## Problème : endomorphismes cycliques.

Dans ce problème, on désigne par $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ sur le corps $\mathbb{R}$, avec $n \geqslant 2$.

On dira qu'un endomorphisme $f$ de $E$ est *cyclique* s'il existe un vecteur $x_0$ de $E$ tel que :

$$E = \text{Vect}\big(f^k(x_0) \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\big) \quad \text{ou encore} \quad E = \text{Vect}\big(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots\big).$$

Rappel.

1. On pose $f^0 = \text{Id}_E$, $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f$.
2. Le sous-espace vectoriel $\text{Vect}\big(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots\big)$ est l'ensemble des vecteurs qui sont combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de la famille $\big(f^k(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

On pose $f^0 = \text{Id}_E$, $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f$.

### 1. Un exemple d'endomorphisme non cyclique en dimension $n = 4$

Dans cette question seulement, $E$ est de dimension 4 et rapporté à une base $(e_1, e_2, e_3, e_4)$.

On considère l'endomorphisme $f$ dont la matrice dans la base $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A^2$. En déduire que l'endomorphisme $f$ n'est pas cyclique.

### 2. Exemples d'endomorphismes cycliques en dimension $n = 3$

Dans cette question seulement, $E$ est de dimension 3 et rapporté à une base $(e_1, e_2, e_3)$.

**a.** Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme $f$ dont la matrice dans la base $(e_1, e_2, e_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Exprimer $a(e_1)$ et $a^2(e_1)$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$ et en déduire que $f$ est cyclique.

**b.** Cas particulier.

**i.** On suppose que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $f$. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

Remarque : $6 - 11 + 6 = 1$.

**ii.** On suppose que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $f$. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

**iii.** On suppose que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $f$.

Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $A - \lambda I_3$ a son rang supérieur ou égal à 2. Que peut-on en déduire pour la dimension des sous-espaces propres ?

L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ? On pourra étudier la fonction : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \chi_A(x)$.

**3. Deux exemples d'endomorphisme cyclique en dimension $n$**

**a.** On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**i.** Montrer que $f$ est cyclique.

**ii.** La matrice $A$ est-elle inversible ?

**iii.** Déterminer le rang de $A$.

**iv.** Déterminer le polynôme caractéristique de $f$. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

**b.** Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels.

Soit $c$ un endomorphisme de $E$ admettant $n$ valeurs propres distinctes deux à deux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une base de vecteurs propres associés à ces $n$ valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

On pose $x_0 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

**i.** Exprimer $c(x_1+\cdots+x_n), c^2(x_1+\cdots+x_n), \ldots, c^{n-1}(x_1+\cdots+x_n)$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

**ii.** Écrire le déterminant de la famille $(x_0, c(x_0), \ldots, c^{n-1}(x_0))$ dans la base $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Montrer que la famille $(x_0, c(x_0), \ldots, c^{n-1}(x_0))$ est une base de $E$.

En déduire que l'endomorphisme $c$ est cyclique.

**4. Cas général**

Dans cette question, on note $f$ un endomorphisme cyclique de l'espace vectoriel $E$.

On note $x_0$ un vecteur de $E$ tel que :

$$E = \text{Vect}\left(f^k(x_0) \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\right) \text{ ou encore } E = \text{Vect}\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots\right).$$

**a. Une base adaptée de $E$**

**i.** Justifier que $x_0 \neq 0_E$. Rappel : dim $E$ = $n \geqslant 2$.

**ii.** Soit l'ensemble $K = \{ p \in \mathbb{N}^* \mid \text{ la famille } \left(f^k(x_0)\right)_{0 \leq k \leq p-1} \text{ est libre.}\}$

Montrer que $K$ est non vide et majoré.

En déduire qu'il existe un entier $m$ tel que :

$\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\right)$ est libre et $\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^m(x_0)\right)$ est liée.

**iii.** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \ f^{m+k}(x_0) \in \text{Vect}\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\right)$.

**iv.** En déduire que la famille $\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\right)$ est une base de $E$, puis que $m = n$.

**b. Matrice et diagonalisabilité de** $f$

Dans la suite de ce problème, on convient de poser :

$$f^n(x_0) = p_{n-1} f^{n-1}(x_0) + \cdots + p_1 f(x_0) + p_0 x_0$$

et on désigne alors par $P$ le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = X^n - p_{n-1}X^{n-1} - \cdots - p_1 X - p_0$.

**i.** Écrire la matrice $M$ de $f$ dans la base $\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$.

**ii.** Calculer le polynôme caractéristique de $M$.

On pourra effectuer l'opération : $L_1 \longleftarrow L_1 + x\, L_2 + x^2\, L_3 + \cdots + x^{n-2}\, L_{n-1} + x^{n-1}\, L_n$

**iii.** Montrer que, pour toute valeur propre de $M$, la dimension du sous-espace propre est 1.

**iv.** Établir que l'endomorphisme cyclique $f$ est diagonalisable si, et seulement si, il possède $n$ valeurs propres distinctes deux à deux.

**c. Commutant de** $f$

On note

$$\mathcal{C} = \{ g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g \}$$

**i.** Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. On l'appelle le commutant de $f$.

**ii.** Montrer que $\left(Id_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une famille libre de $\mathcal{C}$.

**iii.** Montrer que $\left(Id_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une base de $\mathcal{C}$.

On pourra considérer un élément $g$ de $\mathcal{C}$ et décomposer $g(x_0)$ sur la base $\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$.