

Introduction à la mécanique quantique

La mécanique quantique est née des contradictions entre les prévisions théoriques et les résultats expérimentaux.

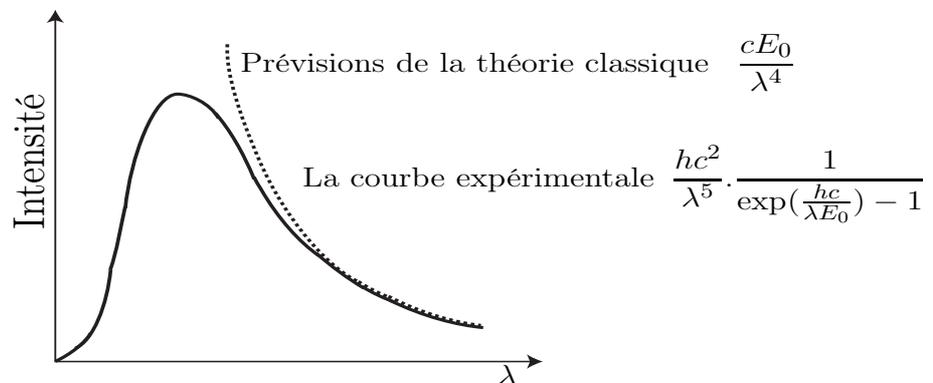
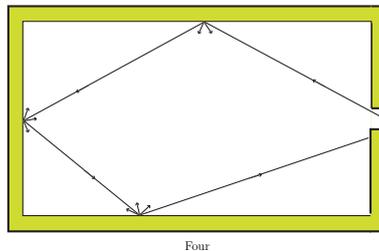
Etat de connaissance préquantique (Jusqu'à ~ 1900) :

- ✓ mécanique newtonienne : explique mouvements des planètes et des astres, phénomènes des marées terrestres, ...
- ✓ électromagnétisme formulé par la théorie de Maxwell : a étudié l'ensemble des phénomènes liés à l'électricité et le magnétisme.
- ✓ l'optique a connu deux théories pour la lumière :
 - théorie corpusculaire selon laquelle la lumière est constituée par un ensemble de corpuscules matériels, elle a été utilisée pour expliquer la propagation, la réflexion, la réfraction, mais les expériences sur les interférences et la diffraction ont montré ses limites.
 - théorie ondulatoire qui modélise la lumière comme une onde électromagnétique, elle a expliqué la propagation, la réflexion, la réfraction, la diffraction, les interférences,...

1 Evolution de la description de la lumière

1.1 Description corpusculaire

1.1.1 Rayonnement thermique d'un corps noir



En physique, un corps noir désigne un objet idéal dont le spectre électromagnétique ne dépend que de sa température. Il est totalement absorbant à toute radiation électromagnétique. Le nom corps noir a été introduit par le physicien GUSTAV KIRCHHOFF en 1860.

C'est la théorie quantique qui prédit la forme correcte de la courbes effectivement observée.

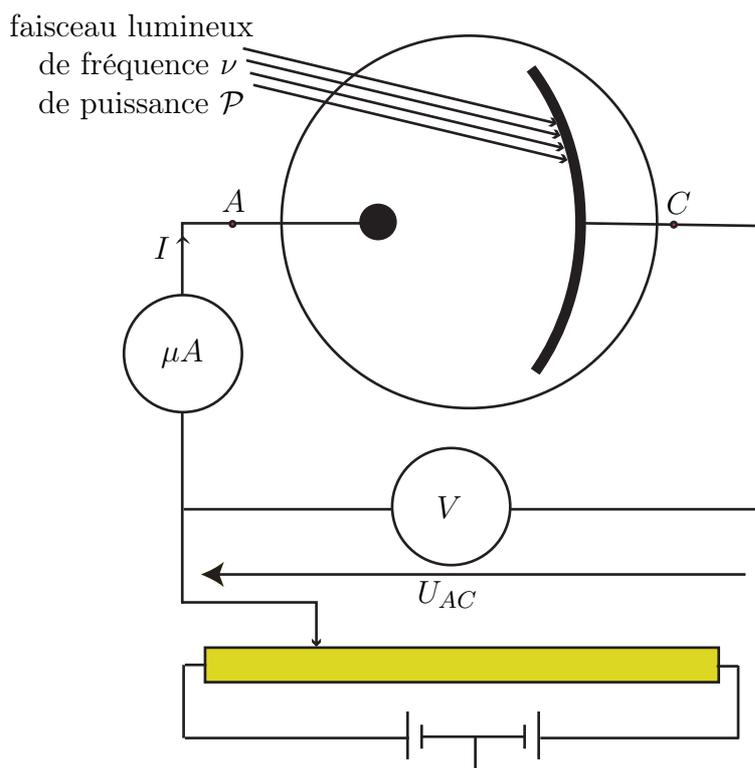
Hypothèse de Planck : Les échanges d'énergie entre la matière et le rayonnement sont quantifiés. Ils se font par échange d'un nombre fini de quantum $h\nu$ ($E_n = nh\nu$, n entier naturel) où h est la constante de Planck.

En 1900 Planck retrouve théoriquement la loi expérimentale.

