

PSI 2026-2027**DS N°1 - Bassin de traction du LHEEA****Corrigé****Question 1 – Accélération du chariot**

La distance parcourue par le chariot représente l'aire sous la courbe du diagramme des vitesses

$$\text{Donc : } X_f - X_0 = \frac{V_m \cdot T_1}{2} + V_m \cdot t_{\text{acq}} + \frac{V_m \cdot (T_3 - T_2)}{2}$$

Sachant que les phases 1 et 3 ont la même valeur absolue de l'accélération on a : $T_3 - T_2 = T_1$

$$\text{On en déduit : } X_f - X_0 = \frac{V_m \cdot T_1}{2} + V_m \cdot t_{\text{acq}} + \frac{V_m \cdot T_1}{2}$$

$$\text{Soit : } T_1 = \frac{X_f - X_0}{V_m} - t_{\text{acq}} \quad \text{A.N. : } T_1 = \frac{130 - 10}{8} - 10 = 5 \text{ s}$$

Sachant que l'accélération représente la pente de la droite de la 1^{ère} phase : $\gamma = \frac{V_m}{T_1}$

$$\text{On obtient : } \gamma = \frac{V_m^2}{X_f - X_0 - V_m \cdot t_{\text{acq}}} \quad \text{A.N. : } \gamma = \frac{8^2}{130 - 10 - 8 \times 10} = 1,6 \text{ m.s}^{-2}$$

Question 2 – Energie cinétique de l'ensemble

Les points O_1 et O_2 étant les centres d'inertie des roues (1) et (2) leur énergie cinétique est :

$$E_C(1/0) = \frac{1}{2} \cdot m_R \cdot \overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_R(O) \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}}^2 \quad E_C(2/0) = \frac{1}{2} \cdot m_R \cdot \overrightarrow{V_{O_2 \in 1/0}}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_R(O) \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}}^2$$

D'autre part ces points O_1 et O_2 étant les centres des liaisons pivot entre 1&3 et 2&3 et la chariot 3 étant en translation on a : $\overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O_1 \in 3/0}} = \overrightarrow{V_{G_3 \in 3/0}} = V_3 \cdot \overrightarrow{x_0}$ et : $\overrightarrow{V_{O_2 \in 2/0}} = \overrightarrow{V_{O_2 \in 3/0}} = \overrightarrow{V_{G_3 \in 3/0}} = V_3 \cdot \overrightarrow{x_0}$

$$\text{Soit : } E_C(1/0) = \frac{1}{2} \cdot m_R \cdot V_3^2 + \frac{1}{2} \cdot J_R(O) \cdot \omega_R^2 \quad \text{et : } E_C(2/0) = \frac{1}{2} \cdot m_R \cdot V_3^2 + \frac{1}{2} \cdot J_R(O) \cdot \omega_R^2$$

$$\text{Enfin le chariot 3 étant en translation : } E_C(1/0) = \frac{1}{2} \cdot m_R \cdot \overrightarrow{V_{G_3 \in 3/0}}^2 \Rightarrow E_C(3/0) = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot V_3^2$$

Question 3 – Energie cinétique du système isolé et masse équivalente

Ayant un roulement sans glissement entre la roue 1 et le rail 0 au point I_1 : $\overrightarrow{V_{I_1 \in 1/0}} = \vec{0}$

De la relation de Varignon on a : $\overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{I_1 \in 1/0}} + \overrightarrow{O_1 I_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} - R \cdot \overrightarrow{y_0} \wedge \omega_R \cdot \overrightarrow{z_0} = -R \cdot \omega_R \cdot \overrightarrow{x_0}$

D'autre part le point O_1 étant le centre de la liaison pivot entre 1 et 3 on a : $\overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O_1 \in 3/0}}$

Enfin le chariot 3 étant en translation par rapport au rail : $\overrightarrow{V_{O_1 \in 3/0}} = \overrightarrow{V_{G_3 \in 3/0}} = V_3 \cdot \overrightarrow{x_0}$

$$\text{On a donc : } \overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{G_3 \in 3/0}} = -R \cdot \omega_R \cdot \overrightarrow{x_0} = V_3 \cdot \overrightarrow{x_0} \quad \text{Soit : } V_3 = -R \cdot \omega_R$$

D'où l'énergie cinétique du système isolé Σ : $E_C(\Sigma/0) = E_C(1/0) + E_C(2/0) + E_C(3/0)$

$$E_C(\Sigma/0) = 2 \times \left(\frac{1}{2} \cdot m_R \cdot V_3^2 + \frac{1}{2} \cdot J_R(O) \cdot \omega_R^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot V_3^2 \quad \text{avec : } \omega_R = -\frac{V_3}{R}$$

$$\Rightarrow E_C(\Sigma/0) = 2 \times \frac{1}{2} \cdot m_R \cdot V_3^2 + \frac{1}{2} \cdot J_R(O) \cdot \left(\frac{V_3}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot V_3^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(m_3 + 2 \cdot m_R + \frac{2 \cdot J_R(O)}{R^2} \right) \cdot V_3^2$$

$$\text{On en déduit donc : } E_C(\Sigma/0) = \frac{1}{2} \cdot M_{\text{eq}} \cdot V_3^2 \quad \text{avec : } M_{\text{eq}} = m_3 + 2 \cdot m_R + \frac{2 \cdot J_R(O)}{R^2}$$

Question 4 – Puissances Galiléenne

Les actions mécaniques extérieures du système Σ sont :

Le poids du chariot 3 : $P(\text{pes} \rightarrow 3/0) = -m_3 \cdot \vec{g} \cdot \vec{y}_0 \cdot \vec{V}_{G_3 \in 3/0} = -m_3 \cdot \vec{g} \cdot \vec{y}_0 \cdot \vec{V}_3 \cdot \vec{x}_0 = 0$

Le poids de la roue 1 : $P(\text{pes} \rightarrow 1/0) = -m_R \cdot \vec{g} \cdot \vec{y}_0 \cdot \vec{V}_{O_1 \in 1/0} = -m_R \cdot \vec{g} \cdot \vec{y}_0 \cdot \vec{V}_3 \cdot \vec{x}_0 = 0$

Le poids de la roue 2 : $P(\text{pes} \rightarrow 2/0) = -m_R \cdot \vec{g} \cdot \vec{y}_0 \cdot \vec{V}_{O_2 \in 2/0} = -m_R \cdot \vec{g} \cdot \vec{y}_0 \cdot \vec{V}_3 \cdot \vec{x}_0 = 0$

L'action du rail sur la roue 1 : $P(0 \rightarrow 1/0) = \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{V}_{I_1 \in 1/0} = 0$ Car : $\vec{V}_{I_1 \in 1/0} = \vec{0}$

L'action du rail sur la roue 2 : $P(0 \rightarrow 2/0) = \vec{R}_{0 \rightarrow 2} \cdot \vec{V}_{I_2 \in 1/0} = 0$ Car : $\vec{V}_{I_2 \in 1/0} = \vec{0}$

On a donc la somme des puissances galiléenne des actions extérieures : $\Sigma P(\text{Ext} \rightarrow \Sigma/0) = 0$

Les actions mécaniques intérieures du système Σ sont :

Le couple du moteur 1 sur le réducteur 1 : $P(\text{mot}_1 \rightarrow \text{red}_1/0) = C_m \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{\Omega}_{\text{red}/0} = C_m \cdot \vec{z}_0 \cdot \omega_m \cdot \vec{z}_0 = C_m \cdot \omega_m$

Le couple du réducteur 1 sur le moteur 1 : $P(\text{red}_1 \rightarrow \text{mot}_1/0) = -C_m \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{\Omega}_{\text{mot}/0} = -C_m \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{0} = 0$

Le couple du moteur 2 sur le réducteur 2 : $P(\text{mot}_2 \rightarrow \text{red}_2/0) = C_m \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{\Omega}_{\text{red}/0} = C_m \cdot \vec{z}_0 \cdot \omega_m \cdot \vec{z}_0 = C_m \cdot \omega_m$

