Exercice 1 Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n \end{cases}$

1. Compléter la fonction suivante pour qu'elle retourne la valeur de u_n

```
def suite(n):
    u=.......
    v=.......
    i = 0
while .........:
    temp = v
    v = ..........
    u=temp
    i = i + 1
return v
```

2. Tester votre programme pour calculer u_3 à l'aide d'un tableau de suivi.
3. Donner un variant de boucle
4. Montrer que "u= $-3^{\mathtt{i}} + \frac{1}{3}7^{\mathtt{i}} + \mathtt{i} + \frac{2}{3}$ et v= $-3^{\mathtt{i+1}} + \frac{1}{3}7^{\mathtt{i+1}} + \mathtt{i} + \frac{5}{3}$" est une invariant de boucle.
5. Donner la complexité du programme.

Correction de l'exercice 1

1. Posons pour tout n, $v_n = u_{n+1}$ et $i_n = n$

On a alors le système :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \ v_0 = 1, \ i_0 = 0 \\ i_{k+1} = i_k + 1u_{k+1} = v_k \\ v_{k+1} = 10v_k - 21u_k + 12i_k \end{cases}$$

```
def suite(n):
    u=0
    v=1
    i = 0
while i<n-1:
    temp = v
    v =10*v-21*u+12*i
    u=temp
    i = i + 1
return v
```

2. Un tableau de suivi :

Variables	i¡n-1	temp	v	u	i
avant la boucle			1	0	0
1er tour	Vrai	1	10	1	1
2eme tour	Vrai	10	91	10	2
3eme tour	Faux				

La fonction renvoie 91.

3. Soit les suites associées : $\begin{cases} u_0 = 0, \ v_0 = 1, \ i_0 = 0 \\ i_{k+1} = i_k + 1u_{k+1} = v_k \\ v_{k+1} = 10v_k - 21u_k + 12i_k \end{cases}$

i_k est une suite arithmétique de raison 1 et $i_0 = 0$, donc (i_k) est une suite strictement croissante d'entiers.

Ainsi $(n - i_k)$ est une suite strictement décroissante d'entiers.

Comme, $i_k < n-1$, $n - i_k > 0$.

$(n - i_k)$ est un variant de boucle

4. Posons $\mathcal{P}_k : u_k = -3^{i_k} + \frac{1}{3}7^{i_k} + i_k + \frac{2}{3}$ et $v_k = -3^{i_k+1} + \frac{1}{3}7^{i_k+1} + i_k + \frac{5}{3}$
   - Avant la boucle: $i_0 = 0$
     Donc $-3^{i_0} + \frac{1}{3}7^{i_0} + i_0 + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0 = u_0$ et $-3^{i_0+1} + \frac{1}{3}7^{i_0+1} + i_0 + \frac{5}{3} = 1 = v_0$
   - Pendant la boucle: Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour un k donné.
     $u_{k+1} = v_k = -3^{i_k+1} + \frac{1}{3}7^{i_k+1} + i_k + \frac{5}{3}$
     Or $i_{k+1} = i_k + 1$
     Ainsi $u_{k+1} = -3^{i_{k+1}} + \frac{1}{3}7^{i_{k+1}} + i_{k+1} - 1 + \frac{5}{3} = -3^{i_{k+1}} + \frac{1}{3}7^{i_{k+1}} + i_{k+1} + \frac{2}{3}$
     De plus

$$\begin{aligned}
v_{k+1} &= 10v_k - 21u_k + 12i_k = 10\left(-3^{i_k+1} + \frac{1}{3}7^{i_k+1} + i_k + \frac{5}{3}\right) - 21\left(-3^{i_k} + \frac{1}{3}7^{i_k} + i_k + \frac{2}{3}\right) + \\
&= -3^{i_k}(30-21) + \frac{1}{3}7^{i_k}(70-21) + i_k + \frac{8}{3} = -3^{i_k+2}\frac{1}{3}7^{i_k+2} + i_k + \frac{8}{3} \\
&= -3^{i_{k+1}+1}\frac{1}{3}7^{i_{k+1}+1} + i_{k+1} - 1 + \frac{8}{3} = -3^{i_{k+1}+1}\frac{1}{3}7^{i_{k+1}+1} + i_{k+1} + \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

     $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
   - A la fin de la boucle :Pour un indice N, on a $i_N = n-1$.
     Ainsi $v_N = -3^n\frac{1}{3}7^n + n + \frac{2}{3} = u_n$

5. Le coût de l'algorithme est :

$$T(n) = 3 + \sum_{i=0}^{n-2} 12 + 2 = 5 + 12(n-1) = 12n - 7 = O(n)$$

Il y a 3 affectations avant le while, 12 opérations élémentaires pendant et les 2 opérations du test de fin de while.

La fonction est linéaire