1.1.2 L'effet photo électrique

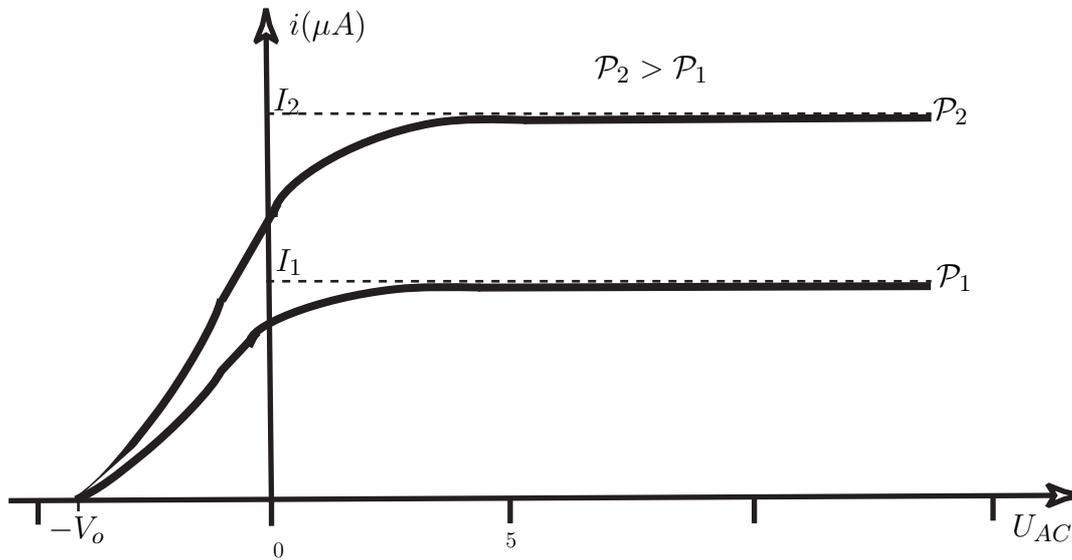
✓ L'effet photoélectrique a été découvert par HEINRICH HERTZ lors de ses recherches sur les ondes électromagnétiques en 1887. Peu après, d'autres physiciens (notamment Hallwachs) montrent, très clairement qu'une plaque de Zinc soumise à des rayons UV se charge positivement.

✓ Entre 1899 et 1902, Lenard (grâce à l'expérience décrite ci-dessous) observe que l'énergie cinétique des électrons individuels émis par effet photoélectrique augmente avec la fréquence de la lumière utilisée (effet à seuil) et indépendante de la puissance lumineuse, ce qui est en contradiction avec la théorie ondulatoire de la lumière (Maxwell) qui prédirait que l'énergie des électrons serait proportionnelle à l'intensité de la lumière.



Principe de l'expérience de Lenard et grandeurs mesurées :

On place deux électrodes métalliques face à face dans un tube à vide. Sur une des deux électrodes, on envoie de la lumière, de fréquence et d'intensité réglable.



Résultats expérimentaux :

✓ Pour un métal donné, il existe une fréquence minimale (ou fréquence seuil, notée ν_s) de la lumière en dessous de laquelle aucun électron n'est émis par la plaque.

Au dessus de la fréquence seuil, le nombre d'électrons arrachés sera proportionnel à l'intensité de la lumière.

✓ Si $U_{AC} > 0$ pour une valeur suffisamment élevée de U_{AC} , tous les photoélectrons émis atteignent l'anode, et le courant I atteint une valeur maximale. Si on augmente davantage U_{AC} le courant demeure constant.

Cependant, la valeur maximale du courant est proportionnelle à l'intensité lumineuse \mathcal{P} .

✓ Si $U_{AC} < 0$ Seulement les e^- avec une énergie cinétique initiale $E_c = \frac{1}{2}mv^2 > |eU_{AC}|$ atteignent l'anode. Si $U_{AC} < -V_0$ aucun électron n'atteint l'anode.

Résultats essentiels :

- *En dessous de la fréquence seuil ($\nu < \nu_s$), quelle que soit l'intensité de la lumière utilisée, aucun électron ne sera arraché.*
- *Le potentiel d'arrêt V_0 est indépendant de l'intensité lumineuse.*

Limites de la théorie classique : la théorie classique ne peut pas expliquer l'émission instantanée, la fréquence seuil et pourquoi le potentiel d'arrêt V_0 est indépendant de l'intensité lumineuse.

Explication quantique (EINSTEIN 1905) :

En se basant sur l'idée de quantifier l'énergie de PLANCK, ALBERT EINSTEIN formulera en 1905 l'hypothèse des échanges d'énergie quantifiés entre le rayonnement et la matière :

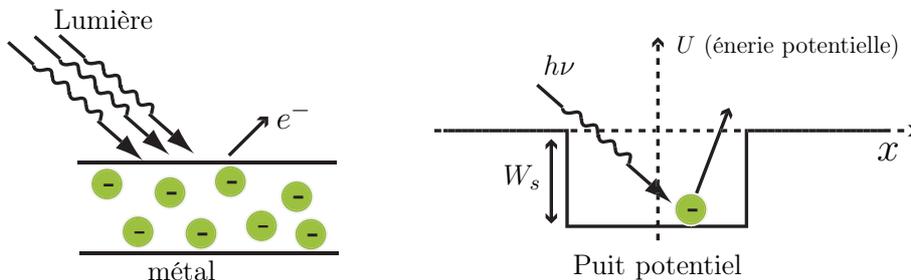
" Une radiation lumineuse de fréquence ν se compose de particules indivisibles (quanta d'énergie $h\nu$ localisées en des points de l'espace; elle ne peut être émise ou absorbée que d'un coup ".

