

Dispositif Médical d'Injection

II - Modélisation de l'asservissement du volume injecté

II - 1 Actionneur thermique

Question 1.

L'actionneur peut être modélisé par un 1er ordre, de gain $K_h = \frac{60}{12} = 5 \text{ V/N}$ et de constante de temps $\tau_h = 2 \text{ ms}$ ($t_{5\%} = 3\tau_h = 6 \text{ ms}$ ou tangente à l'origine)

II - 2 Ecoulement dans le canal de l'aiguille

Question 2.

Les hypothèses pour pouvoir appliquer le théorème de Bernoulli sont :

- Le fluide est incompressible et homogène.
- Il s'écoule en régime permanent.
- Il est parfait.

Dans ce cas, le théorème de Bernoulli d'écrit :

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = cte \quad (z : \text{hauteur})$$

Les pertes de charges correspondent à une perte de pression due aux frottements du fluide dans la canalisation.

Si le canal est horizontal ($z = cte$), et le fluide visqueux, alors :

$$\Delta \left(\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) = \Delta h \quad \text{avec } \Delta h \text{ pertes de charges en m}$$

Question 3.

Le nombre de Reynolds est défini par : $Re = \frac{VL}{\nu} = \frac{\rho VL}{\eta}$ avec :

V : vitesse caractéristique du fluide en m/s

L : dimension caractéristique (m), ici le diamètre du canal

ν : viscosité cinématique du fluide (m^2/s)

ρ : masse volumique (kg/m^3), on supposera $\rho = 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$

η : viscosité dynamique (Pa.s)

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{60 \pi (200 \cdot 10^{-6})^2} = 2,65 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{2,65 \cdot 200 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3}{10^{-3}} = 530$$

Question 4.

Les pertes de charges sont : $\Delta h = \Lambda \frac{\Delta x}{2R} \frac{\langle v^2 \rangle}{2g}$

$\langle v^2 \rangle$: vitesse carrée moyenne de toutes les particules de fluide

Δx : en m/s, représente la longueur de la conduite

$$\text{AN : } \Delta h = \Lambda \frac{5 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^{-6}} \frac{2,65^2}{2,9,81} = 89,7 \Lambda$$

Remarque : la valeur de Λ n'est pas fournie

Question 5.

Le débit est : $Q = S \cdot V = S \cdot \langle v \rangle = S \frac{P(0) - P(L)}{8 \eta L} R^2$

Question 6.

La relation précédente donne : $P(0) = \frac{8 \eta L Q}{S R^2} + P(L) = \frac{8 \eta L V}{R^2} + P(L)$

avec $P(L) = P_{atm} = 10^5 \text{ Pa}$

$$\text{Soit } P(0) = \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2,65}{10^{-8}} + 10^5 = 2,06 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

II -3 Membrane de la micropompe

Question 7.

Isolons le segment i. Bilan d'actions mécaniques :

$$\{\tau_{P \rightarrow i}\} = \left\{ \begin{matrix} P\vec{y}_i \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{M_i}$$

$$\{\tau_{i-1 \rightarrow i}\} = \left\{ \begin{matrix} x_i\vec{x}_0 + y_i\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{O_i} + \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ -k_t(\theta_i - \theta_{i-1})\vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{O_i}$$

$$\{\tau_{i+1 \rightarrow i}\} = - \left\{ \begin{matrix} x_{i+1}\vec{x}_0 + y_{i+1}\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{O_{i+1}} - \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ -k_t(\theta_{i+1} - \theta_i)\vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{O_{i+1}}$$

Le théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$ donne :

- $x_i - x_{i+1} - P \sin \theta_i = 0$
- $y_i - y_{i+1} + P \cos \theta_i = 0$

Le théorème du moment statique au point O_i en projection sur $\vec{z}_0$ donne :

$$k_t(\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}) + (\overrightarrow{O_i M_i} \wedge P\vec{y}_i) \cdot \vec{z}_0 - (\overrightarrow{O_i O_{i+1}} \wedge (x_{i+1}\vec{x}_0 + y_{i+1}\vec{y}_0)) \cdot \vec{z}_0 = 0$$

Avec $\overrightarrow{O_i M_i} = \frac{L_0}{2} \vec{x}_i$ et $\overrightarrow{O_i O_{i+1}} = L_0 \vec{x}_i$

Soit :

$$\bullet \quad k_t(\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}) + P \frac{L_0}{2} + x_{i+1}L_0 \sin \theta_i - y_{i+1}L_0 \cos \theta_i = 0$$

Question 8.