Le couple du réducteur 2 sur le moteur 2 : $P(\text{red}_2 \rightarrow \text{mot}_2/0) = -C_m \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{\Omega}_{\text{mot}/0} = -C_m \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{0} = 0$

Le couple du réducteur 1 sur la roue 1 : $P(\text{red}_1 \rightarrow 1/0) = C_R \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{\Omega}_{1/0} = C_R \cdot \vec{z}_0 \cdot \omega_R \cdot \vec{z}_0 = C_R \cdot \omega_R$

Le couple de la roue 1 sur le réducteur 1 : $P(1 \rightarrow \text{red}_1/0) = -C_R \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{\Omega}_{1/0} = -C_R \cdot \vec{z}_0 \cdot \omega_R \cdot \vec{z}_0 = -C_R \cdot \omega_R$

Le couple du réducteur 2 sur la roue 2 : $P(\text{red}_2 \rightarrow 2/0) = C_R \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{\Omega}_{2/0} = C_R \cdot \vec{z}_0 \cdot \omega_R \cdot \vec{z}_0 = C_R \cdot \omega_R$

Le couple de la roue 2 sur le réducteur 2 : $P(2 \rightarrow \text{red}_2/0) = -C_R \cdot \vec{z}_0 \cdot \vec{\Omega}_{2/0} = -C_R \cdot \vec{z}_0 \cdot \omega_R \cdot \vec{z}_0 = -C_R \cdot \omega_R$

On a donc la somme des puissances galiléenne des actions intérieures : $\Sigma P(\text{Int} \rightarrow \Sigma/0) = 2 \cdot C_m \cdot \omega_m$

Question 5 – Couple moteur

L'application du théorème de l'énergie cinétique au système Σ s'écrit :

$$\frac{dE_C(\Sigma/0)}{dt} = \Sigma P(\text{Ext} \rightarrow \Sigma/0) + \Sigma P(\text{Int} \rightarrow \Sigma/0) \quad \Leftrightarrow \quad M_{\text{eq}} \cdot V_3 \cdot \gamma = 0 + 2 \cdot C_m \cdot \omega_m$$

D'autre part : $\omega_m = \frac{\omega_R}{k}$ et : $\omega_R = -\frac{V_3}{R}$ Donc : $M_{\text{eq}} \cdot V_3 \cdot \gamma = -2 \cdot C_m \cdot \frac{V_3}{k \cdot R}$

D'où le couple moteur permettant l'accélération γ : $C_m = -\frac{M_{\text{eq}} \cdot k \cdot R}{2} \cdot \gamma$ A.N. : $C_m = -56,3 \text{ N.m}$

Question 6 – Actions mécaniques extérieures sur la roue 1

On isole la roue 1 les actions mécaniques extérieures s'appliquant sur cette roue 1 sont :

☞ Le poids de la roue 1 : $\{\mathbf{T}_{\text{pes} \rightarrow 1}\}_{O_1} = \begin{Bmatrix} -m_R \cdot \vec{g} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m_R \cdot \vec{g} & 0 \end{Bmatrix}_{O_1} \mathbf{b}_0$

☞ L'action de 0 sur 1 due à la liaison ponctuelle avec adhérence :

$$\{\mathbf{T}_{0 \rightarrow 1}\}_{I_1} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_1} = \begin{Bmatrix} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{I_1} \mathbf{b}_0 \quad \text{avec : } |X_{01}| \leq f \cdot |Y_{01}|$$

☞ L'action du réducteur sur 1 : $\{\mathbf{T}_{0 \rightarrow 1}\}_{O_1} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_R \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_{O_1} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ 0 & - \\ - & C_R \end{Bmatrix}_{O_1} \mathbf{b}_0$

☞ L'action 3 sur 1 due à la liaison pivot d'axe $(O_1, \vec{z}_0)$: $\{\mathbf{T}_{3 \rightarrow 1}\}_{O_1} = \begin{Bmatrix} X_{31} & - \\ Y_{31} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{O_1} \mathbf{b}_0 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{3 \rightarrow 1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_1}$

Question 7 – Composante tangentielle de l'action du rail 0 sur les roues 1 et 2

L'application du Théorème du moment dynamique en O_1 projeté sur l'axe $\vec{z}_0$ donne :

$$\delta_{O_1}(\vec{1}/\vec{0}).\vec{z}_0 = \vec{0}.\vec{z}_0 + \vec{O_1I_1} \wedge \vec{R_{0 \rightarrow 1}} + C_R.\vec{z}_0.\vec{z}_0 + \vec{0}.\vec{z}_0$$

$$\Leftrightarrow J_R(O).\dot{\omega}_R = -R.\vec{y}_0 \wedge (X_{01}.\vec{x}_0 + Y_{01}.\vec{y}_0).\vec{z}_0 + C_R = R.X_{01} + C_R$$

D'autre part : $\omega_R = -\frac{V_3}{R} \Rightarrow \dot{\omega}_R = -\frac{dV_3(t)}{dt} \cdot \frac{1}{R} = -\frac{\gamma}{R}$ et : $C_R = \frac{C_m}{k} = -\frac{1}{k} \cdot \frac{M_{eq}.k.R}{2} \cdot \gamma$

On a donc : $-J_R(O).\frac{\gamma}{R} = R.X_{01} - \frac{M_{eq}.R}{2} \cdot \gamma$ Soit : $X_{01} = \left(\frac{M_{eq}}{2} - \frac{J_R(O)}{R^2} \right) \cdot \gamma$

D'autre part on a : $M_{eq} = m_3 + 2.m_R + \frac{2.J(O)}{R^2}$ D'où : $X_{01} = \left(\frac{m_3}{2} + m_R \right) \cdot \gamma$

Par un TMD en O_2 sur la roue 2 on obtient également : $X_{02} = \left(\frac{m_3}{2} + m_R \right) \cdot \gamma$

Question 8 – Composante normale de l'action du rail 0 sur la roue 1

On isole le système Σ . Le bilan des actions mécaniques extérieures est :

- ☞ Le poids du chariot 3 : Une force $\vec{P}_3 = -m_3.g.\vec{y}_0$ appliquée en G_3
- ☞ Le poids de la roue 1 : Une force $\vec{P}_1 = -m_R.g.\vec{y}_0$ appliquée en O_1
- ☞ Le poids de la roue 2 : Une force $\vec{P}_2 = -m_R.g.\vec{y}_0$ appliquée en O_2
- ☞ L'action du rail sur la roue 1 : Une force $\vec{R_{0 \rightarrow 1}} = X_{01}.\vec{x}_0 + Y_{01}.\vec{y}_0$ appliquée en I_1
- ☞ L'action du rail sur la roue 2 : Une force $\vec{R_{0 \rightarrow 2}} = X_{02}.\vec{x}_0 + Y_{02}.\vec{y}_0$ appliquée en I_2

Les inconnues de ces actions sont uniquement Y_{01} et Y_{02} . Pour déterminer Y_{01} il faut donc :

Appliquer un théorème du moment dynamique en I_2 projeté sur l'axe $\vec{z}_0$.