Ce quantum d'énergie (baptisé " photon " par GILBERT LEWIS en 1926) est caractérisé par les

relations de PLANCK :

- son énergie $E = h\nu = \hbar\omega$ avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ appelée "h bar" : $h = 6.63.10^{-34} J.s$; $\hbar \simeq 1,05.10^{-34} J.s$
- son impulsion $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ avec $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$ le vecteur d'onde de la lumière se propageant dans le sens de \vec{u} .

soit W_s le travail d'extraction nécessaire pour arracher un électron du métal considéré.



1. Écrire l'équation photoélectrique traduisant le caractère élastique entre un photon et un électron :

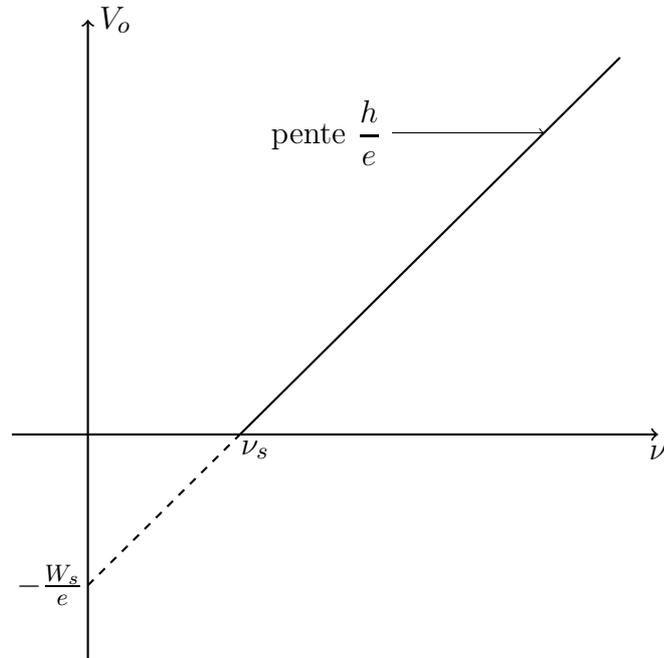
.....

2. En déduire l'existence de la fréquence seuil ν_s en dessous de laquelle l'effet photoélectrique ne se produit pas.

.....

3. En appliquant le TEC à un électron, Exprimer le potentiel d'arrêt.

.....

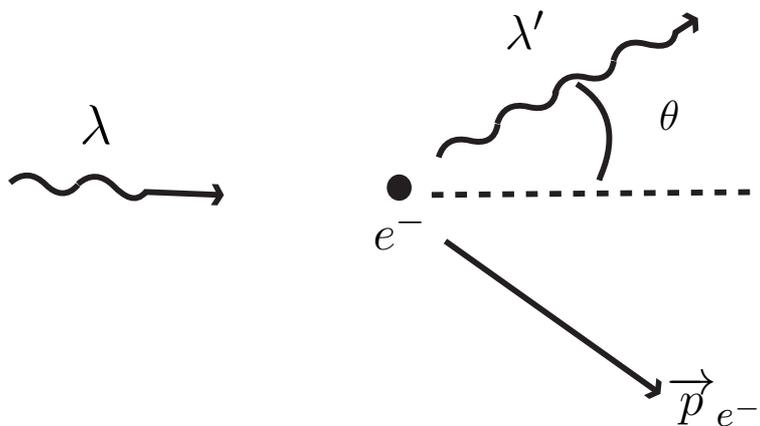


Ordre de grandeur de travaux d'extraction W_s (Work functions) pour quelques métaux

Element	Cesium	Uranium	Aluminium	Fer	Or (Au)	Platine
W_s (eV)	2,1	3,6	4,08	4,5	5,1	6,35

1.1.3 L'effet COMPTON : la confirmation de photon

En 1923 le physicien américain ARTHUR COMPTON réalisa une expérience sur la diffusion des rayons X de longueur d'onde $\lambda = 0,071 \text{ nm}$ par une feuille en carbone graphite. Il observa que certains rayons X diffusés par la cible avaient une longueur d'onde λ' supérieure à λ . Il montra que λ' dépenda de la direction des rayons diffusés mais qu'elle était indépendante de la nature du matériau utilisé pour la feuille. $\gamma + e^- \rightarrow \gamma' + e^-$



$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

L'effet COMPTON est interprété comme le résultat de la collision entre un électron et une particule (photon). Cette particule associée au rayonnement électromagnétique est appelée photon qui est caractérisé par

* une masse nulle,

* une vitesse de déplacement dans le vide, égale à $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$,

* une énergie $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$

* et une quantité de mouvement (ou impulsion) $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ de module $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$.

