

PSI 2026-2027**DS N°1 : Véhicule intelligent Robucar****Corrigé****1.A- Etude des phases transitoires, Accélération/freinage en ligne droite****Question 1**

La vitesse maximale du véhicule est : $V_{\text{Max}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot N_{\text{mot.Max}}}{60} \times \frac{1}{N} \times R = \frac{3\,200 \times 2 \cdot \pi \times 0,2}{60 \times 13}$

Soit : $V_{\text{Max}} = 5,16 \text{ m.s}^{-1} = 18,6 \text{ km.h}^{-1}$

Cela est conforme au cahier des charges car $V_{\text{Max}} \geq 15 \text{ km.h}^{-1}$

Question 2

Les deux roues étant en limite d'adhérence, on a : $T_A = -\mu \cdot N_A$ et : $T_B = -\mu \cdot N_B$

On isole le véhicule, le bilan des actions mécaniques extérieures est :

☞ L'action du sol sur l'essieu avant : Force $\vec{F}_A = -\mu \cdot N_A \cdot \vec{X}_0 + N_A \cdot \vec{Z}_0$ appliquée en A

☞ L'action du sol sur l'essieu arrière : Force $\vec{F}_B = -\mu \cdot N_B \cdot \vec{X}_0 + N_B \cdot \vec{Z}_0$ appliquée en B

☞ Poids du véhicule : Force $\vec{P} = -M \cdot g \cdot \vec{Z}_0$ appliquée en G

Théorème de la résultante dynamique : $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{P} = M \cdot \vec{a}_{G \in \text{véhicule/Sol}}$

On obtient donc les 2 équations scalaires :

$$\text{TRD en projection sur } \vec{X}_0 \quad -\mu \cdot N_A - \mu \cdot N_B = M \cdot \ddot{x}_G \quad (a)$$

$$\text{TRD en projection sur } \vec{Z}_0 \quad N_A + N_B - M \cdot g = 0 \quad (b)$$

$$\text{On obtient : } (a) \Rightarrow N_A + N_B = -\frac{M \cdot \ddot{x}_G}{\mu} \quad \text{et : } (b) \Rightarrow -\frac{M \cdot \ddot{x}_G}{\mu} = M \cdot g$$

Soit dans ces conditions une accélération du véhicule : $\ddot{x}_G = -\mu \cdot g$

Question 3

Application numérique : $\ddot{x}_G = -0,9 \times 9,81 = -8,83 \text{ m.s}^{-2}$

On a donc : $|\ddot{x}_G| \geq 5 \text{ m.s}^{-2}$ **Donc le cahier des charges est vérifié**

Question 4

Pour une vitesse initiale de $15 \text{ km/h} = \frac{15}{3,6} = 4,17 \text{ m.s}^{-1}$ On obtient une distance de freinage de :

$$d = \frac{4,17^2}{2 \times 8,83} = 0,98 \text{ m}$$

Question 5

On isole l'essieu arrière, celui-ci n'étant pas soumis à un couple de freinage on a le bilan des actions extérieures :

☞ L'action du sol sur l'essieu arrière : Force $\vec{F}_B = T_B \cdot \vec{X}_0 + N_B \cdot \vec{Z}_0$ appliquée en B

☞ L'action du châssis sur l'essieu arrière due à la liaison pivot parfaite d'axe $(O_B, \vec{Y}_0)$

D'où le théorème de la résultante dynamique en O_B projeté sur l'axe $\vec{Y}_0$ (avec inertie négligée) :

$$0 + \vec{F}_B \wedge \vec{BO}_B \cdot \vec{Y}_0 = 0 \quad \Leftrightarrow (T_B \cdot \vec{X}_0 + N_B \cdot \vec{Z}_0) \wedge \vec{R} \cdot \vec{Z}_0 \cdot \vec{Y}_0 = 0 \quad \Leftrightarrow T_B = 0$$

La résultante de l'action du sol sur l'essieu arrière a donc pour direction $\vec{Z}_0$: $\vec{F}_B = N_B \cdot \vec{Z}_0$

Question 6

Les roues avant étant en limite d'adhérence, on a : $T_A = -\mu \cdot N_A$ D'autre part : $T_B = 0$

On isole le véhicule, le bilan des actions mécaniques extérieures est :

