Réponses fréquentielles des S.L.C.I.

1- Principe et propriétés d'une étude fréquentielle

1.1- Principe de l'identification à partir d'une étude fréquentielle

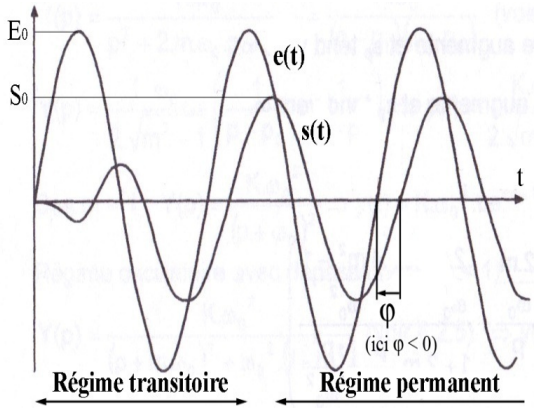
Le principe d'une telle étude est de mettre en entrée du SLCI une fonction sinusoïdale d'amplitude E_0 et de pulsation ω connue puis de faire varier cette pulsation ω sur une bande de fréquence correspondant à l'utilisation du système. Quelque soit le système linéaire on s'aperçoit que, après un régime transitoire dont la durée excède rarement quelques périodes, la réponse est également une sinusoïde de même de pulsation ω. Seule l'amplitude et la phase de la réponse sont différentes de l'entrée.

Par conséquent à une entrée de la forme :

$$\mathbf{e(t) = E_0 \,.\, \sin(\omega.t)}$$

On a une sortie de la forme :

$$\mathbf{s(t) = S_0 \,.\, \sin(\omega.t + \varphi)}$$



On relève alors les caractéristiques de la s(t) en fonction de la pulsation ω : $S_0(\omega)$ et $\varphi(\omega)$, et on trace les diagrammes de Bode avec :

☞ Le gain dynamique : $G_{db}(\omega) = 20.\log \dfrac{S_0}{E_0}$

et : ☞ Le déphasage : $\varphi(\omega)$

On montre alors que ces caractéristiques dépendent de la fonction de transfert H(p) du système linéaire :

$$\mathbf{G_{db}(\omega) = 20.\log |H(j.\omega)|} \quad \text{et :} \quad \mathbf{\varphi(\omega) = Arg(\, H(j.\omega)\,)}$$

Cette méthode d'identification est assez longue dans sa réalisation car elle nécessite un grand nombre d'expérience : Une expérience par pulsation ω. Cependant elle permet d'identifier tous les types de fonctions de transfert des systèmes linéaires.

1.2- Diagramme asymptotique

Les représentations graphiques du gain et du déphasage sont des courbes présentant des asymptotes. On défini comme diagrammes asymptotiques la représentation des asymptotes des diagrammes de Bode.

1.3- Principe de superposition

Le diagramme de Bode du produit de deux fonctions de transfert s'obtient par l'addition des diagrammes des deux fonctions de transfert.

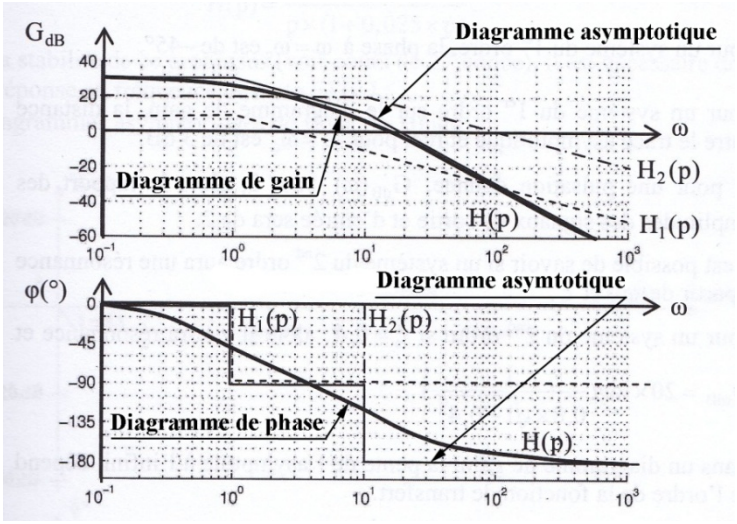
Si la fonction de transfert H(p) est définie par le produit de deux fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(P)$:

$$\mathbf{H(p) = H_1(p) \times H_2(p)}$$

Alors : $\mathbf{G_{dbH}(\omega) = G_{dbH1}(\omega) + G_{dbH2}(\omega)}$

$$\mathbf{\varphi_H(\omega) = \varphi_{H1}(\omega) + \varphi_{H2}(\omega)}$$

Cette addition des diagrammes est également valable avec les diagrammes asymptotiques.



