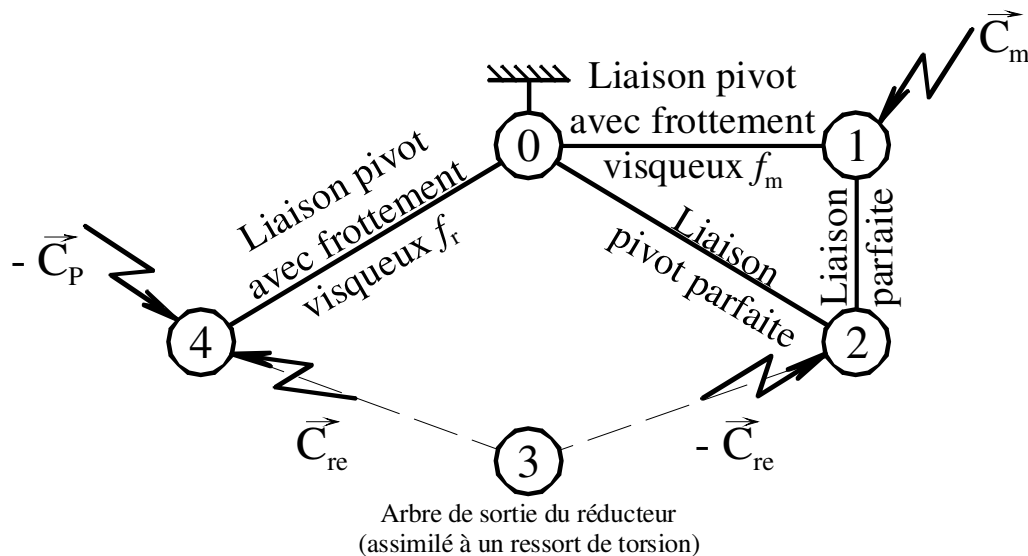


Figure 6 : - Schéma de principe (a) et bloc diagramme (b) du système moto-réducteur-roue

On donne ci-dessous un graphe de structure du mécanisme de la partie puissance :



- 0 : Châssis du véhicule
- 1 : Arbre moteur + arbre d'entrée avec sa roue dentée du réducteur à engrenage.
- 2 : Roue dentée de sortie du réducteur
- 3 : Arbre de sortie du réducteur (assimilé à un ressort de torsion de raideur K)
- 4 : Axe de roue avec la roue du véhicule

La liaison engrenage entre 1 et 2 (assimilée à une liaison ponctuelle) ainsi que la liaison pivot entre 0 et 2 sont supposées parfaites.

En revanche les liaisons pivot entre 0 et 1 ainsi que entre 0 et 4 se font avec du frottement visqueux. On a donc un moment par rapport à l'axe de la liaison pivot exercé par le châssis du véhicule égal à $-f_m \dot{\theta}_m$ ou $-f_r \dot{\theta}_r$ où f est le coefficient de frottement visqueux et $\dot{\theta}$ la vitesse de rotation de l'arbre.

A) Hypothèses de modélisation

La propulsion est assurée par les couples fournis par les 4 moteurs de roues. La direction est contrôlée à partir d'une différenciation de vitesse sur les trains arrière $\dot{\theta}_3$ et $\dot{\theta}_4$, et avant $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$. Les vitesses de rotation des roues $\dot{\theta}_i$ (i de 1 à 4) sont mesurées par un codeur incrémental fixé sur l'arbre du moteur.

Le courant du moteur $i(t)$ est également mesuré. La variable de commande (variable réglante) est la tension d'alimentation du moteur $u_a(t)$ de valeur maximale 48 V.

