

Résolution approchée d'équations

On se propose de déterminer des valeurs approchées d'une équation $f(x) = 0$, où f est une fonction réelle de la variable réelle, continue sur un intervalle I .

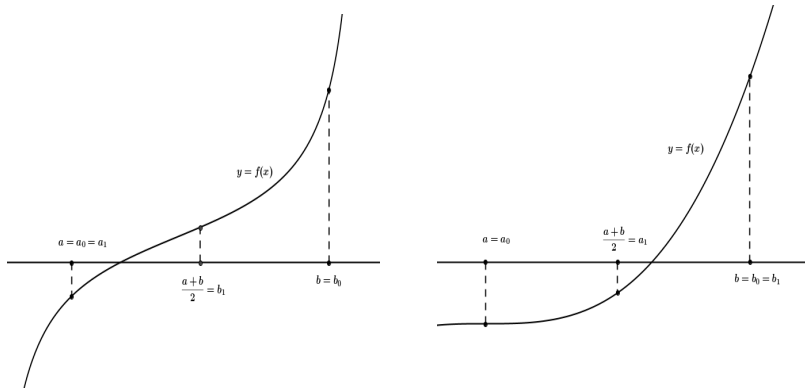
1. Méthode par dichotomie

Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Si $f(a)f(b) \leq 0$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Utilisons une méthode par **dichotomie** pour déterminer une valeur approchée de c tel que $f(c) = 0$.

On suppose que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$. Dans le cas contraire, on adapte la méthode.



On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

- On considère le milieu de $[a, b]$, soit $\frac{a+b}{2}$.
 - Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq 0$, on pose $a_1 = a$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$.
 - Sinon on pose $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = b$.
- On considère le milieu de $[a_1, b_1]$, soit $\frac{a_1+b_1}{2}$.
 - Si $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \geq 0$, on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
 - Sinon on pose $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ et $b_2 = b_1$.
- Supposons définie a_n et b_n . On considère le milieu de $[a_n, b_n]$, soit $\frac{a_n+b_n}{2}$.
 - Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.
 - Sinon on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

On définit ainsi deux suites (a_n) et (b_n) vérifiant

$$a_0 = a \quad \text{et} \quad b_0 = b$$

$$\text{Si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0, \text{ on pose } a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$$

$$\text{Sinon, on pose } a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n$$

Propriété. 1. Les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

$$2. \forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_0.$$

$$3. \forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

3. Les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Programmation en Python

```
def dichotomie(f, a, b, epsilon=1e-10):
```

```
    x=a
    y=b
    while y-x>epsilon:
        if f((x+y)/2)*f(x)>0:
            x=(x+y)/2
        else:
            y=(x+y)/2
    return (x+y)/2
```

Remarque: Recherche d'un élément dans une liste triée.

On peut appliquer l'algorithme de Dichotomie pour tester si un élément est dans une liste triée. Il donne alors une complexité en $O(\log_2(n))$.

2. Méthode de Newton

a. Suite récurrente, point fixe répulsif, attractif

Définition.

Soit une fonction f réelle de la variable réelle dérivable sur un intervalle I .

On suppose que I est stable par f , soit que $f(I) \subset I$. Soit $c \in I$.

1. On dit que c est un point fixe de f si, et seulement si, $f(c) = c$.

2. On dit que c est un point fixe attractif de f si, et seulement si, $f(c) = c$ et $|f'(c)| < 1$.

2. On dit que c est un point fixe super attractif de f si, et seulement si, $f(c) = c$ et $f'(c) = 0$.

3. On dit que c est un point fixe répulsif de f si, et seulement si, $f(c) = c$ et $|f'(c)| > 1$.

b. Vitesse ou ordre de convergence d'une méthode itérative

Définition.

Soit une suite (u_n) de limite ℓ . Soit un entier naturel p . On dit que la convergence est d'ordre p lorsque le quotient

$$\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^p}$$

admet une limite strictement positive.

Lorsque $p = 1$, on parle de convergence géométrique ou linéaire, lorsque $p = 2$, on parle de convergence quadratique.

c. Ordre de convergence vers un point fixe attractif

Propriété.

Soit une fonction f réelle de la variable réelle de classe C^1 sur un intervalle ouvert I . Soit $c \in I$ tel que

$$\begin{cases} f(c) = c \\ 0 < |f'(c)| < 1 \end{cases}$$

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que

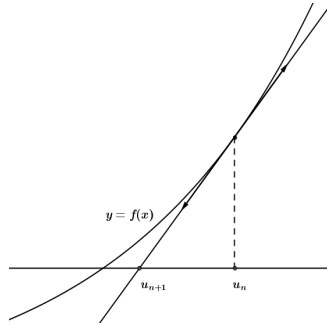
1. $J =]c - \alpha, c + \alpha[\subset I$.
2. L'intervalle J est stable par f .
3. Pour tout $u_0 \in J$, la suite de premier terme u_0 et définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers c .
4. Lorsque $u_0 \neq c$, la convergence est linéaire et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1} - c|}{|u_n - c|} = |f'(c)|.$$

d. Méthode de Newton

On considère une fonction dérivable sur un intervalle I .

La méthode de Newton consiste à approximer le graphe de la fonction f au voisinage d'un point par la tangente en ce point.



En un point $(x_0, f(x_0))$ du graphe, la tangente a pour équation

$$y = f'(x_0) (x - x_0) + f(x_0)$$

À condition que $f'(x_0) \neq 0$, le point d'intersection de la tangente avec l'axe $(x'Ox)$ a pour abscisse :

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Si a est un point I , on définit une suite :

$$\begin{aligned} u_0 &= a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \end{aligned}$$

Propriété.

Soit une fonction f réelle de la variable réelle de classe C^2 sur un intervalle ouvert I .

Soit $c \in I$ tel que $f(c) = 0$ et $f'(c) \neq 0$. Soit F définie par

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

1. La fonction F est définie sur un voisinage ouvert de c .

2. Le point c est un point super attractif de F .

3. Il existe $\delta > 0$ tel que :

a) l'intervalle $J =]c - \delta, c + \delta[$ est contenu dans l'ensemble de définition de F , et est stable par F ,

b) pour tout $u_0 \in J$, la suite de premier terme u_0 et définie par $u_{n+1} = F(u_n)$ vérifie

$$|u_n - c| \leq \frac{2m_1}{M_2} \left(\frac{M_2}{2m_1} |u_0 - c| \right)^{2^n}$$

avec $M_2 = \sup_{|x-c| \leq \delta} |f''(x)|$ et $m_1 = \inf_{|x-c| \leq \delta} |f'(x)|$.

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1} - c|}{|u_n - c|^2} = \frac{|f''(c)|}{2|f'(c)|}.$$

Problèmes de la méthode de Newton