2- Diagrammes de Bode des fonctions intégrateur et dérivateur

Fonction de transfert d'un intégrateur de gain K : $H(p) = \frac{K}{p}$

On a alors : $G_{db}(\omega) = 20.\log K - 20.\log \omega$ et : $\varphi(\omega) = -90°$

Fonction de transfert d'un dérivateur de gain K : $H(p) = K.p$

On a alors : $G_{db}(\omega) = 20.\log K + 20.\log \omega$ et : $\varphi(\omega) = +90°$

Les diagrammes de gain et de phase de l'intégrateur et du dérivateur sont donc des droites.

Diagramme de Gain

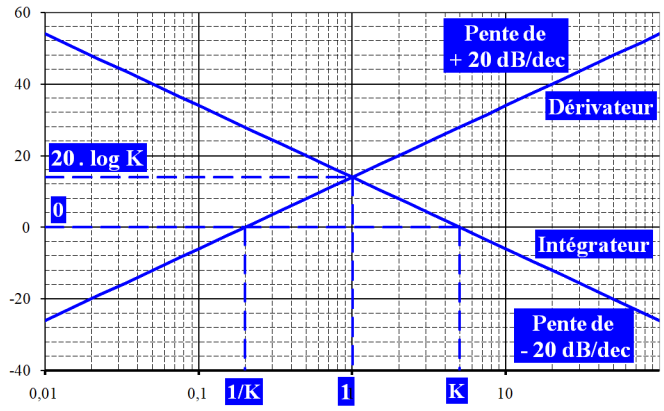
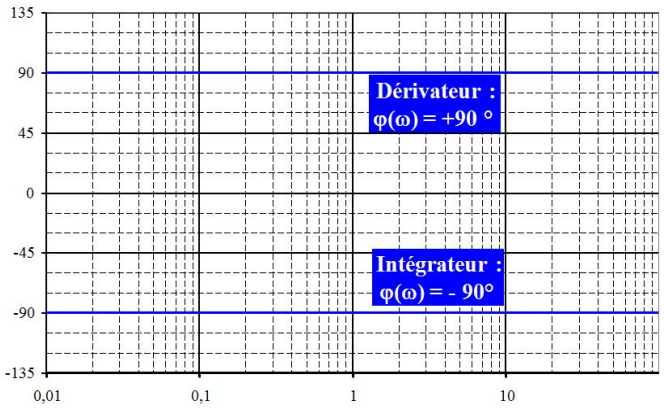


