

Corrigé du devoir 14

1. Un Exemple d'endomorphisme non cyclique en dimension $n = 4$

On obtient

$$A^2 = -I_4.$$

Soit un vecteur quelconque $x_0 \in E$. On a, d'après le résultat précédent, $f^2(x_0) = -x_0$, puis $f^3(x_0) = -f(x_0)$ et $f^4(x_0) = x_0$.

On en déduit par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^{4k}(x_0) = x_0, f^{4k+1}(x_0) = f(x_0), f^{4k+2}(x_0) = -x_0, f^{4k+3}(x_0) = -f(x_0)$$

On en déduit que toute combinaison linéaire finie de la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots)$ est combinaison linéaire de x_0 et $f(x_0)$. Donc

$$\text{Vect}(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots) \subset \text{Vect}(x_0, f(x_0))$$

Donc

$$\dim(\text{Vect}(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots)) \leq 2$$

Donc

$$\text{Vect}(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots) \neq E$$

Donc

l'endomorphisme f n'est pas cyclique.

2. Exemples d'endomorphismes cycliques en dimension $n = 3$

a. On a $f(e_1) = e_2, f^2(e_1) = f(e_2) = e_3$.

Donc $\text{Vect}(e_1, f(e_1), f^2(e_1)) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = E$.

L'endomorphisme f est cyclique.

b. Cas particulier.

i. On peut effectuer le calcul du polynôme caractéristique en effectuant l'opération :

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$$

On obtient

$$\chi_A(X) = -(X-1)(X-2)(X-3)$$

Il s'ensuit que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \{1, 2, 3\}$.

La dimension de E est 3, et l'endomorphisme f admet 3 valeurs propres distinctes deux à deux, donc

l'endomorphisme f est diagonalisable.

ii. Le polynôme caractéristique de la matrice A est

$$\chi_A(X) = -(X-1)(X+1)^2$$

Il s'ensuit que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \{1, -1\}$.

On a $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\text{rang}(A + I_3) = 2$. Il s'ensuit que la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est 1. Cette dimension est distincte de l'ordre de multiplicité de la valeur propre.

L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

iii. Le polynôme caractéristique de la matrice A est

$$\chi_A(X) = -X^3 + 3X^2 + \alpha.$$

On a $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \alpha \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$. Les deux vecteurs colonnes C_1 et C_2 de cette matrice forment une famille libre, donc son rang est supérieur ou égal à 2.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $A - \lambda I_3$ a son rang supérieur ou égal à 2.

Donc en utilisant le théorème du rang, on a : $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_2) \leq 1$.

Comme la dimension d'un sous-espace propre est supérieur ou égal à 1, on a

la dimension des sous-espaces propres de f est égale à 1.

Considérons la fonction $\varphi : x \mapsto -x^3 + 3x^2 + \alpha$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $\varphi'(x) = -3x(x-2)$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$

Comme chaque sous-espace propre a pour dimension 1 et que E est de dimension 3, l'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, f admet 3 valeurs propres distinctes.

On utilise la propriété suivante : une application qui est continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur $f(I)$.

Si $\alpha > 0$ ou si $\alpha + 4 < 0$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une seule solution.

Si $\alpha = 0$ ou $\alpha + 4 = 0$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet 2 solutions.

Si $\alpha < 0$ et $\alpha + 4 > 0$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet 3 solutions.

L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, $-4 < \alpha < 0$.

3. Deux exemples d'endomorphisme cyclique en dimension n

- a. i. D'après l'écriture de la matrice, on a $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3$, plus généralement :

$$\text{si } k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f(e_k) = e_{k+1}$$

Soit pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, l'assertion $\mathcal{P}(k) : f^k(e_1) = e_{k+1}$.

On a $f(e_1) = e_2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$, supposons l'assertion $\mathcal{P}(k)$ vraie.

On a $f^k(e_1) = e_{k+1}$, donc $f^{k+1}(e_1) = f(e_{k+1}) = e_{k+2}$. Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a donc $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f^k(e_1) = e_{k+1}$.

Ainsi on a

$$(e_1, f(e_1), f^2(e_1), \dots, f^{n-1}(e_1)) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

Comme $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), \dots, f^{n-1}(e_1))$ est la base canonique de E ,

l'endomorphisme f est cyclique.

- ii. Comme la matrice A est triangulaire inférieure, son déterminant est égal au produit des éléments de la diagonale.

Donc $\det(A) = 0$. Donc

La matrice A n'est pas inversible.

- iii. Comme la matrice A est inversible, son rang n'est pas égal à n . Donc $\text{rang}(A) \leq n-1$.