Calculons la somme des moments en I_2 projeté sur $\vec{z}_0$ des actions extérieures s'appliquant sur Σ :

$$\Sigma \mathcal{M}_{I_2}(\vec{Ext} \rightarrow \Sigma).\vec{z}_0 = \vec{I_2G_3} \wedge \vec{P}_3.\vec{z}_0 + \vec{I_2O_1} \wedge \vec{P}_1.\vec{z}_0 + \vec{I_2O_2} \wedge \vec{P}_2.\vec{z}_0 + \vec{I_2I_1} \wedge \vec{R_{0 \rightarrow 1}}.\vec{z}_0 + \vec{0}.\vec{z}_0$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{I_2}(\vec{Ext} \rightarrow \Sigma).\vec{z}_0 = (L.\vec{x}_0 + (R+H).\vec{y}_0) \wedge (-m_3.g.\vec{y}_0).\vec{z}_0 + (2.L.\vec{x}_0 + R.\vec{y}_0) \wedge (-m_R.g.\vec{y}_0).\vec{z}_0 \dots$$

$$+ R.\vec{y}_0 \wedge (-m_R.g.\vec{y}_0).\vec{z}_0 + 2.L.\vec{x}_0 \wedge (X_{01}.\vec{x}_0 + Y_{01}.\vec{y}_0).\vec{z}_0$$

On en déduit : $\Sigma \mathcal{M}_{I_2}(\vec{Ext} \rightarrow \Sigma).\vec{z}_0 = 2.L.Y_{01} - (m_3 + 2.m_R).g.L$

Calculons les moments dynamiques en I_2 projeté sur $\vec{z}_0$ de Σ dans son mouvement par rapport à 0 :

$$\delta_{I_2}(\vec{\Sigma}/\vec{0}) = \delta_{I_2}(\vec{1}/\vec{0}) + \delta_{I_2}(\vec{2}/\vec{0}) + \delta_{I_2}(\vec{3}/\vec{0})$$

$$\delta_{I_2}(\vec{\Sigma}/\vec{0}) = \delta_{O_1}(\vec{1}/\vec{0}) + \vec{I_2O_1} \wedge m_R.\vec{\Gamma_{O_1 \in 1/0}} + \delta_{O_2}(\vec{2}/\vec{0}) + \vec{I_2O_2} \wedge m_R.\vec{\Gamma_{O_2 \in 2/0}} + \delta_{G_3}(\vec{3}/\vec{0}) + \vec{I_2G_3} \wedge m_3.\vec{\Gamma_{G_3 \in 3/0}}$$

O_1 et O_2 étant les centres des liaisons pivot de 1 et 2 avec 3 : $\vec{\Gamma_{O_1 \in 1/0}} = \vec{\Gamma_{O_2 \in 2/0}} = \vec{\Gamma_{G_3 \in 3/0}} = \gamma.\vec{x}_0$

Et le chariot 3 de centre d'inertie G_3 étant en translation : $\delta_{G_3}(\vec{3}/\vec{0}) = \vec{0}$

En écrivant cette somme dans la base b_0 projeté sur $\vec{z}_0$ on a alors :

$$\delta_{I_2}(\vec{\Sigma}/\vec{0}).\vec{z}_0 = J_R(O).\dot{\omega}_R + (2.L.\vec{x}_0 + R.\vec{y}_0) \wedge m_R.\gamma.\vec{x}_0.\vec{z}_0 + J_R(O).\dot{\omega}_R + R.\vec{y}_0 \wedge m_R.\gamma.\vec{x}_0.\vec{z}_0 \dots$$

$$+ (L.\vec{x}_0 + (R+H).\vec{y}_0) \wedge m_3.\gamma.\vec{x}_0.\vec{z}_0$$

Soit : $\delta_{I_2}(\vec{\Sigma}/\vec{0}).\vec{z}_0 = 2.J_R(O).\dot{\omega}_R - [2.m_R.R + m_3.(R+H)].\gamma$ D'autre part : $\frac{d\omega_R(t)}{dt} = \dot{\omega}_R = -\frac{\gamma}{R}$

On en déduit : $\delta_{I_2}(\vec{\Sigma}/\vec{0}).\vec{z}_0 = -\left[\frac{2.J_R(O)}{R} + 2.m_R.R + m_3.(R+H) \right] \cdot \gamma$

L'application du TMD en I_2 projeté sur $\vec{z}_0$: $\Sigma \mathcal{M}_{I_2}(\vec{Ext} \rightarrow \Sigma).\vec{z}_0 = \delta_{I_2}(\vec{\Sigma}/\vec{0}).\vec{z}_0$ donne donc :

$$2.L.Y_{01} - (m_3 + 2.m_R).g.L = -\left[\frac{2.J_R(O)}{R} + 2.m_R.R + m_3.(R+H) \right] \cdot \gamma$$

Finalement on obtient :

$$Y_{01} = \left(\frac{m_3}{2} + m_R \right) \cdot g - \left(\frac{J_R(O)}{L.R} + m_3 \cdot \frac{R+H}{2.L} + m_R \cdot \frac{R}{L} \right) \cdot \gamma$$

Question 9 – Coefficient de frottement minimal

Pour garantir le roulement sans glissement de la roue (1) sur le rail (0) il faut : $|X_{01}| \leq f_1 \cdot |Y_{01}|$

Soit :
$$f_1 \geq \frac{\left(\frac{m_3}{2} + m_R\right) \cdot \gamma}{\left(\frac{m_3}{2} + m_R\right) \cdot g - \left(\frac{J_R(O)}{L \cdot R} + m_3 \cdot \frac{R+H}{2 \cdot L} + m_R \cdot \frac{R}{L}\right) \cdot \gamma}$$

Question 10 – Composante normale de l'action du rail 0 sur la roue 2

On isole le système Σ . Le bilan des actions mécaniques extérieures est :

- ☞ Le poids du chariot 3 : Une force $\vec{P}_3 = -m_3 \cdot g \cdot \vec{y}_0$ appliquée en G_3
- ☞ Le poids de la roue 1 : Une force $\vec{P}_1 = -m_R \cdot g \cdot \vec{y}_0$ appliquée en O_1
- ☞ Le poids de la roue 2 : Une force $\vec{P}_2 = -m_R \cdot g \cdot \vec{y}_0$ appliquée en O_2
- ☞ L'action du rail sur la roue 1 : Une force $\vec{R}_{0 \rightarrow 1} = X_{01} \cdot \vec{x}_0 + Y_{01} \cdot \vec{y}_0$ appliquée en I_1
- ☞ L'action du rail sur la roue 2 : Une force $\vec{R}_{0 \rightarrow 2} = X_{02} \cdot \vec{x}_0 + Y_{02} \cdot \vec{y}_0$ appliquée en I_1

L'unique inconnue de ces actions est maintenant Y_{02} donc pour déterminer Y_{02} il faut donc :

Soit : **Appliquer un théorème du moment dynamique en I_1 projeté sur l'axe $\vec{z}_0$.**

ou : **Appliquer un théorème de la résultante dynamique projeté sur l'axe $\vec{y}_0$.**

Remarque : Calcul non demandé

Le TRD en projection sur $\vec{y}_0$ donne : $-m_3 \cdot g - m_R \cdot g - m_R \cdot g + Y_{01} + Y_{02} = 0$

Soit : $Y_{02} = (m_3 + 2 \cdot m_R) \cdot g - Y_{01}$
$$Y_{02} = \left(\frac{m_3}{2} + m_R\right) \cdot g + \left(\frac{J_R(O)}{L \cdot R} + m_3 \cdot \frac{R+H}{2 \cdot L} + m_R \cdot \frac{R}{L}\right) \cdot \gamma$$

Question 11 – Choix du matériau de bandage des roues

Avec un coefficient de sécurité $s = 2$, il nous faut un facteur de frottement tel que :

$$f \geq 2 \cdot f_1 \geq 2 \cdot f_2 \quad \text{Soit :} \quad f \geq 2 \times 0,177 = 0,354$$

Le tableau 1 nous montre alors qu'il faut pour la roue un bandage en PVC avec lequel on a $f = 0,5$.