Diagramme de phase

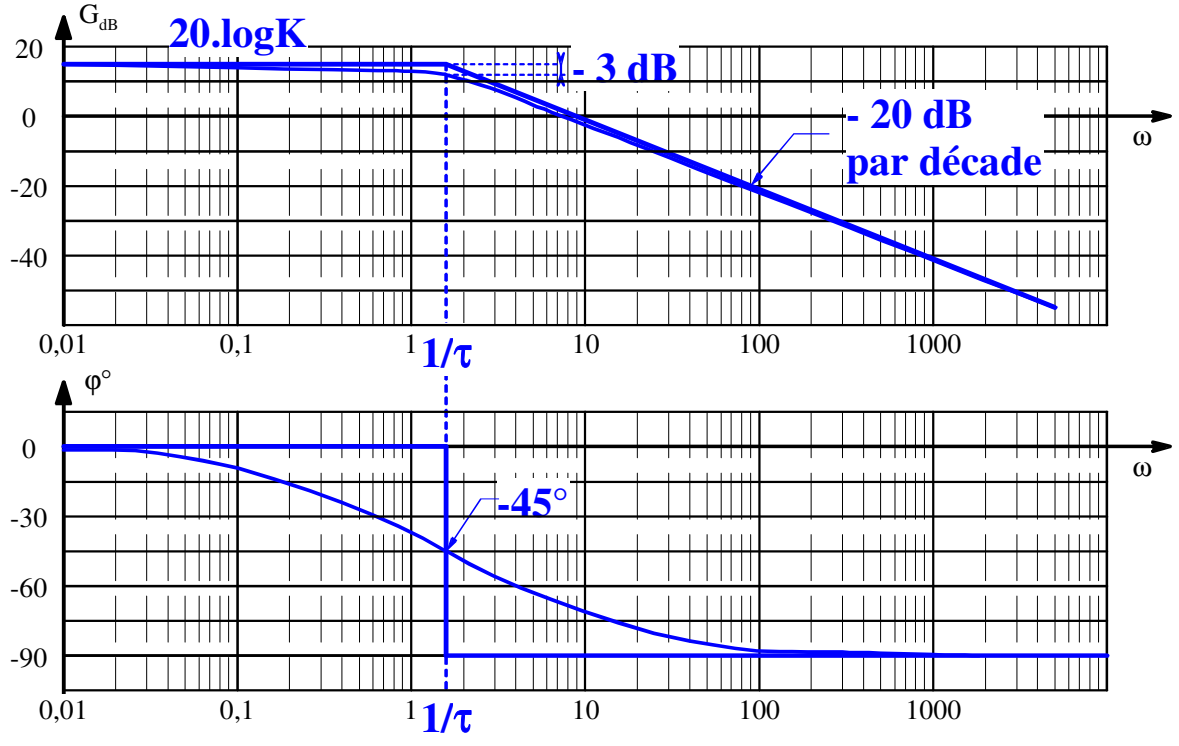


3- Diagrammes de Bode d'un premier ordre

Premier ordre de gain K et de constante de temps τ : $H(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}$

On a alors : $G_{db}(\omega) = 20.\log K - 10.\log (1 + \tau^2.\omega^2)$ et : $\varphi(\omega) = -\arctan(\tau.\omega)$

La structure du diagramme de Bode est alors la suivante :

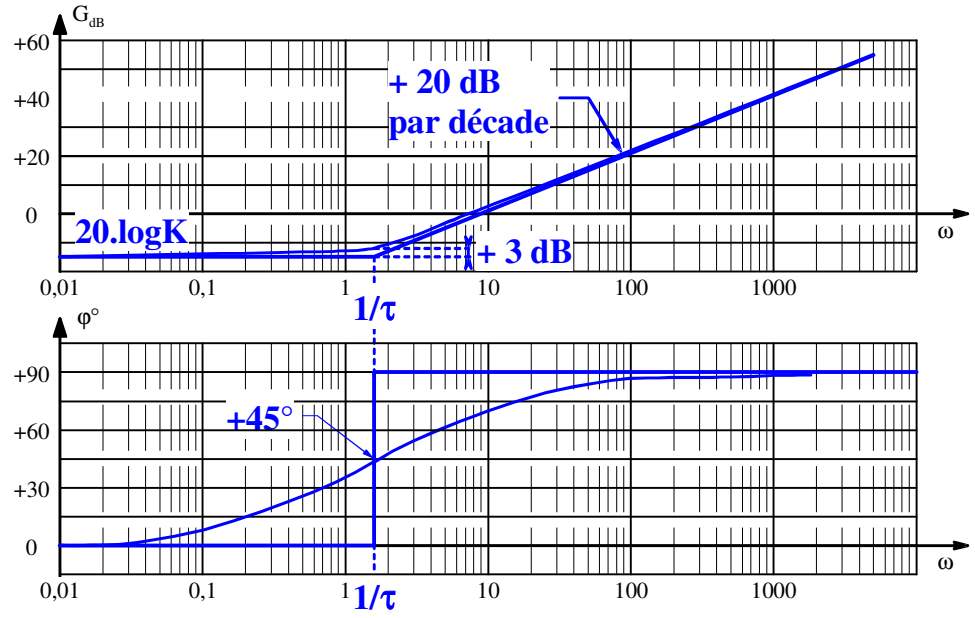


4- Diagrammes d'une fonction de rang 1

Rang 1 de gain K et de constante de temps τ : $H(p) = K.(1 + \tau.p)$

On a alors : $G_{db}(\omega) = 20.\log K + 10.\log (1 + \tau^2.\omega^2)$ et : $\varphi(\omega) = + \arctan (\tau.\omega)$

La structure du diagramme de Bode est alors la suivante :