Ces relations permettent de relier les grandeurs corpusculaires (E, \vec{p}) et ondulatoires (ν, \vec{k}) :
la lumière est alors une onde et particules quantiques, d'où la dualité onde corpuscule

1.2 Description ondulatoire - Ondes de la matière

1.2.1 Pour la lumière

Dans les expériences d'optique (réflexion, réfraction, interférences, diffraction, ..), qui met en jeu un très grand nombre de photon, c'est généralement l'aspect ondulatoire qui apparaît.

Ordre de grandeur : pour un LASER $H_e - N_e$ de puissance $\mathcal{P} = 1,0 \text{ W}$ de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ émet pendant la durée Δt un nombre de photon égale $N = \frac{\mathcal{P}\Delta t}{(\frac{hc}{\lambda})}$.

soit $N = 3.10^{15}$ photons par seconde.

1.2.2 L'ondes de la matière : Dualité onde - particule

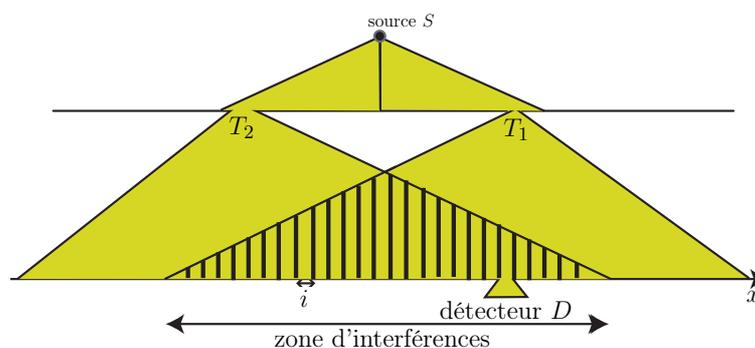
En 1923 Louis de Broglie généralisa la dualité onde corpuscule à la matière : A toute particule matérielle de masse m et d'impulsion $p = mv$, on peut associer une onde de vecteur d'onde : $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$ donc de longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{p}$ appelée longueur d'onde de Broglie de la matière.

1.3 Première vérification expérimentale

1.3.1 L'expérience à trous de Young

L'élaboration des sources de photon unique, qui peuvent produire des photons un à un, permet de réaliser des expériences qui illustrent le double aspect, corpusculaire et ondulatoire, de la lumière.

1.3.1.1 - Dispositif expérimental



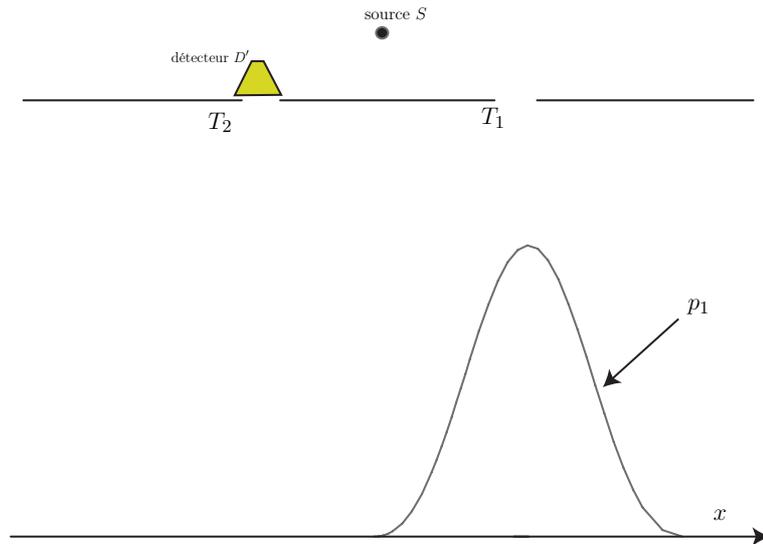
1.3.1.2 - Expériences

On utilise une source de photon unique, les photons arrivent un par un sur le diaphragme.

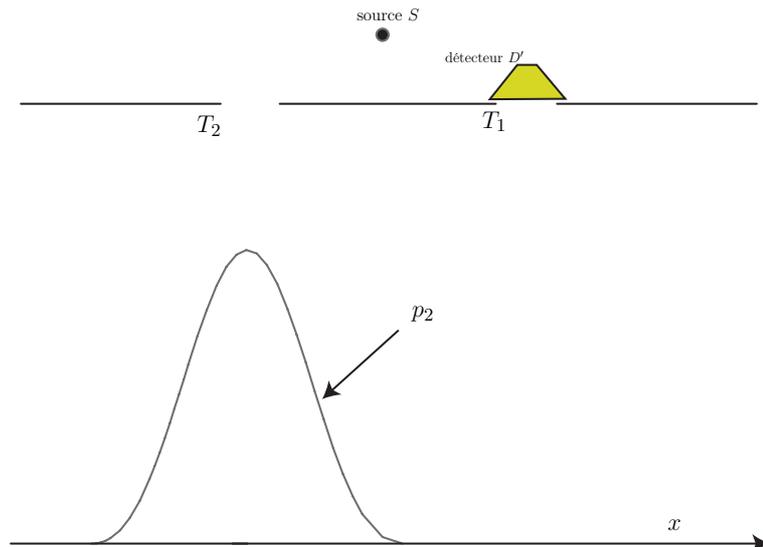
Soient :

- N_o le nombre de photons qui arrivent à l'écran par unité de temps.
- N le nombre de photons détectés en $M(x)$ par le détecteur.
- $p(x) = \frac{N(x)}{N_o}$ la probabilité de détection de photon en un point $M(x)$.