Question 12 – Liaison équivalente en L et L'

Les trois liaisons sphère plan de centre R, P et Q ont respectivement pour normale $(R, \vec{x}_0)$, $(P, \vec{x}_1)$ et $(Q, \vec{x}_2)$. Donc la forme des torseurs sthéniques de ces 3 liaisons sont :

$$\left\{ T_{4 \rightarrow 5}^R \right\} = \begin{Bmatrix} x_R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{b}_0} \quad \left\{ T_{4 \rightarrow 5}^P \right\} = \begin{Bmatrix} x_P & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{b}_1} \quad \left\{ T_{4 \rightarrow 5}^Q \right\} = \begin{Bmatrix} x_Q & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{b}_2}$$

D'autre part : $\vec{LR} = r_5 \cdot \vec{x}_0$, $\vec{LP} = r_5 \cdot \vec{x}_1$ et $\vec{LQ} = r_5 \cdot \vec{x}_2$ Donc par un transport de ces trois torseurs au point L on obtient :

$$\left\{ T_{4 \rightarrow 5}^R \right\} = \begin{Bmatrix} x_R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{b}_0} \quad \left\{ T_{4 \rightarrow 5}^P \right\} = \begin{Bmatrix} x_P & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{b}_1} \quad \left\{ T_{4 \rightarrow 5}^Q \right\} = \begin{Bmatrix} x_Q & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{b}_2}$$

Avec : $\vec{x}_1 = \cos \frac{\pi}{3} \cdot \vec{x}_0 - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \vec{z}_0$ et : $\vec{x}_2 = \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \vec{x}_0 - \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \vec{z}_0$

D'où par des changements de base on obtient :

$$\left\{ T_{4 \rightarrow 5}^R \right\} = \begin{Bmatrix} x_R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{b}_0} \quad \left\{ T_{4 \rightarrow 5}^P \right\} = \begin{Bmatrix} x_P \cdot \cos(\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 \\ -x_P \cdot \sin(\pi/3) & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{b}_0} \quad \left\{ T_{4 \rightarrow 5}^Q \right\} = \begin{Bmatrix} x_P \cdot \cos(2\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 \\ -x_P \cdot \sin(2\pi/3) & 0 \end{Bmatrix}_{\vec{b}_0}$$

Ces trois liaisons sont des liaisons en parallèle donc le torseur sthénique de la liaison équivalente est la somme de ces trois torseurs sthéniques : $\{T_{4 \rightarrow 5}^1\} = \{T_{4 \rightarrow 5}^R\} + \{T_{4 \rightarrow 5}^P\} + \{T_{4 \rightarrow 5}^Q\}$

On obtient donc un torseur sthénique de la forme : $\{T_{4 \rightarrow 5}^1\} = \begin{Bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ L & z_1 & 0 \end{Bmatrix}_{b_0}$

Ce torseur étant celui d'une liaison linéaire annulaire d'axe $(L, \overrightarrow{y_0})$.

Par un raisonnement identique on obtient pour les trois liaisons de centre P', Q' et R' :

$\{T_{4 \rightarrow 5}^2\} = \begin{Bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ L' & z_2 & 0 \end{Bmatrix}_{b_0}$ **Ce torseur étant celui d'une liaison linéaire annulaire d'axe $(L', \overrightarrow{y_0})$.**

Question 12 – Liaison équivalente aux 7 liaisons sphère plan

Le torseur sthénique de la liaison sphère plan en S' est de la forme : $\{T_{4 \rightarrow 5}^{S'}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ S' & z_{S'} & 0 \end{Bmatrix}_{b_0}$

Ayant $\overrightarrow{LS'} = -h_5 \cdot \overrightarrow{y_0} - d_5 \cdot \overrightarrow{x_0}$ par transport de ce torseur en L on a : $\{T_{4 \rightarrow 5}^{S'}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -h_5 \cdot z_{S'} \\ 0 & +d_5 \cdot z_{S'} \\ L & z_{S'} & 0 \end{Bmatrix}_{b_0}$

D'autre part sachant que $\overrightarrow{LL'} = -h_5 \cdot \overrightarrow{y_0}$ le transport du torseur $\{T_{4 \rightarrow 5}^2\} = \begin{Bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ L' & z_2 & 0 \end{Bmatrix}_{b_0}$ au point L

nous donne le torseur : $\{T_{4 \rightarrow 5}^2\} = \begin{Bmatrix} x_2 - h_5 \cdot z_2 \\ 0 & 0 \\ L & z_2 + h_5 \cdot x_2 \end{Bmatrix}_{b_0}$

Les 7 liaisons sphère plan, sont des liaisons en parallèle donc le torseur sthénique équivalent à ces 7 liaisons sphère plan est la somme des 7 torseurs sthéniques soit la somme des trois torseurs sthéniques des liaisons $\{T_{4 \rightarrow 5}^1\}$, $\{T_{4 \rightarrow 5}^2\}$ et $\{T_{4 \rightarrow 5}^{S'}\}$. On obtient donc :

$$\{T_{4 \rightarrow 5}\} = \begin{Bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ L & z_1 & 0 \end{Bmatrix}_{b_0} + \begin{Bmatrix} x_2 - h_5 \cdot z_2 \\ 0 & 0 \\ L & z_2 + h_5 \cdot x_2 \end{Bmatrix}_{b_0} + \begin{Bmatrix} 0 & -h_5 \cdot z_{S'} \\ 0 & +d_5 \cdot z_{S'} \\ L & z_{S'} & 0 \end{Bmatrix}_{b_0} \quad \text{Qui est de la forme :}$$

$$\{T_{4 \rightarrow 5}\} = \begin{Bmatrix} X_{45} & L_{45} \\ 0 & M_{45} \\ L & z_{45} & N_{45} \end{Bmatrix}_{b_0} \quad \text{Torseur sthénique d'une liaison glissière d'axe $(L, \overrightarrow{y_0})$ }$$

Question 14 – Tension du brin 56

On isole l'ensemble {6,7} les actions mécaniques extérieures s'appliquant sur cet ensemble est :

☞ Le poids du contrepoids 7 : Une force $P_7 = -m_7 \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0}$ appliquée en G_7

☞ L'action de $4 \rightarrow 6$ due à la liaison pivot d'axe $(O_6, \overrightarrow{z_0})$.

☞ L'action du brin tendu sur la poulie 6 : Une force $F_{5 \rightarrow 6} = F_{56} \cdot \overrightarrow{y_0}$ appliquée en J_6

L'application du théorème du moment statique au point O_6 en projection sur $\overrightarrow{z_0}$ donne :

$$\overrightarrow{O_6 G_7} \wedge \overrightarrow{P_7} \cdot \overrightarrow{z_0} + 0 + \overrightarrow{O_6 J_6} \wedge \overrightarrow{F_{5 \rightarrow 6}} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0 \Leftrightarrow (-R_6 \cdot \overrightarrow{x_0} - \ell_7 \cdot \overrightarrow{y_0}) \wedge (-m_7 \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0}) \cdot \overrightarrow{z_0} + R_6 \cdot \overrightarrow{x_0} \wedge F_{56} \cdot \overrightarrow{y_0} \cdot \overrightarrow{z_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow R_6 \cdot m_7 \cdot g + R_6 \cdot F_{56} = 0 \quad \text{On obtient ainsi la tension du brin 56 : } \mathbf{F_{56} = -m_7 \cdot g}$$

Question 15 – Poussée d'Archimède

Le volume immergé de l'ensemble 5 est de : $v = h_i \left(L_5 \times 2.e_5 + \frac{2.e_5 \times e_5}{2} \right) = h_i.e_i.(2.L_5 + e_5)$

Or la poussée d'Archimède est égale à l'opposée du poids du volume de fluide déplacé dont la masse volumique est ρ . Donc c'est une force appliquée en G_5 et de résultante : $\rho.h_i.e_5.(2.L_5 + e_5).g. \overrightarrow{y_0}$.