Sachant que $\sin \theta_i \approx \theta_i$ et $\cos \theta_i \approx 1$, on obtient les équations linéarisées :

- $x_i - x_{i+1} - P\theta_i = 0$
- $y_i - y_{i+1} + P = 0$
- $k_t(\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}) + P \frac{L_0}{2} + x_{i+1}L_0\theta_i - y_{i+1}L_0 = 0$

Question 9.

M=Augmente(H, G)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

La première itération correspond à i=0 (sous python) (et i=1 sous scilab)

i=0

p=Pivot(M, 0) #recherche du plus grand pivot

p=0 ,

p==i, il n'y a pas d'appel à Echligne

for j in range(1,8) :

Elimine(M, 0, j)

Seule la ligne j=6 (a=-1) est modifiée (a=0 pour les autres lignes)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Question 10.

$$u_{actionneur} = L_0(\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

$$\text{Soit } u_{actionneur} = 1,25.10^{-3}(\sin 0,000916 + \sin 0,0000833) = 1,25.10^{-6}\text{m}$$

L'actionneur se déplace de $1,25 \mu\text{m}$

Question 11.

```

1 import numpy as np
2 def derivee2(y,dy):
3     ddy=(f-c*y-b*dy)/a
4     return ddy
5 def Euler_ordre2(dt,nbdt):
6     y=[0]
7     dy=[0]
8     for i in range(nbdt):
9         dy=dy+[dy[i]+dt*derivee2(y[i],dy[i])]
10        y=y+[y[i]+dt*dy[i]]
11    return y

```

Remarque: lignes 9 et 10, '+' est ici une concaténation

Il aurait mieux valu utiliser ici la méthode « append », qui rajoute un élément à dy, de complexité $O(1)$. La concaténation de liste implique à chaque valeur de i la création d'une nouvelle liste dy, elle est de complexité $O(n)$.

II -4 Commande de l'actionneur piézoélectrique**Question 12.**

```

1 def ACTIONNER(TMemb):
2     return TMemb<=45

```

II -5 Débitmètre à fil chaud**Question 13.**

P_{th} : puissance thermique transférée du fil vers l'extérieur

Si le fil est plus chaud que l'extérieur, alors $P_{th} > 0$

Question 14.

Bilan d'enthalpie : $dH = R_w I^2 dt - P_{th} dt$

Or $dH = c dT_w$

Soit : $c \frac{dT_w}{dt} = R_w I^2 - P_{th}$

Question 15.

La puissance thermique peut être transférée par : conduction, convection et par rayonnement.

Question 16.

La surface latérale est $A = \pi d l$

Si on néglige les effets de bord, $\vec{j}_q$ est radial, et dépend uniquement de θ

La puissance thermique est $P_{th} = \int \vec{j}_q \cdot d\vec{S} = \int j_q \cdot dS$

Si on suppose que $\vec{j}_q$ est uniforme en norme, $P_{th} = j_q \cdot A = \pi d l j_q$

Question 17.

$j_q = h(T_w - T_0)$: loi de Newton

h désigne le coefficient de transfert thermique et s'exprime en $W.m^{-2}.K^{-1}$

Question 18.

La loi de Fourier s'écrit : $\vec{j}_q = -\lambda_f \overrightarrow{\text{grad}} T$ avec λ_f conductivité thermique, en $W.m^{-1}.K^{-1}$

Soit $[Nu] = \left[\frac{W}{m^2.K} \cdot m \cdot \frac{K.m}{W} \right]$, le nombre de Nusselt est bien sans dimension.