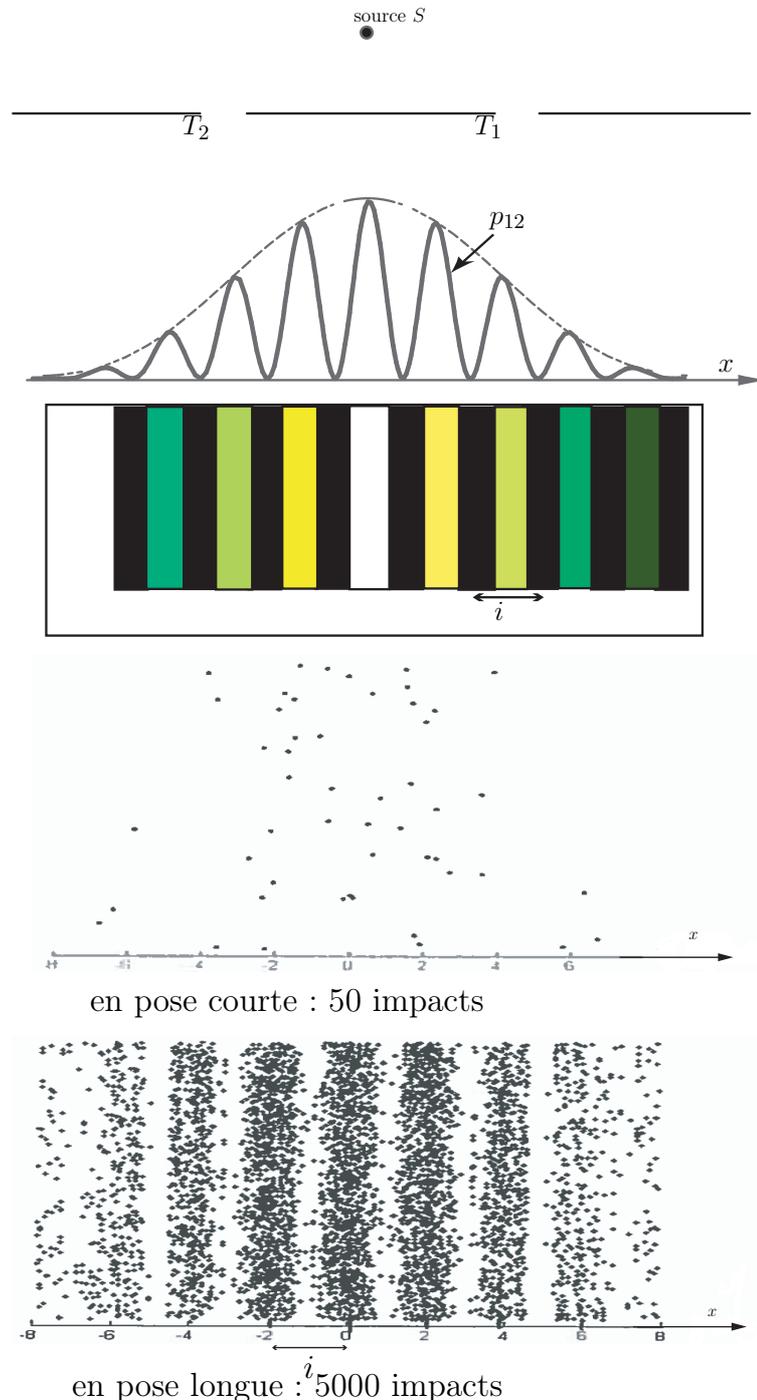
1. **Cas 1** où on place un détecteur D' devant le trou T_2 , le trou T_1 est ouvert : (T_2 fermé et T_1 ouvert)



2. **Cas 2** où on place un détecteur D' devant le trou T_1 , le trou T_2 est ouvert : (T_2 ouvert et T_1 fermé)



3. **Cas 3** où les deux trous T_2 et T_1 sont ouverts



(a) - **Prévisions théoriques**

* *Analyse ondulatoire* : Lorsque les photons arrivent un par un sur le diaphragme, les franges d'interférences persistent ($I_{12} \neq I_1 + I_2$) mais leur intensité est plus faible : $I_{12} = cte |\psi_1 + \psi_2|^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi \frac{x}{i})$, i étant l'interfrange.

* *Analyse corpusculaire classique* (considérant le photon comme une particule classique) : la particule passe ou bien par T_1 ou bien par T_2 donc pas d'interaction et par conséquent pas d'interférences .

En termes de probabilité, le passage exclusif est traduit par l'expression $p_{12} = p_1 + p_2$: prévision en contradiction avec l'expérimental ($p_{12} \neq p_1 + p_2$)

(b) - **Résultat expérimental**

Expérience réalisée par Jeffrey et Taylor : il ya interférences ($p_{12} \neq p_1 + p_2$), inexplicable

par le modèle corpusculaire classique : Le photon n'est pas une corpuscule classique, mais c'est une particule quantique dont le comportement ne peut être que probabiliste.