☞ L'action du sol sur l'essieu avant : Force $\vec{F}_A = -\mu \cdot N_A \cdot \vec{X}_0 + N_A \cdot \vec{Z}_0$ appliquée en A

☞ L'action du sol sur l'essieu arrière : Force $\vec{F}_B = N_B \cdot \vec{Z}_0$ appliquée en B

☞ Poids du véhicule : Force $\vec{P} = -M \cdot g \cdot \vec{Z}_0$ appliquée en G

Théorème de la résultante dynamique : $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{P} = M \cdot \vec{a}_{G \in \text{véhicule/Sol}} = M \cdot \ddot{x}_G \cdot \vec{X}_0$

Théorème du moment dynamique en G : $\vec{GA} \wedge \vec{F_A} + \vec{GB} \wedge \vec{F_B} + \vec{0} = \delta_G(\vec{\text{veh.}}/\vec{\text{sol}})$

Or on a une translation du véhicule avec G centre d'inertie. Donc : $\delta_G(\vec{\text{veh.}}/\vec{\text{sol}}) = \vec{0}$

$$(\ell_1 \cdot \vec{X_0} - H \cdot \vec{Z_0}) \wedge (-\mu \cdot N_A \cdot \vec{X_0} + N_A \cdot \vec{Z_0}) \cdot \vec{Y_0} + (-\ell_2 \cdot \vec{X_0} - H \cdot \vec{Z_0}) \wedge N_B \cdot \vec{Z_0} \cdot \vec{Y_0} = 0$$

On obtient donc les 3 équations scalaires :

$$\text{TRD en projection sur } \vec{X_0} \quad -\mu \cdot N_A = M \cdot \ddot{x}_G \quad (a)$$

$$\text{TRD en projection sur } \vec{Z_0} \quad N_A + N_B - M \cdot g = 0 \quad (b)$$

$$\text{TMD en G en projection sur } \vec{Y_0} : \quad -\ell_1 \cdot N_A + H \cdot \mu \cdot N_A + \ell_2 \cdot N_B = 0 \quad (c)$$

Cela donne donc : $(a) \Rightarrow -\mu \cdot N_A = M \cdot \ddot{x}_G \quad \Leftrightarrow \quad N_A = -\frac{M \cdot \ddot{x}_G}{\mu}$

$$(b) \Rightarrow -\frac{M \cdot \ddot{x}_G}{\mu} + N_B = M \cdot g \quad \Leftrightarrow \quad N_B = M \cdot g + \frac{M \cdot \ddot{x}_G}{\mu}$$

$$(c) \Rightarrow \ell_1 \cdot \frac{M \cdot \ddot{x}_G}{\mu} - H \cdot M \cdot \ddot{x}_G + \ell_2 \cdot \left(M \cdot g + \frac{M \cdot \ddot{x}_G}{\mu} \right) = 0$$

Soit après calcul : $\ddot{x}_G = \frac{-\mu \cdot \ell_2 \cdot g}{\ell_1 + \ell_2 - \mu \cdot H}$ Application numérique : $\ddot{x}_G = -5,27 \text{ m.s}^{-2}$.

Ayant $|\ddot{x}_G| \geq 5 \text{ m.s}^{-2}$, il est donc possible de ne freiner qu'avec la roue avant.

Question 7

On isole l'essieu avant, celui-ci n'étant pas soumis à un couple de freinage on obtient (comme à la question 5) par **un TRD en O_A projeté sur $\vec{Y_0}$** (avec inertie négligée) que la résultante de l'action du sol sur l'essieu avant a pour direction $\vec{Z_0}$: $\vec{F_A} = N_A \cdot \vec{Z_0}$

On fait l'hypothèse que les roues arrières sont en limite d'adhérence : $T_B = -\mu \cdot N_B$

On isole le véhicule, comme pour la question 6 on obtient les 3 équations scalaires :

$$\text{TRD en projection sur } \vec{X_0} \quad -\mu \cdot N_B = M \cdot \ddot{x}_G \quad (a)$$

$$\text{TRD en projection sur } \vec{Z_0} \quad N_A + N_B - M \cdot g = 0 \quad (b)$$

$$\text{TMD en G en projection sur } \vec{Y_0} : \quad -\ell_1 \cdot N_A + H \cdot \mu \cdot N_B + \ell_2 \cdot N_B = 0 \quad (c)$$