D'où le torseur de cette poussée d'Archimède :

$$\{T_{\text{eau} \rightarrow 5}\}_{G_5} = \left\{ \begin{array}{c} \rho.h_i.e_5.(2.L_5 + e_5).g. \overrightarrow{y_0} \\ \emptyset \end{array} \right\}$$

On isole 5 le bilan des actions mécaniques extérieures est :

- ☞ Le poids de 5 : Une force $\overrightarrow{P_5} = -m_5.g. \overrightarrow{y_0}$ appliquée en G_5
- ☞ la poussée d'Archimède : Une force $\rho.h_i.e_i.(2.L_5 + e_5).g. \overrightarrow{y_0}$ appliquée en G_5
- ☞ L'action du brin 56 sur 5 : Une force $\overrightarrow{F_{56 \rightarrow 5}} = -\overrightarrow{F_{5 \rightarrow 6}} = -F_{56}. \overrightarrow{y_0} = m_7.g. \overrightarrow{y_0}$ appliquée en A_5 .
- ☞ L'action de 4 sur 5 due à la liaison glissière d'axe $(L, \overrightarrow{y_0})$

L'application du TRS en projection sur l'axe $\overrightarrow{y_0}$ nous donne donc :

$$-m_5.g + \rho.h_i.e_i.(2.L_5 + e_5).g + m_7.g + 0 = 0$$

On obtient donc une hauteur immergée de l'ensemble 5 :

$$h_i = \frac{m_5 - m_7}{\rho.e_5.(2.L_5 + e_5)}$$

Question 16 – Vérification des exigences 3.2.1 et 3.2.2

La relation établie précédente montre qu'en modifiant la masse m_7 , il est possible de modifier la ligne de flottaison en faisant varier la hauteur h_i . **L'exigence 3.2.1 est donc vérifiée.**

D'autre part la présence du mât vertical qui ajoute une masse à la coque pour former la masse de l'ensemble 5 peut être compensée par la masse m_7 . Ainsi la présence du dispositif de mesure peut être compensé par cette masse m_7 . **L'exigence 3.2.2 est donc vérifiée.**

En appliquant uniquement un TRS à l'ensemble 5 on voit que le point d'ancrage du câble (Point d'application de la tension du câble 56) n'a pas d'influence sur la mesure.

Question 17 – Degré d'hyperstatisme

Pour le système étudié on a :

- ☞ 8 pièces : 3, 4 et les 6 barres B_i .
- ☞ 12 liaisons rotules en B, D, E, F, H, I, J et K ainsi qu'en A et C où on en a 2×2
- ☞ Aucune mobilité utile (4 est fixe par rapport à 3) et 6 mobilités internes correspondant à la rotation des 6 barres autour de l'axe reliant les deux centres des rotules à leurs extrémités.

On a donc :

- ☞ Un nombre cyclomatique de $\gamma = 12 - 8 + 1 = 5$
- ☞ Un nombre d'inconnues cinématiques de : $I_C = 12 \times 3 = 36$
- ☞ Un nombre de mobilité de : $M = 0 + 6 = 0$
- ☞ Un nombre de pièces de : $N_P = 8$
- ☞ Un nombre d'inconnues sthéniques de : $I_S = 12 \times 3 = 36$

D'où le degré d'hyperstatisme :

$$\left| \begin{array}{l} H = 6.\gamma + M - I_C = 6 \times 5 + 6 - 36 = 0 \\ \text{ou} \\ H = I_S + M - 6.(N_P - 1) = 36 + 6 - 6.(8 - 1) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{H = 0}$$

Le système est donc isostatique. On peut donc par la statique déterminer toutes les inconnues des actions de liaison et donc en déduire toutes les actions transmises par les barres B_i en fonction de l'action du mât sur l'ensemble 4.

Question 18 – Action dans la liaison glissière 4/5 en fonction de celle de l'eau

On isole 5 Les actions mécaniques extérieures sont :

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \text{Le poids de l'ensemble 5 : } \{T_{\text{pes} \rightarrow 5}\} &= G_5 \left\{ \begin{array}{c} -m_5 \cdot g \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \\
 \Rightarrow \text{L'action de 6} \rightarrow 5 : \{T_{6 \rightarrow 5}\} &= G_5 \left\{ \begin{array}{c} m_7 \cdot (g - \gamma_5) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \\
 \Rightarrow \text{l'action de l'eau sur 5 : } \{T_{\text{eau} \rightarrow 5}\} &= G_5 \left\{ \begin{array}{cc} X_E & L_E \\ Y_E & M_E \\ Z_E & N_E \end{array} \right\} b_0 \\
 \Rightarrow \text{L'action de 4} \rightarrow 5 : \{T_{4 \rightarrow 5}\} &= L \left\{ \begin{array}{cc} X_{45} & L_{45} \\ Y_{45} & M_{45} \\ Z_{45} & N_{45} \end{array} \right\} b_0
 \end{aligned}$$

L'application du PFD à 5 donne donc : $\{T_{\text{pes} \rightarrow 5}\} + \{T_{6 \rightarrow 5}\} + \{T_{\text{eau} \rightarrow 5}\} + \{T_{4 \rightarrow 5}\} = \{\mathcal{D}(5/0)\}$

Avec $\{\mathcal{D}(5/0)\} = G_5 \left\{ \begin{array}{c} m_5 \cdot \gamma_5 \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$ car 5 est en translation rectiligne de direction $\vec{y}_0$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \{T_{4 \rightarrow 5}\} &= G_5 \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ m_5 \cdot \gamma_5 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} b_0 - G_5 \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -m_5 \cdot g & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} b_0 - G_5 \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ m_7 \cdot (g - \gamma_5) & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} b_0 - G_5 \left\{ \begin{array}{cc} X_E & L_E \\ Y_E & M_E \\ Z_E & N_E \end{array} \right\} b_0 \\
 \text{Soit : } \{T_{4 \rightarrow 5}\} &= G_5 \left\{ \begin{array}{cc} -X_E & -L_E \\ (m_5 - m_7) \cdot g + (m_5 + m_7) \cdot \gamma_5 - Y_E & -M_E \\ -Z_E & -N_E \end{array} \right\} b_0
 \end{aligned}$$

Or $\vec{LG}_5 = -\lambda(t) \cdot \vec{y}_0$ donc en transportant ce torseur de G_5 en L par la relation de Varignon,

$$\text{On obtient : } \{T_{4 \rightarrow 5}\} = L \left\{ \begin{array}{cc} -X_E & -L_E + \lambda(t) \cdot Z_E \\ (m_5 - m_7) \cdot g + (m_5 + m_7) \cdot \gamma_5 - Y_E & -M_E \\ -Z_E & -N_E - \lambda(t) \cdot X_E \end{array} \right\} b_0$$

Question 19 – Problème de la composante Y_E

L'action de 4 sur 5 est due à une liaison glissière parfaite d'axe $(L, \vec{y}_0)$. Donc Y_{45} est nulle. Or Y_E n'apparaît que dans l'expression de cette composante.

Cette composante Y_E ne peut donc pas être mesurée par les capteurs du dispositif.

Remarque : Etant donné que $0 = Y_{45} = (m_5 - m_7) \cdot g + (m_5 + m_7) \cdot \gamma_5 - Y_E$ en connaissant l'accélération γ_5 il est possible de déterminer Y_E . Cela est possible avec un capteur angulaire sur la poulie 6 mesurant sa position angulaire $\theta_6(t)$. On aura alors : $Y_E = (m_5 - m_7) \cdot g + (m_5 + m_7) \cdot R_6 \cdot \ddot{\theta}_6(t)$

Question 20 – Direction de l'action de la barre B_1

L'action de la barre (B_1) sur (4) est celle transmise par une liaison rotule de centre A (qui laisse toutes les rotations dans le torseur cinématique), donc cette action est un glisseur d'axe passant par A.

On isole la barre B_1 , les actions mécaniques extérieures sont :

$\Rightarrow$ L'action de 3 $\rightarrow B_1$: Une force $\vec{F}_{3 \rightarrow B_1}$ appliquée en H (Car due à la liaison rotule de centre H)

$\Rightarrow$ L'action de 4 $\rightarrow B_1$: Une force $\vec{F}_{4 \rightarrow B_1}$ appliquée en A (Car due à la liaison rotule de centre A)

Le TMS en A donne donc : $\vec{AH} \wedge \vec{F}_{3 \rightarrow B_1} + \vec{0} = \vec{0}$ Donc : $\vec{F}_{3 \rightarrow B_1} \parallel \vec{AH}$

$$\text{L'action de } B_1 \text{ sur 4 est donc un glisseur d'axe } (AH) = (A, \vec{z}_0) \quad \{T_{B_1 \rightarrow 4}\} = A \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_1, \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Question 21 – Torseurs sthéniques des actions des barres B_i

Par un raisonnement identique au précédent on obtient :

$$\begin{aligned} \{T_{B2 \rightarrow 4}\} &= \begin{Bmatrix} F_2 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C & \{T_{B3 \rightarrow 4}\} &= \begin{Bmatrix} F_3 \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B & \{T_{B4 \rightarrow 4}\} &= \begin{Bmatrix} F_4 \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D \\ \{T_{B5 \rightarrow 4}\} &= \begin{Bmatrix} F_5 \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A & \{T_{B6 \rightarrow 4}\} &= \begin{Bmatrix} F_6 \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C \end{aligned}$$