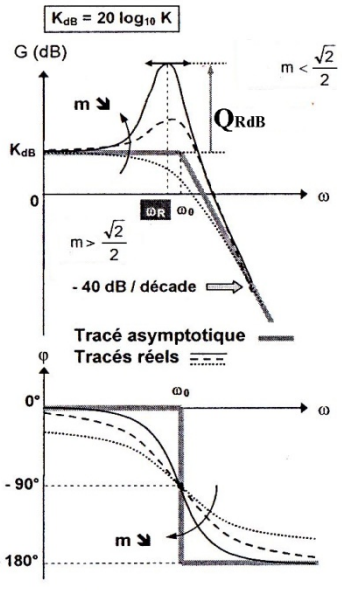
6- Diagrammes de Bode d'un second ordre

Fonction de transfert d'un premier ordre de gain K et de facteur d'amortissement ξ et de pulsation propre non amortie ω_0 : $H(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2.\xi}{\omega_0}.p + \dfrac{1}{\omega_0^2}.p^2}$ On a alors :

$$G_{dB}(\omega) = 20 . \log K - 10 . \log \left((1 - u^2)^2 + 4.\xi^2.u^2 \right) \quad \text{avec :} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

et : $\varphi(\omega) = - \arctan \left(\dfrac{2.\xi.u}{1 - u^2} \right)$ pour u < 1 $\varphi(\omega) = - 180° - \arctan \left(\dfrac{2.\xi.u}{1 - u^2} \right)$ pour u > 1

La structure du diagramme asymptotique de Bode est la même quelque soit la valeur de ξ, mais le diagramme lui-même dépend de la valeur de ξ :



Dans le cas où ξ > 0,707

La courbe de gain est sous les asymptotes et est continument décroissante.

Dans le cas où ξ < 0,5

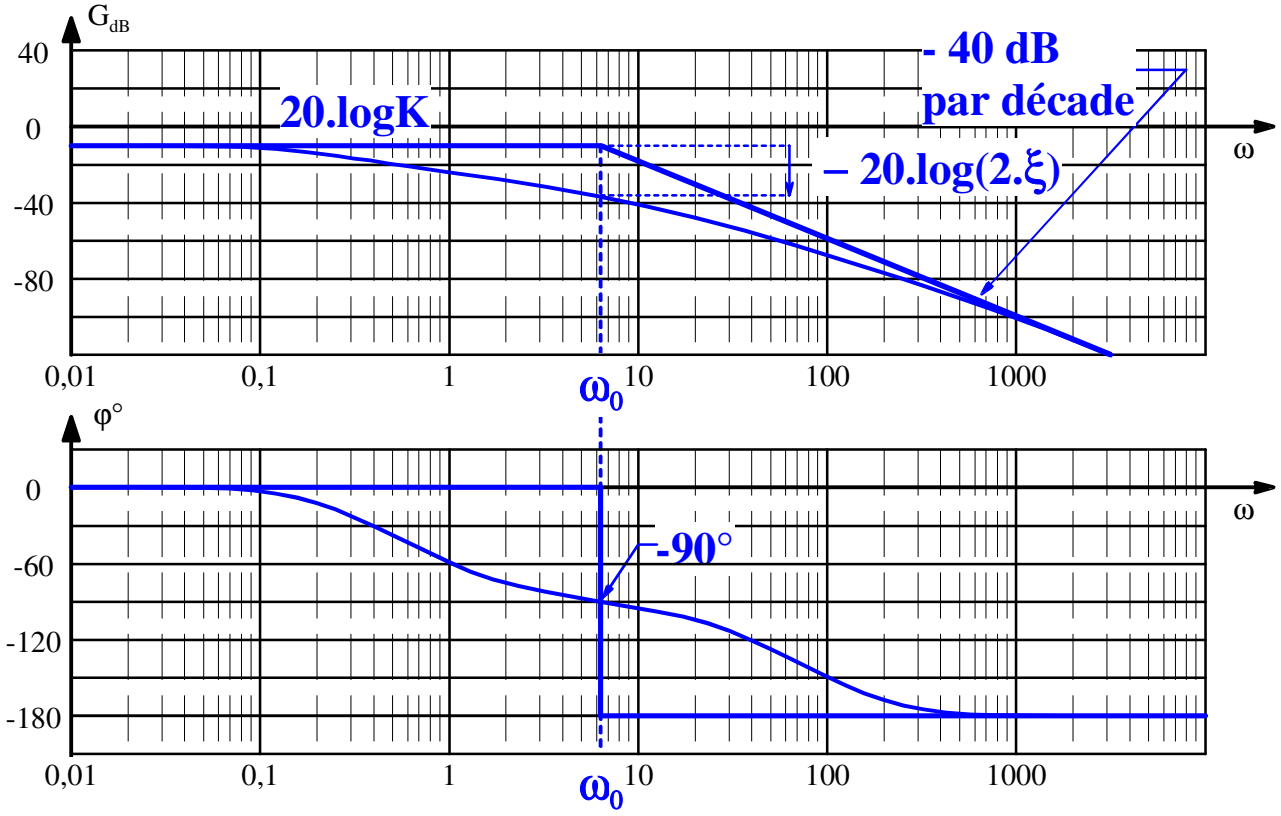
La courbe de gain est au dessus des asymptotes et on a un maximum pour le gain.