Cela donne donc : $(a) \Rightarrow -\mu \cdot N_B = M \cdot \ddot{x}_G \quad \Leftrightarrow \quad N_B = -\frac{M \cdot \ddot{x}_G}{\mu}$

$$(b) \Rightarrow N_A - \frac{M \cdot \ddot{x}_G}{\mu} = M \cdot g \quad \Leftrightarrow \quad N_A = M \cdot g + \frac{M \cdot \ddot{x}_G}{\mu}$$

$$(c) \Rightarrow -\ell_1 \cdot \left(M \cdot g + \frac{M \cdot \ddot{x}_G}{\mu} \right) - H \cdot M \cdot \ddot{x}_G - \ell_2 \cdot \frac{M \cdot \ddot{x}_G}{\mu} = 0$$

Soit après calcul : $\ddot{x}_G = \frac{-\mu \cdot \ell_1 \cdot g}{\ell_1 + \ell_2 + \mu \cdot H}$ Application numérique : $\ddot{x}_G = -3,95 \text{ m.s}^{-2}$.

Ayant $|\ddot{x}_G| < 5 \text{ m.s}^{-2}$, il n'est donc pas possible de ne freiner qu'avec la roue arrière.

Question 8

```

while y2 > 0 :                                # ZONE A
    t=t+h
    #####
    ## Euler                                    # DEBUT ZONE B
    f = 0.8 + 0.2*exp(-y2/Vref)
    y2n = y2 - f*g*h
    y1n = y1 + y2*h

    #####                                     # FIN ZONE B
    y1=y1n
    y2=y2n

    #####                                     # DEBUT ZONE C
    DA= y1n
    Vf= y2n
    tf= t

    #####                                     # FIN ZONE C

```

1.B- Etude du suivi de trajectoire, Modélisation du virage

Question 9

Le point C étant le centre de rotation du mouvement du véhicule par rapport au sol, on a : $\vec{V}_{C \in S/Sol} = \vec{0}$. Donc de la relation de Varignon : $\vec{V}_{O1 \in S/Sol} = \vec{V}_{C \in S/Sol} + \vec{O1C} \wedge \vec{\Omega}_{S/Sol}$ on en déduit :

$$\vec{V}_{O1 \in S/Sol} = (\vec{O1M} + \vec{MC}) \wedge \vec{\Omega}_{S/Sol} = \left[-a \cdot \vec{X} + \left(\rho - \frac{d}{2} \right) \cdot \vec{Y} \right] \wedge \dot{\psi} \cdot \vec{Z_0}$$

Soit finalement :

$$\vec{V}_{O1 \in S/Sol} = a \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{Y} + \left(\rho - \frac{d}{2} \right) \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{X}$$

Par un calcul similaire on obtient :

$$\vec{V}_{O2 \in S/Sol} = a \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{Y} + \left(\rho + \frac{d}{2} \right) \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{X}$$

Question 10

Par composition des vitesses on a :

$$\vec{\Omega}_{Roue\ i/Sol} = \vec{\Omega}_{Roue\ i/S} + \vec{\Omega}_{S/Sol} = \dot{\theta}_i \cdot \vec{Y}_i + \dot{\psi} \cdot \vec{Z_0}$$

Question 11

Ayant un roulement sans glissement de la roue 1 sur le sol, on a : $\vec{V}_{J1 \in Roue1/S} = \vec{0}$. Donc de la relation de Varignon : $\vec{V}_{O1 \in Roue1/Sol} = \vec{V}_{J1 \in Roue1/S} + \vec{O1J} \wedge \vec{\Omega}_{Roue1/Sol}$ on en déduit :

$$\vec{V}_{O1 \in Roue1/Sol} = -R \cdot \vec{Z_0} \wedge (\dot{\theta}_1 \cdot \vec{Y}_1 + \dot{\psi} \cdot \vec{Z_0}) = R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{X}_1$$

Par un calcul similaire on obtient :

$$\vec{V}_{O2 \in Roue2/Sol} = R \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{X}_2$$

Question 12

O₁ est le centre de la liaison pivot entre S et 1, donc : $\vec{V}_{O1 \in Roue1/S} = \vec{0}$.