En transportant ces torseurs et celui de la question précédente en O on obtient :

$$\begin{aligned} \{T_{B1 \rightarrow 4}\} &= \begin{Bmatrix} F_1 \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{a} \cdot F_1 \cdot \vec{y}_0 \end{Bmatrix}_O & \{T_{B2 \rightarrow 4}\} &= \begin{Bmatrix} F_2 \cdot \vec{z}_0 \\ -\vec{a} \cdot F_2 \cdot \vec{y}_0 \end{Bmatrix}_O & \{T_{B3 \rightarrow 4}\} &= \begin{Bmatrix} F_3 \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{d} \cdot F_3 \cdot \vec{y}_0 \end{Bmatrix}_O \\ \{T_{B4 \rightarrow 4}\} &= \begin{Bmatrix} F_4 \cdot \vec{y}_1 \\ \vec{a} \cdot F_4 \cdot \vec{x}_0 \end{Bmatrix}_O & \{T_{B5 \rightarrow 4}\} &= \begin{Bmatrix} F_5 \cdot \vec{y}_0 \\ -\vec{a} \cdot F_5 \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_O & \{T_{B6 \rightarrow 4}\} &= \begin{Bmatrix} F_6 \cdot \vec{y}_1 \\ \vec{a} \cdot F_6 \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_O \end{aligned}$$

Question 22 – Détermination de l'action de l'eau

On isole 4, les actions mécaniques extérieures sont :

☞ L'action de 5 sur 4 : $\{T_{5 \rightarrow 4}\}$ ☞ Les actions des 6 barres B_i : $\sum_{i=1}^6 \{T_{B_i \rightarrow 4}\}$

☞ Le poids de 4 : $\{T_{pes \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m_4 \cdot g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{b_0}$

L'application du PFS à 4 donne donc : $\{T_{5 \rightarrow 4}\} + \sum_{i=1}^6 \{T_{B_i \rightarrow 4}\} + \{T_{pes \rightarrow 4}\} = \{0\}$

Soit en projetant les torseurs dans la base b_0 :

$$\begin{cases} F_3 + X_E = 0 \\ F_4 + F_5 + F_6 - m_4 \cdot g = 0 \\ F_1 + F_2 + Z_E = 0 \\ L_E - \lambda(t) \cdot Z_E + a \cdot F_4 = 0 \\ M_E + e \cdot Z_E + f \cdot X_E + a \cdot (F_1 - F_2) + d \cdot F_3 = 0 \\ N_E + \lambda(t) \cdot X_E + a \cdot (F_6 - F_5) = 0 \end{cases}$$

Soit après résolution $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} X_E &= -F_3 \\ Z_E &= -(F_1 + F_2) \\ L_E &= -a \cdot F_4 - \lambda(t) \cdot (F_1 + F_2) \\ M_E &= e \cdot (F_1 + F_2) + f \cdot F_3 - a \cdot (F_1 - F_2) - d \cdot F_3 \\ N_E &= \lambda(t) \cdot F_3 - a \cdot (F_6 - F_5) \end{aligned}$$

Question 23 – Dispositif expérimental complet

Pour déterminer les composantes de l'action de l'eau sur 5 il faut connaître les valeurs données par les capteurs dynamométriques F_1 à F_6 ainsi que $\lambda(t)$.

D'autre par ton a vu que : $Y_E = (m_5 - m_7) \cdot g + (m_5 + m_7) \cdot \gamma_5$ avec $\gamma_5 = \ddot{\lambda}(t)$ avec $\lambda(t)$ pouvant être mesuré par un capteur de position angulaire de la poulie.

On peut donc imaginer une carte d'acquisition et de traitement (par exemple de type Arduino) qui prend en entrée les valeurs des capteurs dynamométriques F_i et d'un capteur de position angulaire de la poulie et qui retourne les six composantes de l'action de l'eau sur 5.

Question 24 – Gain de l'adaptateur

Il y a un roulement sans glissement de la roue motrice sur le rail. Donc : $V(p) = R \cdot \Omega_R(p)$

De même il y a un roulement sans glissement de la roue libre sur le rail. Donc : $V(p) = r \cdot \Omega_r(p)$

On en déduit : $K_8 = R$ (ou $K_8 = -R$) en m et : $K_9 = \frac{1}{r}$ (ou $K_9 = -\frac{1}{r}$) en m⁻¹

Du schéma bloc de la figure 10 on en déduit : $\varepsilon_U(p) = K_1 \cdot V_C(p) - K_9 \cdot K_{10} \cdot K_{11} \cdot V(p)$

Or pour $V(p) = V_C(p)$ on souhaite $\varepsilon_U(p) = 0$ Soit : $0 = (K_1 - K_9 \cdot K_{10} \cdot K_{11}) \cdot V_C(p)$

Il faut donc : $K_1 = K_9 \cdot K_{10} \cdot K_{11}$ (en V.s.m⁻¹)

Question 25 – Fonctions de transfert

Du schéma bloc de la figure 10 on en déduit : $H_1(p) = \frac{K_a \cdot C(p) \cdot H_m(p) \cdot K_b}{1 + K_a \cdot C(p) \cdot H_m(p) \cdot K_b}$

$$H_1(p) = \frac{\frac{K_a \cdot C \cdot K_m \cdot K_b}{(1 + T_e \cdot p) \cdot (1 + T_m \cdot p)}}{1 + \frac{K_a \cdot C \cdot K_m \cdot K_b}{(1 + T_e \cdot p) \cdot (1 + T_m \cdot p)}} = \frac{K_{BO}}{(1 + T_e \cdot p) \cdot (1 + T_m \cdot p) + K_{BO}} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO} + (T_e + T_m) \cdot p + T_e \cdot T_m \cdot p^2}$$

Soit sous forme canonique :

$$H_1(p) = \frac{\frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}}{1 + \frac{T_e + T_m}{1 + K_{BO}} \cdot p + \frac{T_e \cdot T_m}{1 + K_{BO}} \cdot p^2}$$

Du schéma bloc de la figure 10 on en déduit : $H_2(p) = \frac{-K_c \cdot (1 + T_e \cdot p) \cdot H_m(p) \cdot K_b}{1 + K_a \cdot C(p) \cdot H_m(p) \cdot K_b}$

$$H_2(p) = \frac{\frac{K_c \cdot (1 + T_e \cdot p) \cdot K_m \cdot K_b}{(1 + T_e \cdot p) \cdot (1 + T_m \cdot p)}}{1 + \frac{K_a \cdot C \cdot K_m \cdot K_b}{(1 + T_e \cdot p) \cdot (1 + T_m \cdot p)}} = \frac{K_c \cdot K_b \cdot K_m \cdot (1 + T_e \cdot p)}{(1 + T_e \cdot p) \cdot (1 + T_m \cdot p) + K_{BO}} = \frac{K_c \cdot K_b \cdot K_m \cdot (1 + T_e \cdot p)}{1 + K_{BO} + (T_e + T_m) \cdot p + T_e \cdot T_m \cdot p^2}$$

Soit sous forme canonique :

$$H_2(p) = \frac{\frac{K_c \cdot K_b \cdot K_m}{1 + K_{BO}} \cdot (1 + T_e \cdot p)}{1 + \frac{T_e + T_m}{1 + K_{BO}} \cdot p + \frac{T_e \cdot T_m}{1 + K_{BO}} \cdot p^2}$$

D'après le théorème de la valeur finale : $u_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot V_1(p)$

D'autre part : $V_1(p) = H_1(p) \cdot V_C(p)$ avec : $V_C(p) = \frac{V_0}{p}$ D'où : $p \cdot V_1(p) = V_0 \cdot H_1(p)$