(c) - **Remise en cause de la notion de trajectoire**

✓ Les expériences cas 1 et cas 2 et cas 3 montrent qu'il est impossible d'avoir la figure d'interférences et de connaître la trajectoire des photons. La trajectoire n'a pas de sens pour une particule quantique. Le photon a passé par les deux trous !

✓ Lorsqu'on l'on réalise une mesure sur un système microscopique, on le perturbe de manière fondamentale.

✓ La théorie ondulatoire ne permet pas de d'expliquer les aspects probabilistes en pose courte.

1.3.1.3 - Description probabiliste

Lorsqu' on observe les interférences , la probabilité d'impact vérifie $p_{12} \neq p_1 + p_2$, résultat analogue à la condition d'interférences $I_{12} \neq I_1 + I_2$. Pour retrouver les résultats de la théorie ondulatoire $I_{12} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi \frac{x}{\lambda})$, il suffit d'admettre que la probabilité est proportionnelle à l'intensité ($p_1 = cte.I_1, p_2 = cte.I_2, p_{12} = cte.I_{12} = cte |\psi_1 + \psi_2|^2$)

1.3.1.4 - Notion de fonction d'onde et probabilité de détection

L'état quantique d'une particule quantique est décrit par une fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$ de valeurs dans \mathbb{C}

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (M, t) &\mapsto \psi(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

ψ représente l'amplitude de probabilité de présence de la particule quantique en $M(\vec{r}, t)$ à l'instant t .

La probabilité de trouver la particule dans un volume dV centré en M est $d\mathcal{P} = |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV$

Le rôle de la théorie quantique est de décrire le comportement et donner les lois d'évolution des constituants microscopiques de la matière. Plus précisément, les phénomènes quantiques (que sont essentiellement des phénomènes d'interférences) qui se manifestent pour des objets de petite taille Δx et/ou de petites impulsions Δp telles que $\Delta x \Delta p \simeq h$.

La théorie quantique est donc essentielle en physique des particules, nucléaire, physique atomique, moléculaire et physique du solide. Par ailleurs, comme les phénomènes macroscopiques résultent du comportement collectifs des objets microscopiques, la théorie quantique a des conséquences indirectes mais essentielles à l'échelle macroscopique.

La particule être quelque part dans l'espace, cette contrainte impose la condition de normalisation :

$$\int_{\text{espace}} d\mathcal{P} = \iiint_{\text{espace}} |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1$$

Remarque :

- La notion quantique de probabilité de présence remplace la notion classique de la trajectoire.
- La probabilité de trouver une particule entre x et $x + dx$ est $d\mathcal{P} = |\psi|^2 dx$

1.3.1.5. Interprétation de l'expérience à trous de Young

soient :

$\psi_1(x, t)$ la fonction d'onde de la particule quantique (photon) dans la situation 1 : trous T_1 ouvert et T_2 fermé : $p_1 = a |\psi_1|^2$

$\psi_2(x, t)$ la fonction d'onde de la particule quantique (photon) dans la situation 2 : trous T_1 fermé et T_2 ouvert : $p_2 = a |\psi_2|^2$

Lorsque les trous T_1 et T_2 sont ouverts et puisque le passage de la particule quantique n'est pas exclusif alors $\psi_{12}(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t)$.

$$|\psi_{12}|^2 = \psi_{12}\psi_{12}^* = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2 \Rightarrow p_{12} \neq p_1 + p_2$$

$\psi_1\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2$ et $p_{12} - (p_1 + p_2)$ sont les termes d'interférences

2 L'inégalité de HEISENBERG

2.1 Indetermination quantique

La mesure d'une grandeur X sur un système quantique donne un résultat aléatoire.

Soit ΔX l'écart quadratique moyen : $\Delta X = \sqrt{\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$. ΔX nous renseigne sur la dispersion des résultats possibles pour la mesure de X .

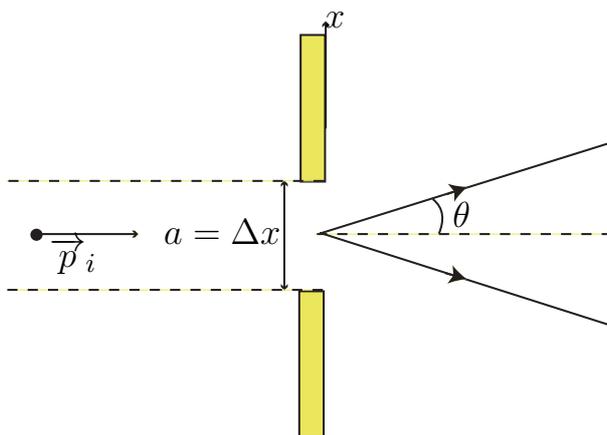
ΔX est appelé l'**indetermination quantique** de X .

NB : ne pas confondre l'**indetermination quantique** ΔX avec l'incertitude sur la mesure :

l'indetermination quantique est indépendant de l'instrument

2.2 L'inégalité de HEISENBERG

2.2.1 Introduction sur un exemple : Diffraction d'une particule quantique par une fente fine de largeur a



La demi-largeur angulaire de la tache de diffraction correspond à la demi-angle d'ouverture du faisceau diffracté θ est telque $\boxed{\sin \theta = \frac{\lambda}{a}}$.