Donc de la loi de composition des vitesses on obtient : $\vec{V}_{O1 \in Roue1/Sol} = \vec{V}_{O1 \in S/Sol}$

D'après les résultats précédents, on a donc : $R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{X}_1 = a \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{Y} + \left(\rho - \frac{d}{2} \right) \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{X}$

Soit en projection : $\nearrow$ sur $\vec{X}$: $R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \delta_1 = \left(\rho - \frac{d}{2} \right) \cdot \dot{\psi}$ (a)

$\nearrow$ sur $\vec{Y}$: $R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \delta_1 = a \cdot \dot{\psi}$ (b)

Question 13

O₂ est le centre de la liaison pivot entre S et 2, donc : $\vec{V}_{O2 \in Roue2/S} = \vec{0}$.

Donc de la loi de composition des vitesses on obtient : $\vec{V}_{O2 \in Roue2/Sol} = \vec{V}_{O2 \in S/Sol}$

D'après les résultats précédents, on a donc : $R \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{X}_2 = a \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{Y} + \left(\rho + \frac{d}{2} \right) \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{X}$

Soit en projection : $\nearrow$ sur $\vec{X}$: $R \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos \delta_2 = \left(\rho + \frac{d}{2} \right) \cdot \dot{\psi}$ (c)

$\nearrow$ sur $\vec{Y}$: $R \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin \delta_2 = a \cdot \dot{\psi}$ (d)

Question 14

Des équations précédentes

On obtient : $\frac{(b)}{(a)} \Rightarrow \tan \delta_1 = \frac{a}{\rho - \frac{d}{2}}$ $\frac{(d)}{(c)} \Rightarrow \tan \delta_2 = \frac{a}{\rho + \frac{d}{2}}$

Applications numériques : $\delta_1 = 0,147 \text{ rad} = 8,4^\circ$ $\delta_2 = 0,116 \text{ rad} = 6,6^\circ$

Question 15

Etant donné que les angles δ_1 et δ_2 sont petits pour $\rho \geq 5 \text{ m}$, on peut donc faire l'hypothèse que : $\cos \delta_1 \approx \cos \delta_2 \approx 1$. On en déduit des équations (a) et (c) :

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\psi} \cdot \frac{\rho - \frac{d}{2}}{R} \quad \text{et} \quad \dot{\theta}_2 = \dot{\psi} \cdot \frac{\rho + \frac{d}{2}}{R}$$

1.C- Etude du taux de rotation des roues 1 et 2 au cours d'un virage

Question 16

Le changement d'orientation total effectué représente l'aire sous la courbe $\dot{\psi}(t)$.

$$\text{Soit : } \psi_{\text{TOT}} = (t_1 - t_0) \cdot \frac{\dot{\psi}_C}{2} + (t_2 - t_1) \cdot \dot{\psi}_C + (t_3 - t_2) \cdot \frac{\dot{\psi}_C}{2} \quad \text{Or : } t_3 - t_2 = t_1 - t_0$$

$$\text{Donc : } \psi_{\text{TOT}} = (t_1 - t_0) \cdot \dot{\psi}_C + (t_2 - t_1) \cdot \dot{\psi}_C \quad \text{Soit finalement : } \psi_{\text{TOT}} = (t_2 - t_0) \cdot \dot{\psi}_C \quad (a)$$

Question 17

$$\text{On a : } t_3 - t_0 = (t_3 - t_2) + (t_2 - t_0) \quad \text{Or : } t_3 - t_2 = \left| \frac{\dot{\psi}_C}{\dot{\psi}_0} \right|$$

$$\text{D'autre part : } (a) \Rightarrow t_2 - t_0 = \frac{\psi_{\text{TOT}}}{\dot{\psi}_C} \quad \text{Avec : } \psi_{\text{TOT}} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et : } \dot{\psi}_C = \frac{V}{\rho}$$

$$\text{Donc : } t_3 - t_0 = \left| \frac{\dot{\psi}_C}{\dot{\psi}_0} \right| + \frac{\psi_{\text{TOT}}}{\dot{\psi}_C} \quad \text{Soit finalement : } t_3 - t_0 = \frac{V}{\rho \cdot \dot{\psi}_0} + \frac{\rho \cdot \pi}{4 \cdot V}$$

$$\text{A.N. : } V = 10 \text{ km.h}^{-1} = 2,78 \text{ m.d}^{-1} \quad \rho = 6,4 \text{ m} \quad \dot{\psi}_0 = 1 \text{ rad.s}^{-2} \Rightarrow t_3 - t_0 = 2,23 \text{ s}$$

Le temps nécessaire à un virage de $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ rad et un rayon de $\rho = 6,4$ m est bien inférieur à 3

s. Donc le cahier des charges est bien vérifié.