Paramètre	Désignation	Valeur
Partie électrique du moteur et contrôleur		
$\dot{\theta}_c(t), \dot{\theta}_r(t)$	Vitesse angulaire de consigne introduite par l'opérateur et réelle de la roue (fournie par le capteur)	Variable (rad.s ⁻¹)
$\varepsilon_r(t) = \dot{\theta}_c(t) - \dot{\theta}_r(t)$	Ecart de réglage (différence entre vitesse réelle et de consigne)	Variable (rad.s ⁻¹)
$u_a(t)$	Tension d'alimentation contrôlée	48 (volts) maximale
L	Inductance	0,0075 (H)
R_e	Résistance électrique	1,6 (Ω)
K_{em}	Constante f.e.m.	0,122 (N.m/A ou V.s/rad)
$i(t)$	Courant électrique	Variable (A)
$u_e(t)$	Force électromotrice du bobinage	Variable (V)
Partie mécanique du moteur		
$c_m(t)$	Couple en sortie du moteur électrique	Variable (N.m)
J_m	Moment d'inertie arbre 1 du moteur	0,0095 (kg.m ²)
f_m	Coefficient de frottement visqueux arbre moteur / carter moteur	0,0043 (N.m.s/rad)
$\dot{\theta}_m(t)$	Vitesse angulaire de l'arbre moteur	Variable (rad.s ⁻¹)
$\theta_m(t)$	Position angulaire de l'arbre moteur	Variable (rad)
Partie roue et réducteur		
N	Rapport de réduction du réducteur	13
K	Raideur de l'arbre sortie réducteur	10 000 N.m/rad
J_r	Moment d'inertie roue+axe (arbre 4) par rapport à son axe de rotation	8 (kg.m ²)
f_r	Coefficient de frottement visqueux axe de roue / palier	17 (N.m.s/rad)
$c_{re}(t)$	Couple en sortie du réducteur (arbre 2)	Variable (N.m)
$\dot{\theta}_{re}(t)$	Vitesse angulaire en sortie du réducteur (arbre 2)	Variable (rad.s ⁻¹)
$c_p(t)$	Couple du contact pneu-chaussée due à la force longitudinale	0,5 (N.m) Considéré constant par hypothèse simplificatrice
$\dot{\theta}_r(t)$	Vitesse angulaire de la roue	Variable (rad.s ⁻¹)
$\theta_r(t)$	Position angulaire de la roue	Variable (rad)
G	Centre de gravité	
$\psi(t)$	Angle de lacet	rad
d	Distance entre roues (fig.3)	1,2 m
a=b	Distance entre le point M et les trains avant et arrière (fig.3)	0,65 m

Tableau 2 : Nomenclature des variables utilisées

Modélisation des différents éléments

• Modélisation de la partie électrique du moteur

On suppose que dans les différents régimes de fonctionnement considérés, le comportement reste linéaire. Le bobinage du moteur est équivalent à un circuit électrique de résistance R_e , d'inductance L en série et d'une force contre-électromotrice $u_e(t)$, le tout alimenté par la tension $u_a(t)$. La partie électrique de l'induit est traversée par un courant $i(t)$. Les équations de couplage couple moteur-intensité et force contre électromotrice-vitesse angulaire sont décrites par les relations: $c_m(t) = K_{em} \cdot i(t)$ et $u_e(t) = K_{em} \cdot \dot{\theta}_m(t)$ respectivement. Dans ce qui suit, les variables temporelles seront notées en minuscules, et les variables dans le domaine de Laplace seront en majuscules, par exemple :

$$L\{\dot{\theta}(t)\} = \Omega(p), \quad L\{u_e(t)\} = U_e(p), \quad L\{u_a(t)\} = U_a(p), \quad L\{c_m(t)\} = C_m(p),$$

p étant l'opérateur de Laplace

L'équation électromécanique du moteur en régime dynamique dans les domaines temporel et de Laplace liant $u_a(t)$, $u_e(t)$ et $i(t)$ s'écrit :

$$u_a(t) = R_e \cdot i(t) + L \cdot \frac{d i(t)}{dt} + u_e(t) \quad (e)$$

• Modélisation de la partie mécanique

Q18. On isole l'arbre moteur avec la roue dentée de sortie du réducteur : {1,2}. Ecrire l'équation issue du théorème de l'énergie cinétique qui régit l'évolution de la variable $\dot{\theta}_m(t)$. On supposera pour cela que l'inertie de l'arbre 2 de sortie du réducteur a une inertie négligeable.