On appelle ce phénomène la résonnance du système.

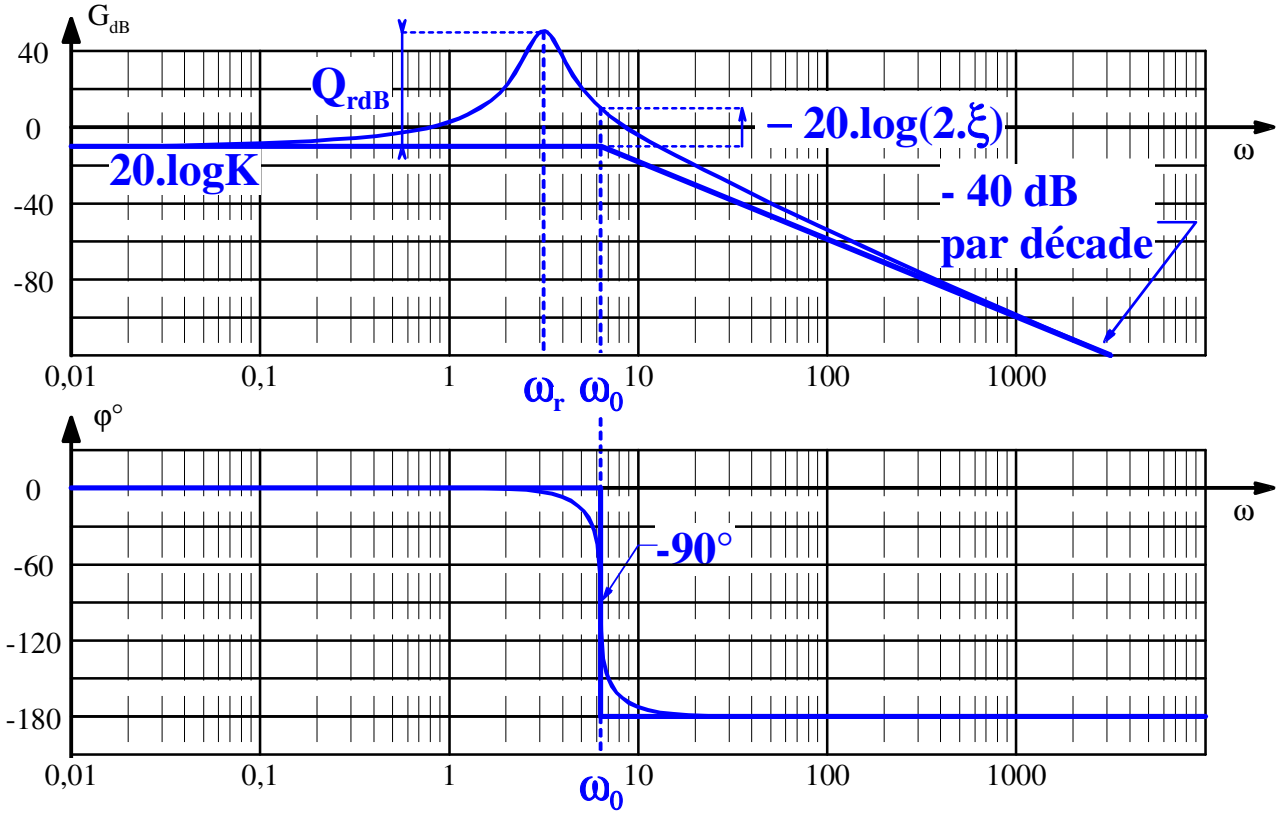
Dans le cas où 0,5 < ξ < 0,707

On a également un phénomène de résonnance mais au voisinage de la pulsation propre ω_0 la courbe est sous les asymptotes.