2.A- modélisation du comportement de l'ensemble moto-réducteur-roue

Question 18

L'inertie de l'arbre 2 de sortie étant négligée l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma_{12} = \{1,2\}$ s'écrit :

$$E_C(\Sigma_{12}/0) = \frac{1}{2} J_m \cdot \dot{\theta}_m^2 \quad \text{D'où la dérivée de cette énergie cinétique : } \frac{d E_C(\Sigma_{12}/0)}{dt} = J_m \cdot \ddot{\theta}_m \cdot \dot{\theta}_m$$

La liaison entre 1 et 2 est parfaite donc : $\Sigma P(\text{Int} \rightarrow \Sigma_{12}/0) = 0$

La liaison entre 0 et 2 est parfaite donc : $P(0 \rightarrow 2/0) = 0$

La liaison entre 0 et 1 a un coefficient de frottement visqueux f_m donc : $P(0 \rightarrow 2/0) = -f_m \cdot \dot{\theta}_m \cdot \dot{\theta}_m$

D'autre part la puissance du couple moteur est : $P(\vec{C}_m \rightarrow 1/0) = C_m \cdot \dot{\theta}_m$

$$\text{Et : } P(-\vec{C}_{re} \rightarrow 2/0) = -C_{re} \cdot \dot{\theta}_{re} \quad \text{avec : } \dot{\theta}_{re} = \frac{\dot{\theta}_m}{N}$$

$$\text{Donc : } \Sigma P(\text{Ext} \rightarrow \Sigma_{12}/0) = \left(C_m - \frac{C_{re}}{N} \right) \cdot \dot{\theta}_m - f_m \cdot \dot{\theta}_m^2$$

L'application du Théorème de l'Energie Cinétique $\frac{d E_C(\Sigma_{12}/0)}{dt} = \Sigma P(\text{Int} \rightarrow \Sigma_{12}/0) + \Sigma P(\text{Ext} \rightarrow \Sigma_{12}/0)$

$$\text{donne donc : } J_m \cdot \ddot{\theta}_m \cdot \dot{\theta}_m = \left(C_m - \frac{C_{re}}{N} \right) \cdot \dot{\theta}_m - f_m \cdot \dot{\theta}_m^2 \quad \text{Soit : } J_m \cdot \ddot{\theta}_m + f_m \cdot \dot{\theta}_m = C_m - \frac{C_{re}}{N} \quad (b)$$

Question 19

On isole la roue $\{4\}$, BAME :

☞ Couple $\vec{C}_{re}$ (de direction l'axe de la roue)

☞ Couple $-\vec{C}_P$ (de direction l'axe de la roue)

☞ Action de 0 sur 1 de moment par rapport à l'axe $-f_r \cdot \dot{\theta}_r$

L'application du théorème du moment dynamique par rapport à l'axe de la roue donne donc :

$$C_{re} - C_P - f_r \cdot \dot{\theta}_r = J_r \cdot \ddot{\theta}_r \quad \text{Soit : } J_r \cdot \ddot{\theta}_r + f_r \cdot \dot{\theta}_r = -C_P + C_{re} \quad (c)$$

Question 20

On a trivialement :

$$C_{re} = K \cdot (\theta_{re} - \theta_r) \quad (d)$$

Question 21

Sachant que : $\theta_{re} = \frac{\theta_m}{N}$ de la relation (d) on obtient : $C_{re} = K \cdot \left(\frac{\theta_m}{R} - \theta_r \right)$

Donc de la relation (b) on obtient : $J_m \cdot \ddot{\theta}_m + f_m \cdot \dot{\theta}_m = C_m - K \cdot \left(\frac{\theta_m}{R} - \theta_r \right) \cdot \frac{1}{N}$

On a donc bien : $J_m \cdot \ddot{\theta}_m + \alpha \cdot \dot{\theta}_m = C_m - \beta \cdot \left(\frac{\theta_m}{R} - \theta_r \right) \cdot \frac{1}{N}$ (f) Avec : $\alpha = f_m$ et : $\beta = K$

De même de la relation (c) on obtient : $J_r \cdot \ddot{\theta}_r + f_r \cdot \dot{\theta}_r = -C_p + K \cdot \left(\frac{\theta_m}{R} - \theta_r \right)$