La mesure de coordonné x de la particule quantique immédiatement après la fente est comprise entre $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$: $\Delta x = a$ (localisation de la particule quantique).

La mesure de la composante p_x de la quantité de mouvement de la particule immédiatement après la fente : $p_x \in [-p \sin \theta, p \sin \theta]$: $\Delta p_x \simeq p \sin \theta = p \frac{\lambda}{a}$ avec $p = \frac{h}{\lambda}$ et $a = \Delta x$

on obtient $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \sin \theta \simeq \frac{h}{\Delta x} \Rightarrow \boxed{\Delta x \Delta p_x \simeq h}$

En localisant la particule quantique avec précision à l'aide d'une fente, on introduit une dispersion de la quantité de mouvement.

2.2.2 Généralisation : Principe de l'indetermination de Heisenberg

a- L'indetermination position-quantité de mouvement

les mesures de position x et de la quantité de mouvement p_x selon Ox sont affectées de l'**indetermination quantique** Δx et Δp_x tels que :

plus précisément $\Delta x \Delta p_x$

$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,056.10^{-34} J.s$ est la constante de PLANCK réduite.

Cette inégalité est une contrainte fondamentale.

b- Inégalité temps - énergie

Soit τ la durée caractéristique d'évolution d'un système et ΔE l'amplitude des fluctuations statistiques de l'énergie du système autour de sa valeur moyenne : on a $\tau \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$

Remarque : Pour un état stationnaire $\tau \rightarrow \infty$ et $\Delta E = 0$: l'**énergie associée à un état stationnaire est parfaitement définie.**

2.3 Limite de validité : limite classique - limite quantique

2.3.1 Action caractéristique d'un système

On pour un photon $\hbar = \frac{E}{\omega} = \frac{\|\vec{p}\|}{\|\vec{k}\|}$. La dimension de la constante de planck réduite "hbar"

$\hbar \simeq 10^{-34} J.s$ est $[\hbar] = [Energie][Temps] = [p][distance] = ML^2T^{-1}$

$[\hbar^2] = [Energie]^2 T^2 = [Energie] \times [Energie] \times T^2 = [Energie] ML^2 \Rightarrow [\hbar] = \sqrt{[Energie][Masse]} L$

soit $[\hbar] = [Energie][Temps] = [p][distance] = \sqrt{[Energie][Masse]} L = ML^2T^{-1}$

Pour comparer les théories classique et quantique, on définit une grandeur appelée action caractéristique d'un système A ayant la même dimension que \hbar :

$A = Energie \times durée = quantité\ de\ mouvement \times distance = \sqrt{Energie \times Masse} \times distance$

- $A \gg \hbar$ correspond à la limite classique
- $A \simeq \hbar$ correspond à la limite quantique

2.3.2 Applications

a- Diffraction des électrons

En 1927, les américains E.J.DAVISSON et L.GERMER ont réalisé la diffraction d'un faisceau d'électrons par un monocristal de Nickel. $m_{e^-} = 9,1110^{-31} \text{ kg}$

La distance moyenne entre atomes est $r = 0,1 \text{ nm}$

L'énergie cinétique des électrons est $E_c = 54 \text{ eV} = 8,610^{-18} \text{ J}$

1. Calculer l'action A . Conclure.

.....
.....
.....

2. Déterminer la longueur d'onde de BROGLIE λ_B associée aux électrons.

.....

b- Répondre aux mêmes questions dans les cas suivants :

- * Une personne de masse $m = 60 \text{ kg}$, de taille $1,6 \text{ m}$ et se déplaçant à une vitesse $v = 1 \text{ m.s}^{-1}$

.....
.....
.....
.....

- * L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène est $E = EI = 13,6 \text{ eV}$, son spectre est caractérisé par $\lambda_{min} = 0,1 \mu\text{m}$

.....
.....

- * Un pendule simple de masse $m = 10 \text{ g}$ de longueur $l = 20 \text{ cm}$ oscille avec une période $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

.....
.....
.....
.....

3 Quantification de l'énergie d'une particule confinée

3.1 Notion de quantification

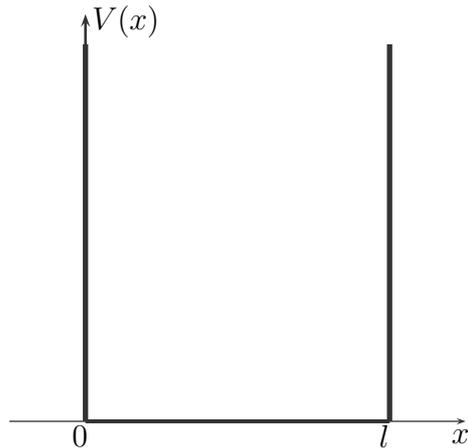
Une grandeur physique est quantifiée lorsqu'elle ne peut prendre qu'une suite de valeurs discrètes.