Question 19.

En régime permanent, $R_w I^2 = P_{th} = \pi d l j_q = \pi d l h (T_w - T_0)$ où $hd = N_u \lambda_f$

Soit $R_w I^2 = \pi l \lambda_f (T_w - T_0) N_u$

Question 20.

$$N_u = \frac{R_w I^2}{\pi l \lambda_f (T_w - T_0)} = \frac{0,25}{\pi \cdot 10^{-3} \cdot 0,02 \cdot 200} = 19,9$$

Le transfert par convection est prédominant par rapport au transfert par conduction. ($N_u \gg 1$)

Question 21.

Le nombre de Reynolds est $R_e = \frac{\rho V d}{\eta}$

Donc $N_u = a + b\sqrt{R_e}$ augmente avec la vitesse V .

Question 22.

On a établi question 19 : $R_W I^2 = \pi l \lambda_f (T_w - T_0) N_u$

Or la résistance du fil est telle que $R_W - R_0 = R_0 \alpha (T_w - T_0)$

D'où $\frac{R_W I^2}{R_W - R_0} = \frac{\pi l \lambda_f}{R_0 \alpha} N_u$ avec $N_u = a + b \sqrt{\frac{\rho d}{\eta}}$

Soit $\frac{R_W I^2}{R_W - R_0} = \frac{\pi l \lambda_f}{R_0 \alpha} \left(a + b \sqrt{\frac{\rho d}{\eta}} \sqrt{V} \right) = a_1 + b_1 \sqrt{V}$

Avec $a_1 = \frac{\pi l \lambda_f}{R_0 \alpha} a$ et $b_1 = \frac{\pi l \lambda_f}{R_0 \alpha} \sqrt{\frac{\rho d}{\eta}} b$

Question 23.

$U_{CB} = \frac{R_1}{R_1 + R_x} E$; $U_{CD} = \frac{R_1}{R_1 + R_W} E$

$e = U_{CB} - U_{CD} = E \left(\frac{R_1}{R_1 + R_x} - \frac{R_1}{R_1 + R_W} \right)$

$e = E \left(\frac{1}{1+\delta} - \frac{1}{1+\beta} \right)$ avec $\delta = \frac{R_x}{R_1}$ et $\beta = \frac{R_W}{R_1}$

Le pont est équilibré si $e = 0$ soit si $R_x = R_W$

Question 24.

En supposant la constante $\alpha > 0$, R_W augmente avec la température T_w donc si on augmente R_x , on sélectionne une température de travail plus élevée.

Dans le cas d'un fluide médicamenteux, il vaut mieux choisir R_x de telle façon que la température n'excède pas 100°C pour éviter l'ébullition et/ou l'altération du produit.

Question 25.

$i_+ = i_- = 0$ (impédance d'entrée infinie)

Dans le cas d'un fonctionnement linéaire, $U_{DB} = 0$

Question 26.

Le circuit impose $U_{CA} = (R_1 + R_W)I = (R_1 + R_x)I'$ et $U = R_W I = R_x I'$

D'où $\frac{R_1 + R_W}{R_W} = \frac{R_1 + R_x}{R_x}$ soit $R_x = R_W$

Le circuit impose l'équilibre du pont soit $R_x = R_W$

Or R_W étant une fonction linéaire de la température, la température est maintenue constante.

Remarque : il semble qu'il y ait inversion dans les signes des entrées de l'ALI.

Si T augmente, R augmente, U augmente, donc $E_s = K(V_+ - V_-)$ augmente, donc I augmente, et la température aussi (Q14).....

Si on inverse les bornes + et -, si T augmente, U augmente, E_s diminue, donc I diminue, la puissance dissipée diminue, donc T diminue (boucle de rétroaction)

Question 27.