On a donc bien : $J_r \cdot \ddot{\theta}_r + \gamma \cdot \dot{\theta}_r = -C_p - \beta \cdot \left(\frac{\theta_m}{R} - \theta_r \right)$ (g) Avec : $\gamma = f_r$ et : $\beta = K$

2.B- Identification et simulation du système de commande de la vitesse angulaire**Question 22**

En passant dans le domaine de Laplace les équations (f) et (g)

Et sachant que : $\Theta_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{p}$ ainsi que : $\Theta_r(p) = \frac{\Omega_r(p)}{p}$

On obtient : (f) $\Rightarrow (\alpha + J_m \cdot p) \cdot \Omega_m(p) = C_m(p) - K \cdot \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{\Omega_m(p)}{N} - \Omega_r(p) \right) \cdot \frac{1}{N}$

Et : (g) $\Rightarrow (\gamma + J_r \cdot p) \cdot \Omega_r(p) = -C_p(p) + K \cdot \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{\Omega_m(p)}{N} - \Omega_r(p) \right)$

D'autre l'équation du moteur donne : (e) $\Rightarrow (R_e + L \cdot p) \cdot I(p) = U_a(p) - K_{em} \cdot \Omega_m(p)$

On obtient donc par identification :

$H_1(p) = \frac{1}{R_e + L \cdot p}$	$H_2(p) = \frac{1}{\alpha + J_m \cdot p}$
$H_3(p) = \frac{1}{p}$	$H_4(p) = \frac{1}{\gamma + J_r \cdot p}$

Question 23

La figure 9 nous montre une réponse de la vitesse de la roue $\omega_r(t)$ à un échelon de couple $c_m(t)$ de 4 N.m. Cette réponse à une pente à l'origine non nulle et n'a pas de dépassement de la valeur finale. Donc la fonction de transfert de la partie mécanique est un premier ordre de la forme : $H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m \cdot p}$

La valeur finale étant de 2,9 rad.s⁻¹ le gain K_m est : $K_m = \frac{2,9}{4} = 0,73 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

Les 95 % de la valeur finale : $0,95 \times 2,9 = 2,76 \text{ rad.s}^{-1}$ sont atteints à la date $t_{5\%} = 1,8 \text{ s}$.

Sachant que : $t_{5\%} = 3 \cdot T_m$ la constante de temps est de : $T_m = \frac{1,8}{3} = 0,6 \text{ s}$

2.C- Choix d'un régulateur pour répondre au cahier des charges**Question 25**

$\frac{K_e}{1 + T_e \cdot p} = \frac{1}{R_e + L \cdot p} = \frac{1/R_e}{1 + L/R_e \cdot p}$ Donc : $K_e = \frac{1}{R_e}$ et : $T_e = \frac{L}{R_e}$

Question 26

Du schémas bloc de la figure 11 on a en appliquant la formule de Black avec $K_S = K_e \cdot K_{em}^2 \cdot K_m$:

D'une part : $W_{Ua}(p) = \frac{\frac{K_e}{1 + T_e \cdot p} \cdot K_{em} \cdot \frac{K_m}{1 + T_m \cdot p}}{1 + \frac{K_e}{1 + T_e \cdot p} \cdot K_{em} \cdot \frac{K_m}{1 + T_m \cdot p} \cdot K_{em}} = \frac{K_S / K_{em}}{1 + K_S + (T_e + T_m) \cdot p + T_e \cdot T_m \cdot p^2}$

Soit sous sa forme canonique :

$$W_{Ua}(p) = \frac{\frac{K_S}{K_{em} \cdot (1 + K_S)}}{1 + \frac{T_e + T_m}{1 + K_S} \cdot p + \frac{T_e \cdot T_m}{1 + K_S} \cdot p^2}$$

$$D'autre part : W_{Cp}(p) = \frac{\frac{K_m}{1 + T_m \cdot p}}{1 + \frac{K_e}{1 + T_e \cdot p} \cdot K_{em} \cdot \frac{K_m}{1 + T_m \cdot p} \cdot K_{em}} = \frac{K_m \cdot (1 + T_e \cdot p)}{1 + K_S + (T_e + T_m) \cdot p + T_e \cdot T_m \cdot p^2}$$