Q19. On isole la roue et son axe : {4}. Ecrire l'équation issue du théorème du moment dynamique par rapport à l'axe de la roue qui régit l'évolution de la variable $\dot{\theta}_r(t)$. On considère pour cela que le centre d'inertie de {4} est sur son axe.

On isole l'arbre de sortie du réducteur effectuant le lien avec l'axe de la roue. Cet élément déformable est supposé de comportement linéaire et de loi de déformation $C = K \cdot \Delta\theta$. La variable $\Delta\theta$ étant l'écart angulaire entre les sections externes de cet arbre. Cet arbre transmet le couple $c_{re}(t)$.

Q20. Donner sans justifier, l'expression de $c_{re}(t)$ en fonction de K , $\theta_{re}(t)$ et $\theta_r(t)$

Q21. En combinant les 3 équations précédentes, identifier les paramètres α , β et γ dans les deux équations suivantes :

$$J_m \cdot \ddot{\theta}_m(t) + \alpha \cdot \dot{\theta}_m(t) = C_m(t) - \beta \cdot \left(\frac{\theta_m(t)}{N} - \theta_r(t) \right) \frac{1}{N} \quad (f)$$

$$J_r \cdot \ddot{\theta}_r(t) + \gamma \cdot \dot{\theta}_r(t) = -C_P(t) + \beta \cdot \left(\frac{\theta_m(t)}{N} - \theta_r(t) \right) \quad (g)$$

II.B Identification et simulation du système du système de commande de la vitesse angulaire

Q22. Le schéma de simulation du système de commande de la vitesse est donné figure 7. On suppose que les conditions initiales sont nulles. On note $\Omega_m(p)$, $\Omega_r(p)$, $C_m(p)$ et $C_P(p)$ les transformées de Laplace de $\dot{\theta}_m(t)$, $\dot{\theta}_r(t)$, $C_m(t)$ et $C_P(t)$.

Ecrire dans le domaine de Laplace, les équations dynamiques de la question Q21 ((f) et (g)) en fonction uniquement de $\Omega_m(p)$, $\Omega_r(p)$, $C_m(p)$ et $C_P(p)$, ainsi que l'équation électrique du moteur (e) en fonction uniquement de $U_a(p)$, $U_e(p)$ et $I(p)$ en déduire les expressions des 4 fonctions de transfert : $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$ de la figure 7 ci-dessous.

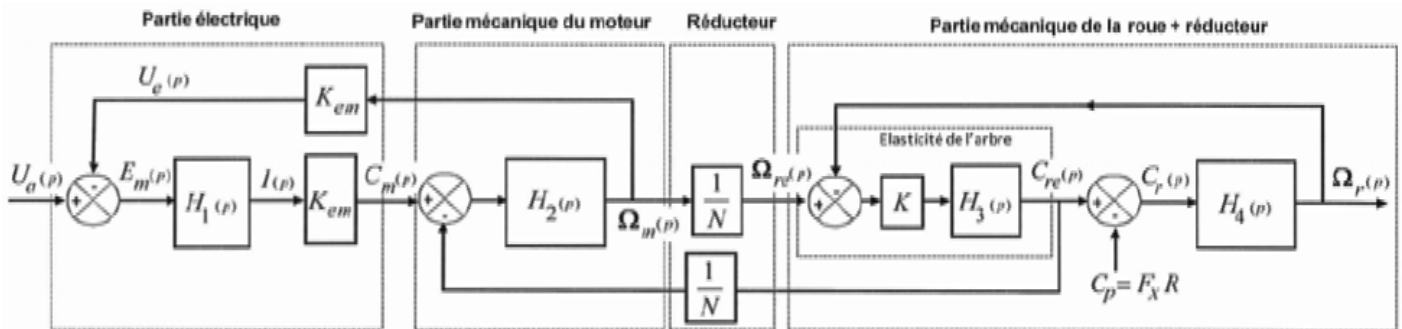


Figure 7. - Schéma bloc de simulation du système moto-réducteur-roue pour la commande de la vitesse