D'autre-part, les colonnes $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ forment une famille libre. Donc le rang de la matrice est supérieur ou égal à $n-1$.

Le rang de la matrice A est $n-1$.

- iv. On a, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$$

On a donc

$$\chi_A = X^{n-1}(X-1)$$

On a $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1\}$.

Si $n = 2$, le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, donc l'endomorphisme f est diagonalisable.

Supposons $n \geq 3$. La valeur propre 0 a pour ordre de multiplicité $w(0) = n-1 \geq 2$.

Or le rang de la matrice A est $n-1$. En utilisant le théorème du rang, on obtient la dimension de $\text{Ker } f$ égale à 1. Il s'ensuit que la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est 1. Comme cette dimension est distincte de l'ordre de multiplicité de 0, on en déduit que f n'est pas diagonalisable si $n \geq 3$.

l'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, $n = 2$.

- b. i.** On a, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $c(x_i) = \lambda_i x_i$. Donc, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a $c^k(x_i) = \lambda_i^k x_i$.

On en déduit par linéarité que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, c^k(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \lambda_1^k x_1 + \lambda_2^k x_2 + \dots + \lambda_n^k x_n$$

- ii.** Le déterminant de la famille $(x_0, c(x_0), \dots, c^{n-1}(x_0))$ dans la base $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est :

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1}^2 & \dots & \lambda_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est un déterminant de Vandermonde. Il est égal à

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Comme les λ_i sont distincts deux à deux, ce déterminant est non nul. Donc

la famille $(x_0, c(x_0), \dots, c^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

La famille $(x_0, c(x_0), \dots, c^{n-1}(x_0))$ est donc une famille génératrice de E .

En tant que sur-famille, il en est de même pour $(c^k(x_0) | k \in \mathbb{N})$.

Donc $\text{Vect}(c^k(x_0) | k \in \mathbb{N}) = E$.

L'endomorphisme c est cyclique.

4. Cas général

a. Une base adaptée de E

- i.** Si $x_0 = 0_E$, on a, pour tout k de $\mathbb{N}$, $f^k(x_0) = 0_E$. Donc $\text{Vect}(f^k(x_0) | k \in \mathbb{N}) = \{0_E\}$.

Ceci est impossible car $\text{Vect}(f^k(x_0) | k \in \mathbb{N}) = E$, et $\dim E \geq 2$.

$$x_0 \neq 0_E.$$

- ii.** Soit l'ensemble $K = \{p \in \mathbb{N} \mid (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est une famille libre.}\}$

Comme $x_0 \neq 0_E$, la famille (x_0) est une famille libre. Donc $1 \in K$, et l'ensemble K est non vide.

Comme E est de dimension n , le cardinal des familles libres est majoré par n . Ainsi K est majoré par n .

L'ensemble K est non vide et majoré.

Une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément. Notons le m . On a donc

$$(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)) \text{ est libre et } (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^m(x_0)) \text{ est liée.}$$

- iii.** Soit $\mathcal{P}(n)$ l'assertion :

$$f^{m+k}(x_0) \text{ est combinaison linéaire des vecteurs } x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$$

Comme $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre et $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^m(x_0))$ est liée, le vecteur $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire de $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$. L'assertion est vraie au rang 0.

Supposons la vraie au rang k . On peut écrire :

$$f^{m+k}(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \dots + a_{m-2} f^{m-2}(x_0) + a_{m-1} f^{m-1}(x_0)$$

On en déduit que

$$f^{m+k+1}(x_0) = a_0 f(x_0) + a_1 f^2(x_0) + \dots + a_{m-2} f^{m-1}(x_0) + a_{m-1} f^m(x_0)$$

Comme $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire de $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$, on en déduit qu'il en est de même pour $f^{m+k+1}(x_0)$. L'assertion est vraie au rang $k+1$.

Elle est donc vraie pour tout entier k . Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^{m+k}(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)).$$

iv. Comme $E = \text{Vect}(f^k(x_0) | k \in \mathbb{N})$, tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs du type $f^k(x_0)$.

Donc, d'après la question précédente, tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0).$$

Il s'ensuit que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est génératrice de E . Comme par définition de m c'est une famille libre, c'est donc une base de E .