$E_s = U_{CA} = (R_1 + R_W)I$

$U = R_W I$

Soit $E_s = \frac{R_1 + R_W}{R_W} U$ soit $\gamma = \frac{R_1 + R_W}{R_W}$

$E_s^2 = \left(\frac{R_1 + R_W}{R_W} \right)^2 U^2$ avec $U = R_W I$ et $\frac{R_W I^2}{R_W - R_0} = a_1 + b_1 \sqrt{V}$

Soit $E_s^2 = (R_1 + R_W)^2 (a_1 + b_1 \sqrt{V}) \frac{R_W - R_0}{R_W}$ où $R_W = R_x$

$E_s^2 = A + B\sqrt{V}$

Question 28.

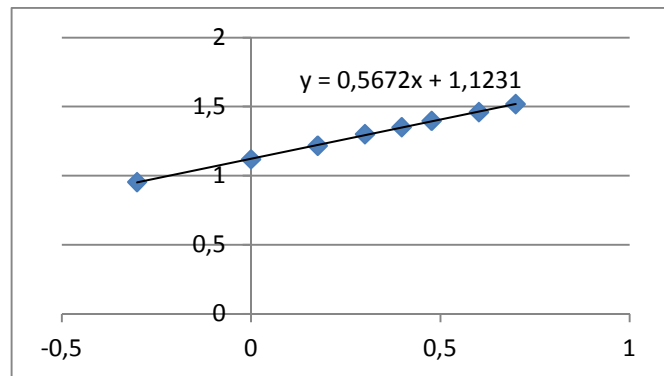
Si $V=0$, $E_s = 4,0$ soit $A = 16 V^2$

Question 29.

$$\log(E_S^2 - A) = \log B + n \cdot \log V$$

Pour trouver n (et B), on trace $\log(E_S^2 - A)$ en fonction de $\log V$

V	Es	log(V)	log(Es ² -A)
0	4		
0,5	5	-0,30	0,95
1	5,4	0,00	1,12
1,5	5,7	0,18	1,22
2	6	0,30	1,30
2,5	6,2	0,40	1,35
3	6,4	0,48	1,40
4	6,7	0,60	1,46
5	7	0,70	1,52



$$n = 0,57 \text{ et } B = 10^{1,1231} = 13,28$$

Question 30.

Le substrat doit être solide et isolant pour éviter une déperdition de chaleur.

On éliminera donc l'air et gardera leastique dont la capacité thermique volumique (= capacité thermique massique * masse volumique) et la conductivité thermique est la plus faible

Question 31.

$$\frac{Q(p)}{F_{th}(p)} = \frac{\frac{K_m p}{1 + \omega_0^2 p^2}}{1 + K_d \frac{K_m p}{1 + \omega_0^2 p^2}} = \frac{K_m p}{\omega_0^2 p^2 + K_d K_m p + 1}$$

$$H(p) = \frac{V_{réel}(p)}{V_{cons}(p)} = K_{capt} \cdot \frac{K_{corr} \cdot \frac{K_{th}}{1 + \tau_h p} \cdot \frac{K_m p}{\omega_0^2 p^2 + K_d K_m p + 1}}{1 + \frac{K_{capt}}{p} \cdot K_{corr} \cdot \frac{K_{th}}{1 + \tau_h p} \cdot \frac{K_m p}{\omega_0^2 p^2 + K_d K_m p + 1}} \cdot \frac{1}{p}$$

$$H(p) = \frac{K_{capt} \cdot K_{corr} \cdot K_{th} \cdot K_m}{(1 + \tau_h p) \cdot (\omega_0^2 p^2 + K_d K_m p + 1) + K_{capt} \cdot K_{corr} \cdot K_{th} \cdot K_m}$$

Question 32. Pour une entrée de type échelon, l'erreur statique n'est pas nulle : $\varepsilon_\infty = \frac{1}{1 + K_{bo}} =$

$$1 - K_{bf} = \frac{1}{1 + K_{corr} K_{th} K_m K_{cap}}$$

Question 33. Les exigences sont : $t_{5\%} < 0,15s$ et une précision de 0,01ml

Ces 2 critères ne sont pas respectés.