La partie électrique peut être facilement modélisée car les paramètres fournis par le constructeur sont bien identifiés. Afin de déterminer la fonction de transfert de l'ensemble du système mécanique (moto réducteur et arbre de la roue), nous avons isolé la partie mécanique du système et réalisé un essai indiciel en introduisant un couple moteur $c_m(t)$ d'un échelon de 4N.m à l'entrée de l'arbre du moteur et avons enregistré en sortie de la roue la variation de la vitesse angulaire comme expliqué par le schéma de la figure 8. La réponse à cette échelon est donnée figure 9.

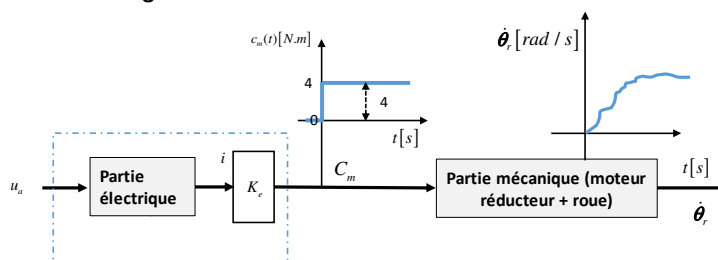


Figure 8. - Essai expérimental pour l'identification de la fonction de transfert de la partie mécanique -

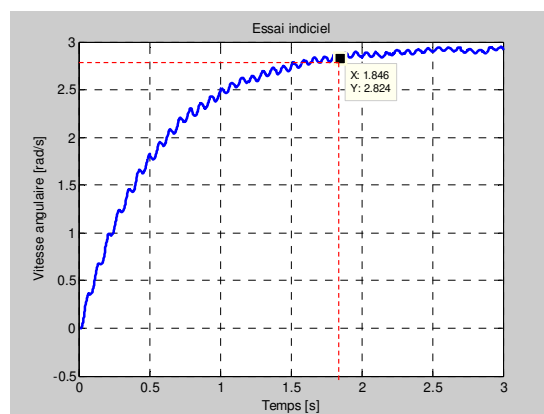


Figure 9. - Réponse indicielle de la vitesse angulaire de la roue pour un couple moteur de 4 N.m

Q23 Identifier les valeurs numériques avec les unités des paramètres caractéristiques (Gain K_m et constante de temps T_m) de la fonction de transfert du 1^{er} ordre que l'on notera $H_m(p)$

On souhaite écrire une fonction qui permet de valider l'identification précédente. Les données mesurées expérimentalement sont stockées dans deux listes $t = [t_0 \ t_1 \ .. \ t_n]$ et $y = [y_0 \ y_1 \ .. \ y_n]$. La première contient les différents instants de mesure et la seconde les valeurs mesurées expérimentalement correspondantes de la vitesse angulaire.