Soit sous sa forme canonique :

$$W_{Cp}(p) = \frac{\frac{K_m \cdot (1 + T_e \cdot p)}{1 + K_S}}{1 + \frac{T_e + T_m}{1 + K_S} \cdot p + \frac{T_e \cdot T_m}{1 + K_S} \cdot p^2}$$

Question 27

Sachant que $W_R(p) = K_P$ on a pour la FTBO : $H_{BO}(p) = \frac{0,51 \cdot K_P}{1 + 0,6 \cdot p + 0,0026 \cdot p^2}$

$$D'où la FTBF : H_{BF}(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{\frac{0,51 \cdot K_P}{1 + 0,6 \cdot p + 0,0026 \cdot p^2}}{1 + \frac{0,51 \cdot K_P}{1 + 0,6 \cdot p + 0,0026 \cdot p^2}} = \frac{0,51 \cdot K_P}{1 + 0,51 \cdot K_P + 0,6 \cdot p + 0,0026 \cdot p^2}$$

Soit sous sa forme canonique :

$$H_{BF}(p) = \frac{\frac{0,51 \cdot K_P}{1 + 0,51 \cdot K_P}}{1 + \frac{0,6}{1 + 0,51 \cdot K_P} \cdot p + \frac{0,0026}{1 + 0,51 \cdot K_P} \cdot p^2}$$

Fonction de transfert du second ordre simple avec :

Un gain statique : $K_{BF} = \frac{0,51 \cdot K_P}{1 + 0,51 \cdot K_P}$ Un facteur d'amortissement : $\xi_{BF} = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{0,6}{1 + 0,51 \cdot K_P}$

Une pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{1 + 0,51 \cdot K_P}{0,0026}}$ $\Rightarrow \xi_{BF} = \frac{0,3}{\sqrt{0,0026 \cdot (1 + 0,51 \cdot K_P)}}$

Question 28

Pour respecter le premier critère de stabilité du cahier des charges (Dépassement relatif inférieur ou égal à 5% : $D_{\%} \leq 5\%$), il faut un facteur d'amortissement ξ_{BF} tel que : $\xi_{BF} \geq 0,69$.

$$\text{Soit : } \frac{0,3}{\sqrt{0,0026 \cdot (1 + 0,51 \cdot K_P)}} \geq 0,69 \quad \Leftrightarrow \quad K_P \leq 141 \text{ V.s.rad}^{-1}$$

Question 29

Pour $K_P = 141 \text{ V.s.rad}^{-1}$ on a : $\omega_0 = \sqrt{\frac{1 + 0,51 \times 141}{0,0026}} = 167 \text{ rad.s}^{-1}$ et : $\xi_{BF} = 0,69$

L'abaque nous donne alors : $t_{5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$ Soit : $t_{5\%} = \frac{3}{\omega_0} = \frac{3}{167} = 0,018 \text{ s} \leq 0,2 \text{ s}$

On peut donc respecter les 1^{ier} critère de stabilité : $D_{\%} \leq 5\%$ et de rapidité : $t_{5\%} \leq 0,2 \text{ s}$.

Question 30

Avec un régulateur proportionnel K_P La FTBF est un second ordre simple de gain K_{BF} . Donc l'erreur statique en réponse à un échelon de consigne Ω_{C0} est : $\varepsilon_S = \Omega_{C0} \cdot (1 - K_{BF})$

Or : $K_{BF} = \frac{0,51 \cdot K_P}{1 + 0,51 \cdot K_P}$. Donc $\forall K_P \geq 0$ on a : $K_{BF} \leq 1$. Donc on ne peut pas avoir $\varepsilon_S = 0$.

Donc le régulateur proportionnel ne permet pas de respecter le 1^{ier} critère de précision : $\varepsilon_S = 0$.

Question 31

$$W_R(p) = K_P + \frac{K_I}{p} = \frac{K_P \cdot p + K_I}{p} \quad \text{Soit sous sa forme canonique : } W_R(p) = \frac{K_I \cdot \left(1 + \frac{K_P}{K_I} \cdot p\right)}{p}$$

On a donc un correcteur PI : $\frac{K_R(1 + T_R \cdot p)}{p}$ de gain : $K_R = K_I$ et de constante de temps : $T_R = \frac{K_P}{K_I}$

Question 32

La FTBO non corrigée s'écrit : $H_{BONC}(p) = \frac{0,51}{1 + 0,6 \cdot p + 0,0026 \cdot p^2}$ C'est donc un second ordre de pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,0026}} = 19,6 \text{ rad.s}^{-1}$ et de facteur d'amortissement $\xi = \frac{0,6}{2} \cdot 19,6 = 5,88$.