Cas où ξ > 0,707



Cas où ξ < 0,5



Quelque soit la valeur de ξ : $G_{dB}(\omega_0) = 20.\log K - 20.\log(2.\xi)$

Si ξ < 0,707 :

$\omega_r = \omega_0.\sqrt{1-2.\xi^2}$ et: $Q_{rdB} = G_{dB}(\omega_r) - 20.\log K = -20.\log\left(2.\xi.\sqrt{1-\xi^2}\right)$

7- Diagrammes de Bode d'un premier ordre généralisé

Premier ordre généralisé de gain K, de constante de temps τ et de facteur c (parfois noté a)

$$H(p) = K \cdot \frac{1 + c.\tau.p}{1 + \tau.p}$$

On a alors : $G_{db}(\omega) = 20.\log K - 10.\log (1 + \tau^2.\omega^2) + 10.\log(1 + c^2.\tau^2.\omega^2)$

et : $\varphi(\omega) = \arctan(c.\tau.\omega) - \arctan(\tau.\omega)$

Caractéristiques de la courbe de phase

Si : $C > 1$ alors $\forall\ \omega > 0$: $\varphi(\omega) > 0$ Si : $C < 1$ alors $\forall\ \omega > 0$: $\varphi(\omega) < 0$

Pour : $\omega \to 0$ $\varphi(\omega) \to 0°$ Pour : $\omega \to \infty$ $\varphi(\omega) \to 0°$

La courbe de phase comporte un extrémum (maxi ou mini) pour la pulsation : $\omega_M = \frac{1}{\tau.\sqrt{c}}$

Cet extrémum est de : $\varphi(\omega_M) = \varphi_M = \arcsin \frac{c - 1}{c + 1}$ Soit : $c = \frac{1 + \sin \varphi_M}{1 - \sin \varphi_M}$