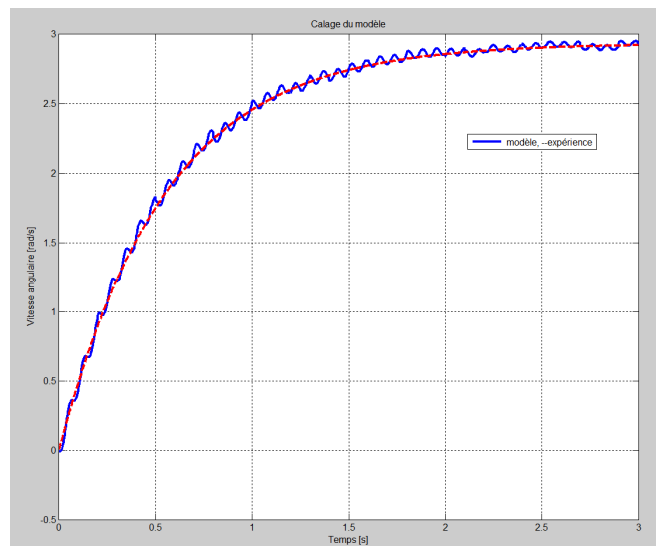


Figure 10. - Comparaison du modèle obtenu avec les sorties mesurées du système réel -

Q24 Ecrire une fonction utilisant le langage Python ("Ecart_max(t,y,Km,Tm)") qui prend pour argument les deux listes t et y ainsi que K et T les grandeurs du 1^{er} ordre identifiées manuellement et qui renvoie l'écart maximal entre les valeurs mesurées et celle du modèle.

II.C Choix d'un régulateur pour répondre au cahier des charges

En raison de la présence de perturbation la vitesse angulaire de la roue doit être asservie en vitesse afin de maintenir une inter distance entre les véhicules, ce qui impose un écart statique nul. D'autre part la durée de changement de direction impose un temps de réponse du système inférieur à 0,4 s. Cet asservissement doit donc respecter le cahier des charges suivant :

Précision	Erreur statique en réponse à un échelon de consigne de 15 rad.s^{-1} .	$\varepsilon_s = 0$
	Erreur en réponse à un échelon de perturbation de $0,5 \text{ N.m}$.	$\varepsilon_p = 0$
Rapidité	Temps de réponse à 5%	$T_{5\%} \leq 0,2 \text{ s}$
	Pulsation de coupure de la FTBO	$\omega_{0dB} \geq 15 \text{ rad.s}^{-1}$.
Stabilité	Dépassement relatif pour un échelon de consigne	$D_{\%} \leq 5\%$
	Marge de gain	$M_{\phi} \geq 70^\circ$

Les fonctions de transfert étant identifiées, le schéma fonctionnel du système moto-réducteur-roue peut alors être représenté par le schéma bloc de la figure 11a. Le schéma bloc de la figure 11b montre l'influence du couple perturbateur $C_p(p)$ et de la tension d'alimentation $U_a(p)$ sur la vitesse angulaire de la roue. Le couple de contact pneu-chaussée $C_p(p)$ est alors considéré comme une perturbation. En vertu de la propriété de superposition, $\Omega_r(p)$ subit l'influence de la tension $U_a(p)$ et de la perturbation $C_p(p)$:

$$\Omega_r(p) = W_{Ua}(p).U_a(p) - W_{Cp}(p).C_p(p)$$

On notera dans la suite : $K_s = K_m.K_e.K_{em}^2$

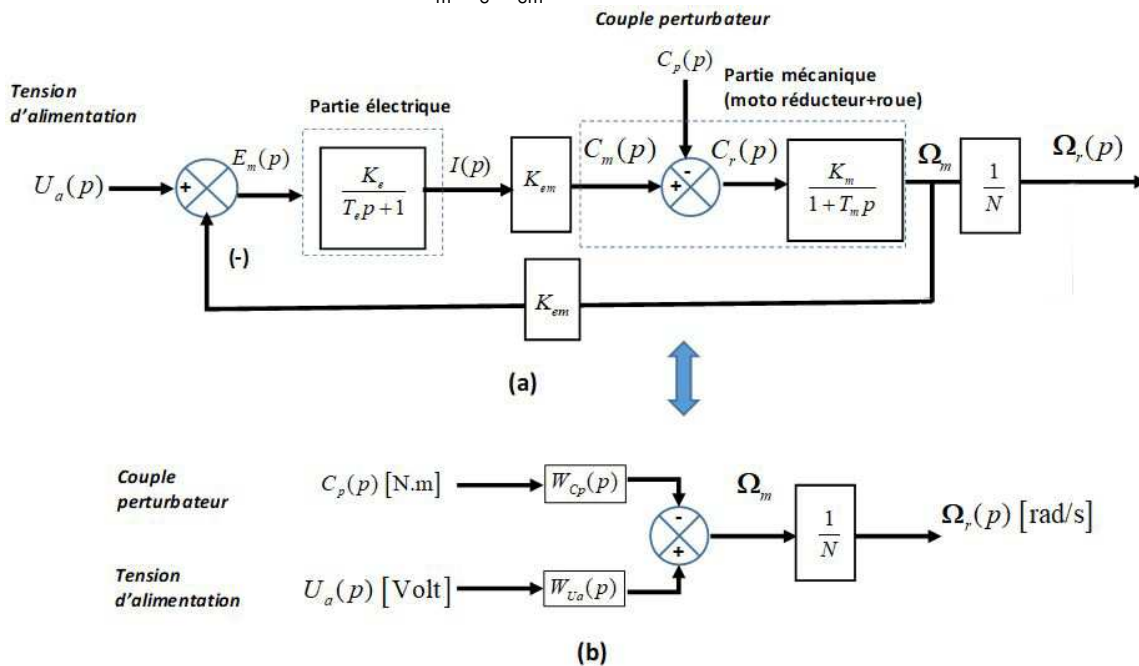


Figure 11 : - Schéma fonctionnel détaillé (a) et compact (a) du système moto-réducteur-roue

Q25 Mettre la fonction de transfert de la partie électrique sous forme canonique et donner les expressions de la constante de temps T_e et du gain K_e (figure. 11a).

Q26 Donner les expressions (sous leur forme canonique) des fonctions de transfert $W_{Ua}(p)$ et $W_{Cp}(p)$.

En raison de la présence de perturbation la vitesse angulaire de la roue doit être Le schéma bloc du système asservi peut alors être représenté par la figure 12 suivante :

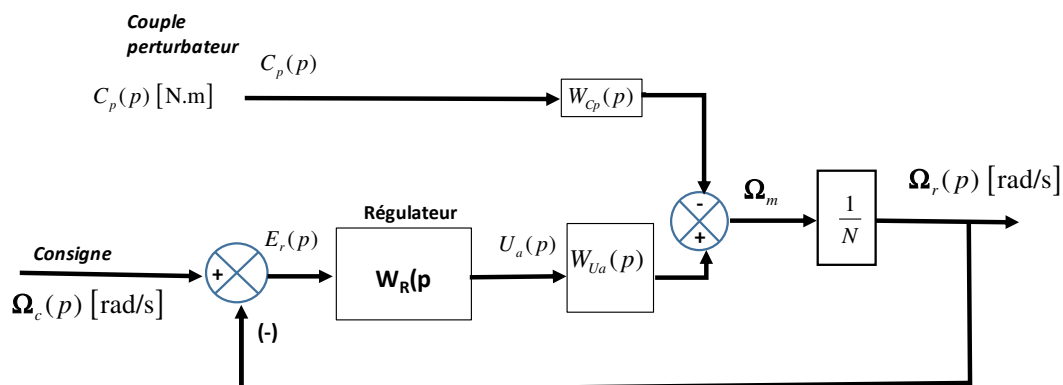


Figure 12 : - Schéma fonctionnel du système asservi de la vitesse de chaque roue -

Par une application numérique de l'expression de $W_{ua}(p)$ déterminée à la question Q26, on obtient la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée : $H_{BONC}(p) = \frac{\Omega_r(p)}{U_a(p)} = \frac{W_{ua}(p)}{N}$.

$$H_{BONC}(p) = \frac{0,51}{1 + 0,6.p + 0,0026.p^2}$$

On se propose d'abord de réguler la vitesse de rotation de la roue avec un correcteur à action proportionnelle : $W_R(p) = K_p$.