Cette fonction de transfert ayant un facteur d'amortissement $\xi > 1$ cette FTBO non corrigée a 2 constantes de temps : T_1 et T_2 . Elle peut donc s'écrire : $H_{BONC}(p) = \frac{0,51}{(1 + T_1 \cdot p)(1 + T_2 \cdot p)}$

Ces constantes de temps T_1 et T_2 sont donc telles que : $T_1 + T_2 = 0,6$ et $T_1 \cdot T_2 = 0,0026$.

En résolvant ces deux équations on obtient : $T_1 = 0,6 \text{ s}$ et $T_2 = 0,0044 \text{ s}$

Question 33

La FTBO corrigée s'écrit : $H_{BO}(p) = W_R(p) \cdot H_{BONC}(p) = \frac{K_R(1 + T_R \cdot p)}{p} \cdot \frac{0,51}{(1 + T_1 \cdot p)(1 + T_2 \cdot p)}$

En choisissant $T_R = T_1$ cette FTBO corrigée s'écrit : $H_{BO}(p) = \frac{0,51 \cdot K_R}{p \cdot (1 + 0,0044 \cdot p)}$

D'où le gain dynamique en décibel de cette FTBO corrigée :

$$G_{dBBO}(\omega) = 20 \cdot \log(0,51 \cdot K_R) - 20 \cdot \log \omega - 10 \cdot \log(1 + (0,0044 \cdot \omega)^2)$$

Question 34

Pour obtenir une pulsation de coupure à 0 dB de $\omega_{0dB} = 15 \text{ rad.s}^{-1}$ il faut donc que :

$$20 \cdot \log(0,51 \cdot K_R) - 20 \cdot \log \omega - 10 \cdot \log(1 + (0,0044 \cdot \omega)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow K_R = \frac{15 \cdot \sqrt{1 + (0,0044 \times 15)^2}}{0,51} = 29,5 \text{ V.rad}^{-1}$$

On en déduit les gains du correcteur PI correspondant :

Gain intégral : $K_I = K_R = 29,5 \text{ V.rad}^{-1}$

Gain proportionnel : $K_P = K_I \cdot T_R = 29,5 \times 0,6 = 17,7 \text{ V.s.rad}^{-1}$

Question 35

Avec ce régulateur PI la FTBO s'écrit : $H_{BO}(p) = \frac{15}{p \cdot (1 + 0,0044 \cdot p)}$

D'où la phase de la FTBO : $\phi_{BO}(\omega) = -90 - \arctan(0,0044 \cdot \omega)$

Question 36

Avec ce régulateur PI on a :

$$\Rightarrow \text{Une FTBF : } H_{BF}(p) = \frac{\frac{15}{p \cdot (1 + 0,0044 \cdot p)}}{1 + \frac{15}{p \cdot (1 + 0,0044 \cdot p)}} = \frac{1}{1 + 0,067 \cdot p + 2,9 \cdot 10^{-4} \cdot p^2} \cdot \text{Soit une fonction de transfert}$$

avec un gain unitaire. Donc le premier critère de précision est respecté.

$\Rightarrow$ Le correcteur ajoute un intégrateur en amont de la perturbation. Donc le deuxième critère de précision est respecté. (Justification que seuls les 5/2 peuvent avancer)

- ☞ La simulation montre un temps de réponse d'environ $t_{5\%} = 0,19 \text{ s} \leq 0,2 \text{ s}$. Donc le premier critère de rapidité est respecté.
- ☞ Par dimensionnement du régulateur PI on a : $\omega_{\text{dB}} \geq 15 \text{ rad.s}^{-1}$. Donc le deuxième critère de rapidité est respecté.
- ☞ La simulation montre qu'il n'y a pas de dépassement de la valeur finale. Donc le premier critère de stabilité est respecté.
- ☞ Par dimensionnement du régulateur PI on a : $\omega_{\text{dB}} = 15 \text{ rad.s}^{-1}$, soit une marge de phase de : $M_{\phi} = 180^{\circ} + \phi_{\text{BO}}(15) = 180^{\circ} - 90 - \arctan(0,0044 \times 15) = 86^{\circ} \geq 70^{\circ}$. Donc le deuxième critère de stabilité est respecté.