Etant donné l'expression précédente on en déduit : $u_1 = \lim_{p \rightarrow 0} V_0 \cdot H_1(p) = \frac{V_0 \cdot K_{BO}}{1 + K_{BO}}$

D'après le théorème de la valeur finale : $u_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot V_2(p)$

D'autre part : $V_2(p) = H_2(p) \cdot F_{res}(p)$ avec : $F_{res}(p) = \frac{F_0}{p}$ D'où : $p \cdot V_2(p) = F_0 \cdot H_2(p)$

Etant donné l'expression précédente on en déduit : $u_2 = \lim_{p \rightarrow 0} F_0 \cdot H_2(p) = -\frac{F_0 \cdot K_c \cdot K_b \cdot K_m}{1 + K_{BO}}$

Question 26 – Gain du correcteur pour une influence de la perturbation négligeable

Des expressions précédentes on a : $\frac{|u_2|}{|u_1|} = \frac{F_0 \cdot K_c \cdot K_b \cdot K_m}{V_0 \cdot K_{BO}} = \frac{F_0 \cdot K_c \cdot K_b \cdot K_m}{V_0 \cdot K_a \cdot K_b \cdot C \cdot K_m} = \frac{F_0 \cdot K_c}{V_0 \cdot K_a \cdot C}$

Donc : $|u_2| \leq 0,1 \cdot |u_1| \Leftrightarrow \frac{F_0 \cdot K_c}{V_0 \cdot K_a \cdot C} \leq 0,1$

Donc pour une influence de la perturbation négligeable il faut :

$$C \geq \frac{0,1 \cdot F_0 \cdot K_c}{V_0 \cdot K_a} = 0,05$$

Question 27 – Correcteur PI et précision

Avec le correcteur PI : $C_1(p) = \frac{C \cdot (1 + T_i \cdot p)}{T_i \cdot p}$ Pour $T_i = T$, on obtient la FTBO :

$$FTBO(p) = C_1(p) \cdot H(p) = \frac{C \cdot (1 + T_m \cdot p)}{T_m \cdot p} \cdot \frac{K_N}{(1 + T_m \cdot p) \cdot (1 + T_e \cdot p)} = \frac{C \cdot K_N}{T_m \cdot p \cdot (1 + T_e \cdot p)}$$

Il s'agit donc une fonction de transfert de classe 1 et de gain statique $K_{BO} = \frac{C \cdot K_N}{T_m}$ on a donc :

☞ Une erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude V_0 :

$$E_S = 0$$

☞ Une erreur de trainage en réponse à une rampe de pente γ_0 :

$$E_T = \frac{\gamma_0}{K_{BO}} = \frac{\gamma_0 \cdot T_m}{C \cdot K_N}$$

L'exigence Id 1.2.3 du cahier des charges impose une erreur statique : $E_S = 0$ et une erreur de trainage : $E_T \leq 0,16 \text{ m.s}^{-1}$. D'autre part on a vu à la question 1 qu'il faut une accélération $\gamma = 1,6 \text{ m.s}^{-2}$.

D'où la condition sur le gain du correcteur pour satisfaire l'exigence Id 1.2.3 :

$$C \geq C_\varepsilon = \frac{\gamma \cdot T_m}{E_T \cdot K_N} = \frac{1,6 \times 5}{0,16 \times 20}$$

Soit finalement :

$$C \geq C_\varepsilon \text{ Avec : } C_\varepsilon = 2,5 \text{ V.s.m}^{-1}$$

Question 28 – Correcteur PI et stabilité

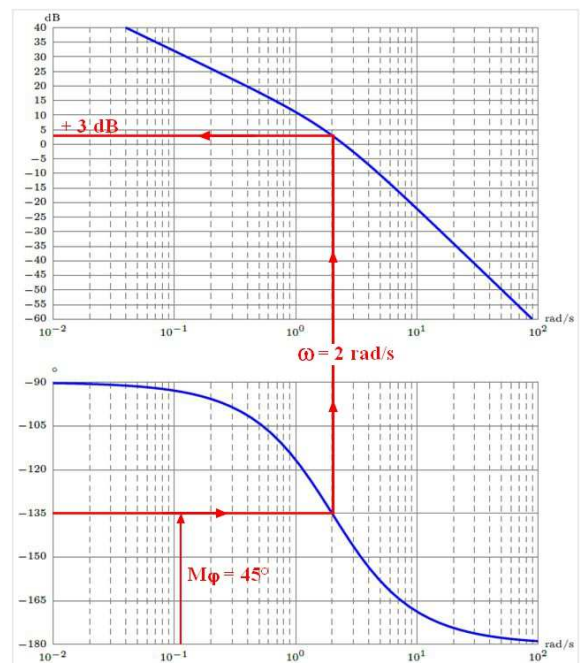
L'exigence Id 1.2.2 du cahier des charges impose une marge de gain $M_G \geq 12 \text{ dB}$ et une marge de phase : $M_\phi \geq 45^\circ$. Le diagramme de Bode de la FTBO nous montre que :

☞ La marge de gain est infinie quelque soit la valeur de C

☞ La phase de la FTBO est de $-180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$ pour une pulsation $\omega = 2 \text{ rad.s}^{-1}$. A cette pulsation pour $C = 1$ le gain dynamique est de $+3 \text{ dB}$. Or ce gain en décibel doit être négatif.

Il faut donc translater la courbe de gain d'au moins 3 dB vers le bas. Il faut donc un gain C du correcteur : $C \leq C_\phi$ avec : $20 \cdot \log C_\phi = -3 \text{ dB}$.

Soit : $C \leq C_\phi$ Avec : $C_\phi = 0,7 \text{ V.s.m}^{-1}$

**Question 29 – Conclusion sur le correcteur PI**

On a vu que pour satisfaire aux critères du cahier des charges, il faut pour :

☞ La précision : Id 1.2.3 un gain C du correcteur tel que : $C \geq 2,5 \text{ V.s.m}^{-1}$

☞ La stabilité : Id 1.2.2 un gain C du correcteur tel que : $C \leq 0,7 \text{ V.s.m}^{-1}$

Donc ce correcteur PI ne peut pas satisfaire à l'ensemble des critères du cahier des charges.

Question 30 – Correcteur PID

Le correcteur PID s'écrit : $C_2(p) = C \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p \right) = \frac{C \cdot (T_i \cdot p + 1 + T_i \cdot T_d \cdot p^2)}{T_i \cdot p}$

Avec $T_i = 2 \cdot T_e$ et $T_d = \frac{T_e}{2} \Rightarrow C_2(p) = \frac{C \cdot (2 \cdot T_e \cdot p + 1 + T_e^2 \cdot p^2)}{2 \cdot T_e \cdot p} = \frac{C \cdot (1 + T_e \cdot p)^2}{2 \cdot T_e \cdot p}$

Soit finalement : $C_2(p) = \frac{K \cdot (1 + T_e \cdot p)^2}{p}$ Avec : $K = \frac{C}{2 \cdot T_e}$ Et : $T = T_e$

Question 31 – Correcteur PID et précision

Avec le correcteur PID : $C_2(p) = \frac{K \cdot (1 + T_e \cdot p)^2}{p}$ on obtient la FTBO :

$$FTBO(p) = \frac{K \cdot (1 + T_e \cdot p)^2}{p} \cdot \frac{K_N}{(1 + T_m \cdot p) \cdot (1 + T_e \cdot p)} \quad FTBO(p) = \frac{K \cdot K_N \cdot (1 + T_e \cdot p)}{p \cdot (1 + T_m \cdot p)}$$

Il s'agit donc une fonction de transfert de classe 1 et de gain statique $K_{BO} = K \cdot K_N$ on a donc :

☞ Une erreur statique en réponse à un échelon d'amplitude V_0 : $E_S = 0$

☞ Une erreur de trainage en réponse à une rampe de pente γ_0 : $E_T = \frac{\gamma_0}{K_{BO}} = \frac{\gamma_0}{K \cdot K_N}$

L'exigence Id 1.2.3 du cahier des charges impose une erreur statique : $E_S = 0$ et une erreur de trainage : $E_T \leq 0,16 \text{ m.s}^{-1}$. D'autre part on a vu à la question 1 qu'il faut une accélération $\gamma = 1,6 \text{ m.s}^{-2}$.