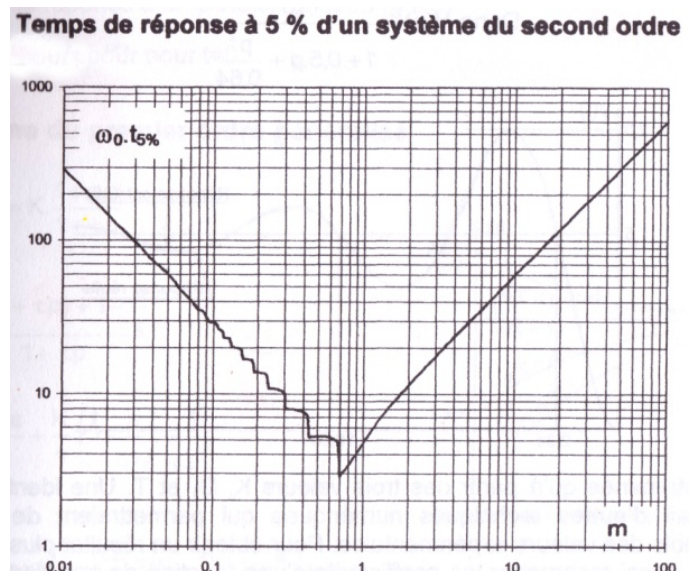
Q27- Calculer, numériquement en fonction de K_p , et pour une perturbation nulle, l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p) = \frac{\Omega_r(p)}{\Omega_c(p)}$. En déduire en fonction de K_p , ses éléments caractéristiques. (Gain statique K_{BF} , pulsation propre non amortie ω_{0BF} et facteur d'amortissement ξ_{BF}).

Q28- Déterminer la condition sur le gain K_p permettant de respecter le premier critère de stabilité du cahier des charges.

L'abaque ci-contre permet, pour une fonction de transfert du 2nd ordre, de déterminer en fonction de la pulsation propre non amortie ω_0 et du facteur d'amortissement ξ , le temps de réponse à 5 %.

Q29 Peut-on respecter simultanément les premiers critères de rapidité et de stabilité ? Justifier votre réponse.

Q30- Peut-on respecter le premier critère de précision ? Justifier votre réponse



Pour assurer une bonne précision, on se propose d'utiliser un correcteur à action proportionnelle et intégrale : $W_R(p) = K_p + \frac{K_I}{p}$.

Q31 En donnant l'expression de la fonction de transfert de ce régulateur PI sous sa forme canonique, déterminer son gain K_R et sa constante de temps T_R en fonction des gains proportionnels K_p et intégrale K_I .

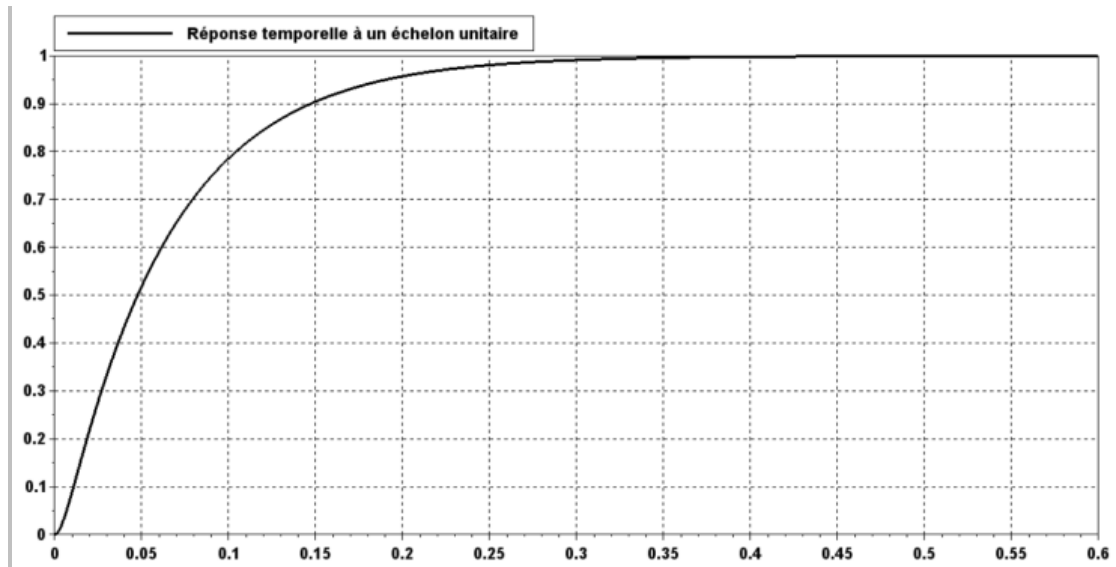
Q32 Montrer que la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée : $H_{BONC}(p)$ peut s'écrire sous la forme : $\frac{0,51}{(1 + T_1.p).(1 + T_2.p)}$ avec $T_1 > T_2$ et calculer T_1 et T_2 .