Comme son cardinal est m , on a $m = n$.

$$\text{La famille } (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)) \text{ est une base de } E, \text{ et } m = n.$$

b. Matrice et diagonalisabilité de f

i. On obtient $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & p_0 \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & p_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & p_{n-2} \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & p_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

ii. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $\chi_M(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -p_0 \\ -1 & x & \cdot & \cdot & 0 & -p_1 \\ 0 & -1 & x & \cdot & 0 & -p_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & -1 & x & -p_{n-2} \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & x - p_{n-1} \end{pmatrix}.$

Effectuons l'opération : $L_1 \leftarrow L_1 + x L_2 + x L_3 + \dots + x^{n-2} L_{n-1} + x^{n-1} L_n$.

On obtient $\chi_M(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & P(x) \\ -1 & x & \cdot & \cdot & 0 & -p_1 \\ 0 & -1 & x & \cdot & 0 & -p_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & -1 & x & -p_{n-2} \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & x - p_{n-1} \end{pmatrix},$

On développe par rapport à la première ligne, et on obtient : $\chi_M(x) = (-1)^{1+n} P(x) \times (-1)^{n-1}$.

$$\boxed{\chi_M = P}$$

iii. Soit λ une valeur propre de M .

Considérons la matrice $\lambda I_n - M =$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & . & . & 0 & -p_0 \\ -1 & \lambda & . & . & 0 & -p_1 \\ 0 & -1 & \lambda & . & 0 & -p_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & -1 & \lambda & -p_{n-2} \\ 0 & . & . & 0 & -1 & \lambda - p_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de cette matrice.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_{n-1} C_{n-1} = 0$.

On obtient le système

$$\begin{cases} \lambda \alpha_1 & = & 0 \\ -\alpha_1 + \lambda \alpha_2 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{n-2} + \lambda \alpha_{n-1} & = & 0 \\ -\alpha_{n-1} & = & 0 \end{cases}.$$

On en déduit que tous les α_i sont nuls. Donc les vecteurs colonnes $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ forment une famille libre.

Il s'ensuit que la matrice $M - \lambda I_n$ a un rang supérieur ou égal à $n - 1$. Comme λ est valeur propre, cette matrice n'est pas inversible. Donc son rang est $n - 1$. Et la dimension du sous-espace propre associé à λ est 1.

Pour toute valeur propre de M , la dimension du sous-espace propre est 1.

iv. • Si l'endomorphisme f possède n valeurs propres distinctes, comme E est de dimension n , l'endomorphisme est diagonalisable.

• Supposons que l'endomorphisme cyclique f est diagonalisable.

Pour toute valeur propre de f , la dimension du sous-espace propre est égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre. D'après la question précédente cette dimension est 1. Donc l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est 1.

Comme f est diagonalisable le polynôme caractéristique est scindé. Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de f , et elles sont donc d'ordre de multiplicité 1, et elles sont donc au nombre de n .

L'endomorphisme f est diagonalisable $\iff f$ admet n valeurs propres distinctes.

c. Commutant de f

i. L'identité de E commute avec f , donc appartient à $\mathcal{C}$.

Considérons deux endomorphismes g et h de $\mathcal{C}$, et deux scalaires α et β .

On a

$$(\alpha g + \beta h) \circ f = \alpha g \circ f + \beta h \circ f = \alpha f \circ g + \beta f \circ h = f \circ (\alpha g + \beta h)$$

Donc $\alpha g + \beta h \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

- ii. On peut remarquer d'abord que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a $f^k \circ f = f \circ f^k$. Donc $(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est une famille de $\mathcal{C}$.

Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}^n$. Supposons que

$$\alpha_0 Id_E + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1} = 0$$

On a

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$$

Comme la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E , on en déduit que tous les α_i sont nuls. Donc

$$(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1}) \text{ est une famille libre de } \mathcal{C}.$$

- iii. Soit g un élément de $\mathcal{C}$. Décomposons le vecteur $g(x_0)$ sur la base $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$:

$$g(x_0) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \alpha_2 f^2(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0)$$

Notons h l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ définie par

$$h = \alpha_0 Id_E + \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$

On remarque d'abord que $h \in \mathcal{C}$ et que $h(x_0) = g(x_0)$.

On a, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} h(f^k(x_0)) &= (h \circ f^k)(x_0) \\ &= (f^k \circ h)(x_0) \\ &= f^k(h(x_0)) \\ &= f^k(g(x_0)) \\ &= (f^k \circ g)(x_0) \\ &= (g \circ f^k)(x_0) \\ &= g(f^k(x_0)) \end{aligned}$$

Ainsi g et h coïncident sur une base de E , donc $g = h$. Et donc

$$g = \alpha_0 Id_E + \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$

La famille $(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est une famille génératrice de $\mathcal{C}$. Donc

$$(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1}) \text{ est une base de } \mathcal{C}.$$