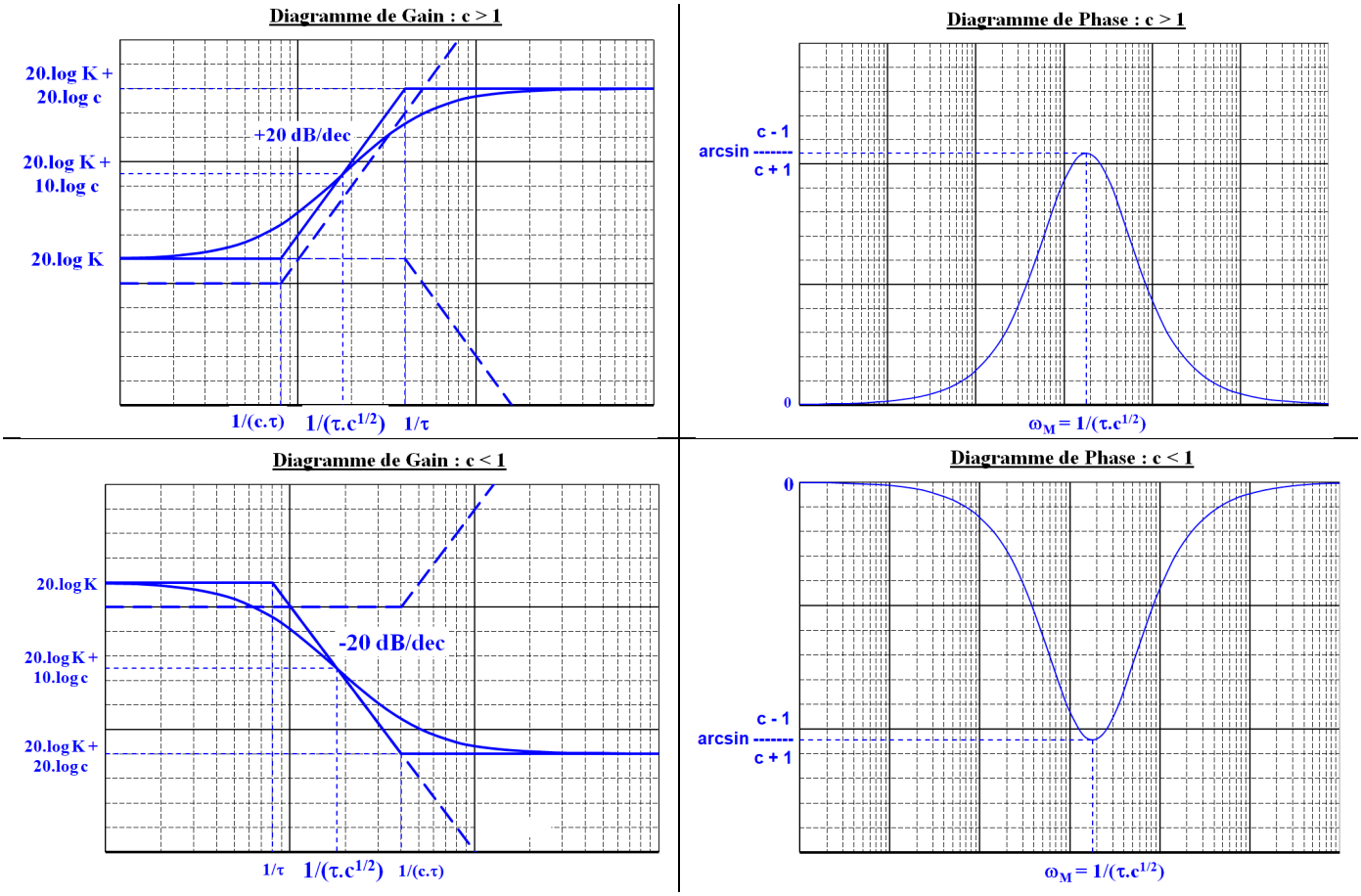
Caractéristiques de la courbe de gain

Pour : $\omega \to 0$ $G_{dB}(\omega) \to 20.\log K$

Pour : $\omega \to \infty$ $G_{dB}(\omega) \to 20.\log K + 20.\log c$

Pour : $\omega = \omega_M = \frac{1}{\tau.\sqrt{c}}$ $G_{dB}(\omega) = 20.\log K + 10.\log c$

La structure du diagramme de Bode est alors la suivante :



5- Méthodologie pour l'identification fréquentielle

Pour un système linéaire la fonction de transfert est de la forme : $\mathbf{H(p) = \frac{1}{p^{\alpha}} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}}$

Où : ☞ **α est la classe de la fonction de transfert**

☞ **N(p) est un polynôme en p de degré n_N avec un terme constant non nul**

☞ **D(p) est un polynôme en p de degré n_D avec un terme constant non nul**

Deux cas de figure sont possibles :

☞ Une modélisation du système a permis d'obtenir la forme de la fonction de transfert. C'est-à-dire que α, n_N et n_D sont connus. Reste alors à identifier les caractéristiques des polynômes N(p) et D(p).

☞ On ne connait pas la forme de la fonction de transfert. Il faut donc au préalable déterminer α, n_N et n_D puis ensuite identifier les caractéristiques des polynômes N(p) et D(p).

5.1- Détermination de la forme de la fonction de transfert.

☞ On trace les asymptotes des courbes de gain et de phase au voisinage de 0 et ∞. Puis on en déduit les pentes γ_0 et γ_∞ (en dB/dec) des asymptotes à la courbe de gain et/ou les ordonnées φ_0 et φ_∞ (en degré) des asymptotes à la courbe de phase.

☞ γ_0 et/ou φ_0 permettent de déterminer la classe α de la fonction de transfert : $\left| \begin{array}{l} -20.\alpha = \gamma_0 \\ -90.\alpha = \varphi_0 \end{array} \right.$

☞ γ_∞ et/ou φ_∞ permettent de déterminer la différence de degré entre les polynômes N(p) et D(p) :

$$-20.(\alpha + n_D - n_N) = \gamma_\infty \qquad -90.(\alpha + n_D - n_N) = \varphi_\infty$$

☞ On observe la variation des courbes de gain et de phase :

⇒ Si la courbe de gain présente un phénomène de résonnance et ou la courbe de phase varie brutalement d'environ – 180°, le dénominateur D(p) est probablement de degré 2 (m < 0,707). On en déduit alors le degré du numérateur N(p).

⇒ Si la courbe de gain ne présente pas de phénomène de résonnance il peut être de degré 1 ou 2 (si m > 0,707). Dans ce cas il est utile de regarder la variation de la courbe de phase. Si celle-ci augmente entre 0 et ∞ (Si elle n'est pas décroissante de manière monotone) alors il est probable que le numérateur soit de degré 1. On en déduit alors le degré du dénominateur D(p).

Remarque : Ces deux dernières règles ne sont pas des règles absolues mais elles sont d'autant mieux vérifiées que les valeurs des pulsations propre (ω_0) et inverse des constantes de temps ($1/\tau$) sont différentes les unes des autres.

5.2- Détermination des constantes du numérateur et du dénominateur.