Q33 On choisit la constante de temps T_R du régulateur PI de façon à compenser T_1 ($T_R = T_1$) donner alors l'expression en fonction de K_R de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée (FTBO) : $H_{BO}(p) = \frac{\Omega_r(p)}{E_r(p)}$ ainsi que l'expression de son gain dynamique en décibel à la pulsation ω : $G_{dBBO}(\omega)$ en fonction de K_R .

Q34 Déterminer le gain K_R permettant d'obtenir une pulsation de coupure à 0 dB de cette FTBO de $\omega_{0dB} = 15 \text{ rad.s}^{-1}$. En déduire les gains proportionnel K_P et intégrale K_I du régulateur PI ainsi dimensionné.

Q35 Avec le régulateur PI ainsi dimensionné, déterminer l'expression en fonction de la pulsation ω de la phase de la FTBO : $\varphi_{BO}(\omega)$.

Q36 Une simulation numérique du système ainsi régulé (asservi) nous donne ci-dessous la réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) à un échelon unitaire :



Le correcteur ainsi dimensionné peut-il respecter l'ensemble des critères du cahier des charges. Justifiez votre réponse pour chacun des critères.

----- **Fin de l'énoncé** -----

Annexe 1 : Programme en Python de la question 8

014

Annexe 1 : programme de la question 10 en Python.

```

from math import *
## Calcul de la distance de freinage d un vehicule
## Methode : Tangente amelioree
print("Calcul de la distance de freinage d'un vehicule de masse m")
print(" Vitesse initiale v0")
print(" coefficient de frottement sol roue sur sol sec f=0.8+0.2*e(-V/Vref)")
print(" position initiale x0=0")
##
V0=float(input("vitesse initiale v0=? en m/s" ))
h=float(input("pas de temps d'integration h=? en s" ))
##=====
## Donnees
g=9.81 #m/s2
## paramètres du coefficient de frottement f=a+b*e(-V/Vref)
a=0.8
b=0.2
Vref=5 # m/s
##=====
## t - temps (discretise avec le pas h)
## y1 - abscisse x calculee au pas i-1
## y2 - vitesse horizontale calculee au pas i-1
## y1n - abscisse x calculee au pas i
## y2n - vitesse horizontale calculee au pas i
##=====
## conditions initiales
t=0
x0=0
y1=x0
y2=V0
y2n=V0
##=====
while                                     # ZONE A
    t=t+h
    ##=====
    ## Euler                                # DEBUT ZONE B

    ##===== # FIN ZONE B
    y1=y1n
    y2=y2n
##=====
                                     # DEBUT ZONE C
DA=
Vf=
tf=
                                     # FIN ZONE C
##=====
print("Temps de freinage " + "tf=" + str(tf))
print("Distance d'arret " + "DA=" + str(DA))
print("Verification vitesse nulle " + "Vf=" + str(Vf))

```

RobuCar

B