D'où la condition sur le gain du correcteur pour satisfaire l'exigence Id 1.2.3 :

$$K \geq \frac{\gamma}{E_T \cdot K_N} = \frac{1,6}{0,16 \times 20} \quad \text{Soit finalement : } K \geq 0,5 \text{ V.m}^{-1}$$

Question 32 – Correcteur PID et stabilité

Pour $K = 0,05 \text{ V.m}^{-1}$ ($K_{BO} = K \cdot K_N = 1$), $T_e = 0,5 \text{ s}$ et $T_m = 5 \text{ s}$, la FTBO s'écrit :

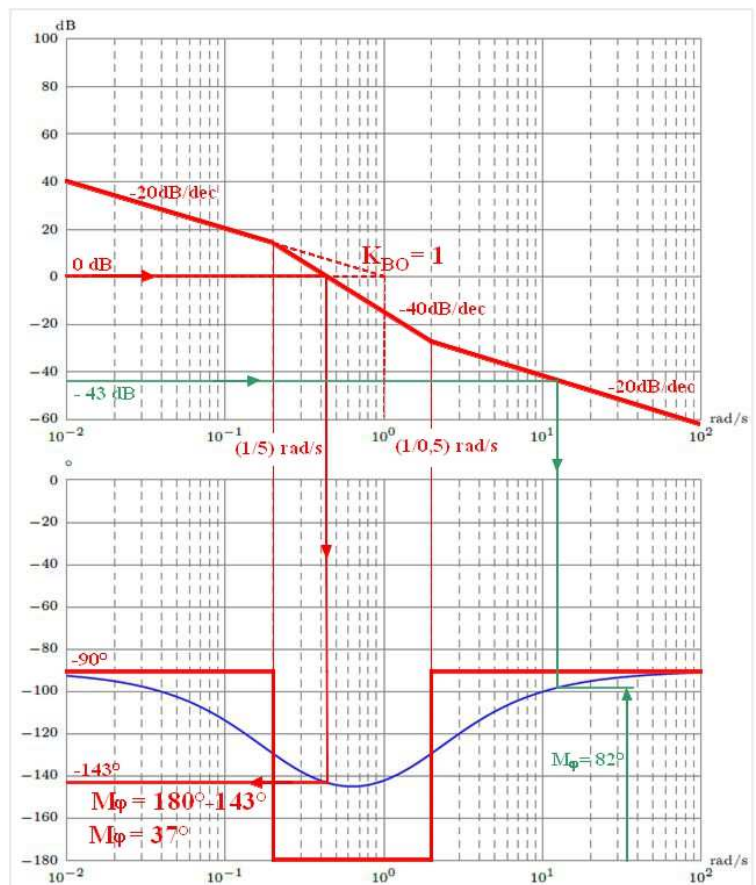
$$FTBO(p) = \frac{1 + 0,5 \cdot p}{p \cdot (1 + 5 \cdot p)}$$

D'où le tracé des diagrammes de Bode asymptotique ci-contre :

On lit sur ces diagrammes asymptotiques :

- ☞ Une marge de gain : $M_G = +\infty$ car la phase est supérieure à -90° quelque soit la pulsation.
- ☞ Une marge de phase : $M_\phi = 37^\circ$ car pour une pulsation $\omega_{0dB} \approx 4 \text{ rad.s}^{-1}$ le gain dynamique est de 0 dB et la phase de -143° ($180 - 143 = 37^\circ$).

La marge de phase est de $37^\circ < 45^\circ$ le critère de stabilité (exigence Id 1.2.2) n'est donc pas respectée.



Question 33 – Correcteur PID de gain 7,5 : Synthèse

On choisit un gain pour le correcteur PID de $7,5 \text{ V.m}^{-1}$.

☞ Avec ce gain pour le correcteur celui-ci sera $7,5/0,05 = 150$ fois plus important. Donc la courbe de gain sera translatée de $20.\log 150 = +43 \text{ dB}$. La pulsation de coupure à 0 dB sera alors d'environ : $\omega_{0\text{dB}} = 12 \text{ rad.s}^{-1}$ et la marge de phase de : $M_\phi = 82^\circ$. (Voir tracé en vert page précédente)

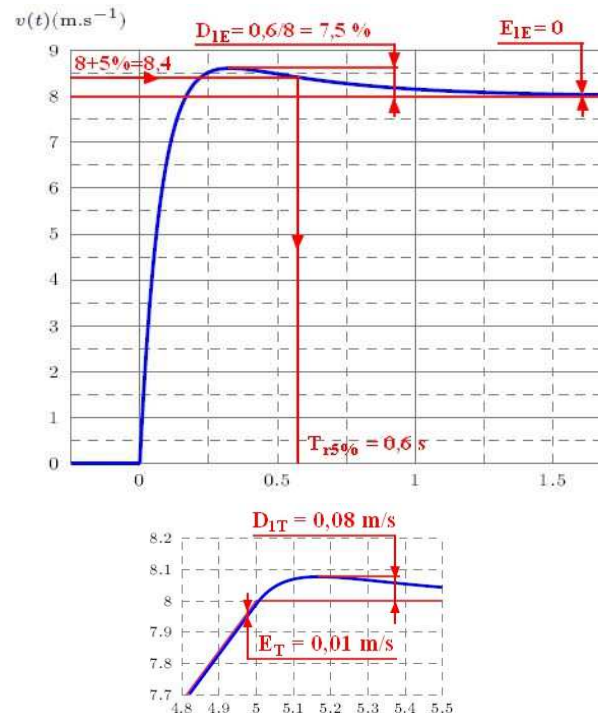
☞ La marge de gain sera toujours de : $M_G = +\infty$.

☞ La réponse temporelle à un échelon de consigne de 8 m.s^{-1} donne un temps de réponse à 5% de : $T_{r5\%} \approx 0,6 \text{ s}$

☞ La réponse temporelle à un échelon de consigne de 8 m.s^{-1} donne un dépassement de : $0,6 \text{ m.s}^{-1}$ soit un dépassement relatif de : $D_{IE} = \frac{0,6}{8} = 7,5 \%$

☞ La réponse temporelle à une consigne en trapèze de vitesse de pente $\gamma = 1,6 \text{ m.s}^{-2}$ donne un dépassement de : $D_{IT} = 0,08 \text{ m.s}^{-1}$.

☞ La réponse temporelle à une consigne en trapèze de vitesse de pente $\gamma = 1,6 \text{ m.s}^{-2}$ donne une erreur de trainage de : $E_T = 0,01 \text{ m.s}^{-1}$.



Détail des sous exigences de l'exigence Id 1.2 :

☞ Id 1.2.1 :	$T_{r5\%} = 0,6 \leq 3 \text{ s}$	⇒	Exigence vérifiée
☞ Id 1.2.2 :	$M_G = +\infty \geq 12 \text{ dB}$	⇒	Exigence vérifiée
	$M_\phi = 82^\circ \geq 45^\circ$	⇒	Exigence vérifiée
☞ Id 1.2.3 :	$E_S = 0$	⇒	Exigence vérifiée
	$E_T = 0,01 \leq 0,16 \text{ m.s}^{-1}$	⇒	Exigence vérifiée
☞ Id 1.2.4 :	$D_{IE} = 7,5 \% \leq 10\%$	⇒	Exigence vérifiée
	$D_{IT} = 0,08 \leq 0,1 \text{ m.s}^{-1}$	⇒	Exigence vérifiée

Ce correcteur satisfait donc à l'ensemble de l'exigence Id 1.2

Question 34 – Evolution de la tension moteur de la simulation

La figure 15 donnant l'évolution (en simulation) de la tension moteur montre des pics de tension à 3000 V . Cela n'est pas réaliste. Il est fort probable que la tension maximale du moteur n'excède pas quelques centaines de volts.

Sur la figure 10 du modèle de l'asservissement il faut donc ajouter un bloc de saturation entre le correcteur et le moteur.