☞ On commence par déterminer les différentes pulsations caractéristiques ($1/\tau$ et/ou ω_0) du numérateur N(p) et du dénominateur D(p). Pour cela on regarde :

⇒ Les abscisses des intersections des différentes asymptotes à la courbe de gain

⇒ Les abscisses des points de la courbe de phase dont les ordonnées prennent des valeurs caractéristiques telles que : + 45°, 0°, – 45°, – 90°, – 135°, etc…

⇒ Ces abscisses permettent de déterminer les pulsations caractéristiques : $1/\tau$ et/ou ω_0.

Remarque : les abscisses obtenues sur les courbes de gain et de phases correspondent d'autant mieux que les valeurs des pulsations propre (ω_0) et inverse des constantes de temps ($1/\tau$) sont différentes les unes des autres.

☞ On mesure ensuite la valeur du gain à la pulsation ω_0 ou la valeur du facteur de résonnance Q_{rdB} pour en déduire la valeur du facteur d'amortissement m (z ou ξ).

6- Marges de stabilité

6.1- Intérêt des marges de stabilité

Un asservissement est stable si la réponse à un échelon ou une impulsion converge vers une constante. L'instabilité d'un système peut conduire à de graves dommages, jusqu'à la destruction totale du système. Particulièrement si les niveaux de saturation des différents sous systèmes sont élevés.

Une des performances fondamentale des asservissements est donc la stabilité. Or l'analyse fréquentielle de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) permet de quantifier la stabilité de la Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) au travers des valeurs des marges de stabilité.

6.2- Définition des marges de phase et de gain

Les marges de stabilité de la FTBF sont définies sur la FTBO.

6.2.1- Marge de gain

La marge de gain est l'opposé du gain dynamique (en dB) à une fréquence $\omega_{-180°}$ pour laquelle le déphasage est de – 180°.

6.2.2- Marge de phase

La marge de phase est la différence entre la phase en degré et – 180° à une pulsation ω_{0dB} pour laquelle le gain est nul.

6.2.2- Marges de stabilité et diagrammes de Bode

Ces marges de gain et de phase peuvent donc être lues sur les diagrammes de Bode de la FTBO.

La marge de Gain :

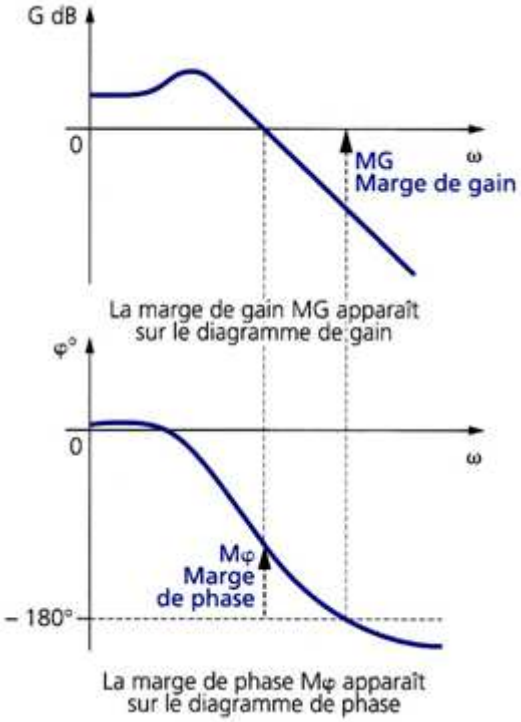
$$M_G = - G_{dBBO}(\omega_{-180°})$$

Pour : $\varphi_{BO}(\omega_{-180°}) = -180°$

La marge de phase :

$$M_\varphi = 180° + \varphi_{BO}(\omega_{0dB})$$

Pour : $G_{dBBO}(\omega_{0dB}) = 0\ dB$



Remarque :

Plus ces marges sont importantes plus le système est stable. Pour un système instable Les marges de stabilité de la FTBO sont négatives.

6.3- Cas particulier des fonctions de transfert du 1ier et du 2nd ordre

Pour une FTBO du 1ier ou du second ordre conduit à une FTBF du 1ier ou du 2nd ordre.

Pour une FTBO du premier ordre : $M_\varphi > 90°$ $M_G = \infty$

Pour une FTBO du second ordre : $M_\varphi > 0°$ $M_G = \infty$

Les asservissements dont la FTBF est du 1ier ou du 2nd ordre sont donc stables.

Si tous les coefficients du polynôme sont de même signe.