3.2 Particule dans un puit de potentiel infini à une dimension

3.3 Puit de potentiel infini à une dimension

Un puit de potentiel infini à une dimension est caractérisé par une énergie potentielle suivante :

- ◇ $E_p(x) = V(x) = \infty$ pour $x < 0$
- ◇ $E_p(x) = V(x) = 0$ pour $0 < x < l$
- ◇ $E_p(x) = V(x) = \infty$ pour $l < x$



Ce modèle décrit une particule se déplaçant librement entre deux « murs » infranchissables perpendiculaires à l'axe Ox et distants de l , la particule est confinée dans l'espace $0 < x < l$

3.4 Longueurs d'onde possibles pour la particule

On admet que la fonction d'onde est continue :

$$|\Psi(0^-)|^2 = |\Psi(0^+)|^2 = 0 \text{ et } |\Psi(l^-)|^2 = |\Psi(l^+)|^2 = 0$$

On a vu que lorsque l'onde est confinée dans un espace limité (comme sur la corde), elle est stationnaire. L'onde associée à la particule confinée est alors stationnaire qui présente des noeuds de vibration en $x = 0$ et $x = l$. Par analogie avec la corde fixée en ses deux extrémités, les longueurs d'onde possibles vérifient la condition de résonance $l = \dots \frac{\lambda}{2}$ soit $\lambda = \dots$

3.5 Niveaux d'énergie

L'énergie de la particule libre confinée est $E = E_c + E_p$, or dans le puit $E_p = V = 0$ donc $E = E_c = \frac{P^2}{2m}$ avec $P = \dots$ (relation de BROGLIE) et $\lambda = \frac{2l}{n}$ on obtient $P = \dots$

L'énergie de la particule dans le puit de potentiel infini est alors $E_n = \dots$

donc l'énergie de la particule dans le puit de potentiel infini est quantifiée $E_n = \frac{P^2}{2m} = n^2 \frac{h^2}{8ml^2} = n^2 E_1$,

$E_1 = \frac{h^2}{8ml^2}$ est le premier niveau d'énergie.

$E_{n+1} - E_n = (2n + 1)E_1$ dont la valeur minimale est $E_2 - E_1 = 3E_1 = \frac{3\hbar^2}{8ml^2}$, on peut contrôler la longueur d'onde émise par le choix de l .

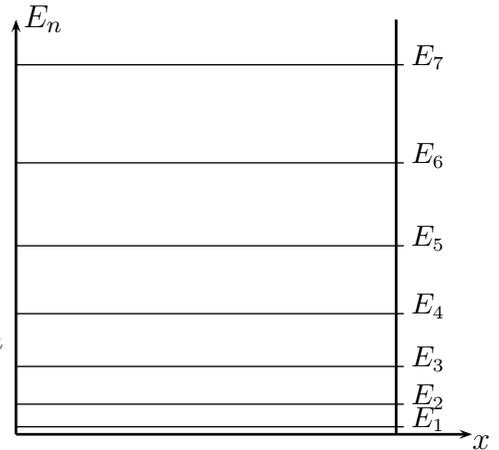
La plus petite fréquence pouvant être émise ou absorbée est ν_o

tel que $h\nu_o = E_2 - E_1 = 3E_1 \Rightarrow \nu_o = \frac{3E_1}{h}$

soit

$$\nu_o = \frac{3\hbar}{8ml^2}$$

Ordre de grandeur : dans un CD(ou DVD), un électron situé à l'intérieur de semi-conducteur *GaAs* peut être modélisé par une particule quantique de masse effective $m_{e^*} = 0,067m_e$ - situé dans un puit de potentiel dont $l = 3\text{ nm}$



$\nu_o = \frac{3\hbar}{8ml^2}$, $\lambda = \frac{c}{\nu_o}$, AN : $\nu_o = 4,510^{14}\text{ Hz}$; $\lambda = 662\text{ nm}$: lumière visible de couleur rouge.

Remarque : Lorsque $l \rightarrow 0$, $\nu_o \rightarrow 0$, $E_l \rightarrow 0$

et $(E_{n+1} - E_n) \rightarrow 0$: l'énergie E est quasiment continue.

La quantification de l'énergie provient de confinement dans une zone limitée de l'espace

4 Energie minimale d'un oscillateur harmonique

L'énergie d'un oscillateur harmonique est $E = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_o^2 x^2$,

de valeur moyenne $\langle E \rangle = \frac{\langle P_x^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_o^2 \langle x^2 \rangle$

On a l'indetermination quantique de x :

et l'indetermination quantique de P_x :

Pour un oscillateur harmonique $\langle x \rangle = \dots \Rightarrow (\Delta x)^2 = \dots$

et $\langle P_x \rangle = \dots \Rightarrow (\Delta P_x)^2 = \dots$

donc $E_{moy} = \langle E \rangle = \frac{(\Delta P_x)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_o^2 (\Delta x)^2$ avec l'inégalité de HEISENBERG

on obtient $\Delta P_x > \frac{\hbar}{2\Delta x}$ et $E_{moy} > \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega_o^2 (\Delta x)^2 = f(\Delta x)$

$f(\Delta x)$ est minimal pour l'écart type Δx tel que $\frac{df}{d(\Delta x)} = 0 \Rightarrow \frac{-\hbar^2}{4m(\Delta x)^3} + m\omega_o^2 (\Delta x) = 0$

donc $(\Delta x)^2 = \dots$ avec $E_{min} = f(\Delta x)$

on obtient $E_{min} = \dots$

L'énergie minimale d'un oscillateur harmonique est alors $E_{min} = \frac{\hbar\omega_o}{2}$

Remarque : les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique quantique sont $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_o$