

Corrigé du devoir 15

Problème 1.

1. a. On a $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$.

Donc A_2 admet deux valeurs propres distinctes, et elle appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc A_2 est diagonalisable.

Et comme 0 n'est pas valeur propre de A_2 , A_2 est inversible.

- b. On a $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $X^3 - 4X = X(X - 2)(X + 2)$.

Donc A_3 admet trois valeurs propres distinctes, et elle appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc A_3 est diagonalisable.

Et comme 0 est valeur propre de A_3 , A_3 n'est pas inversible.

2. a. On obtient $X^2 - 10X + 9 = (X - 1)(X - 9)$.

Puis $X^4 - 10X^2 + 9 = (X^2 - 1)(X^2 - 9)$. Donc $X^4 - 10X^2 + 9 = (X - 1)(X + 1)(X - 3)(X + 3)$.

- b. Calculons le polynôme caractéristique de A .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\chi_A(x) = \det(xI_4 - A) = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ -3 & x & -2 & 0 \\ 0 & -2 & x & -3 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

On fait un développement par rapport à la première ligne :

$$\chi_A(x) = x \det \begin{pmatrix} x & -2 & 0 \\ -2 & x & -3 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix} - (-1) \det \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & x & -3 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix} = x(x^3 - 7x) - 3(x^2 - 3)$$

$$\chi_A(x) = x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2 - 1)(x^2 - 9) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$$

Donc A admet quatre valeurs propres distinctes, et elle appartient à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable.

Et il existe une matrice $\Delta \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et telle que $\Delta^{-1} A \Delta = D$ soit une matrice diagonale.

Et on peut prendre $D = \text{diag}(3, 1, -1, -3)$.

- c. L'ensemble C_A contient la matrice I_4 .

Soient deux matrices M et N de C_A et deux réels α et β .

On a

$$A(\alpha M + \beta N) = \alpha A M + \beta A N = \alpha M A + \beta N A = (\alpha M + \beta N) A$$

Donc $\alpha M + \beta N$ appartient à C_A .

$C_A = \{ M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid A M = M A \}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

d. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix},$

$$ND = DN \iff \begin{pmatrix} 3a & b & -c & -3d \\ 3e & f & -g & -3h \\ 3i & j & -k & -3l \\ 3m & n & -o & -3p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c & 3d \\ e & f & g & h \\ -i & -j & -k & -l \\ -3m & -3n & -3o & -3p \end{pmatrix}$$

On compare les éléments qui ne sont pas sur la diagonale, et on obtient :

$$ND = DN \iff b = c = d = e = g = h = i = j = l = m = n = o = 0$$

Et donc $\mathcal{C}_D = \{ M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid DM = MD \}$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

On vérifie d'abord que les quatre matrices I_4, D, D^2 et D^3 commutent avec D . Donc (I_4, D, D^2, D^3) est une famille de $\mathcal{C}_D$.

Montrons que la famille est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$. Supposons que $\alpha_0 I_4 + \alpha_1 D + \alpha_2 D^2 + \alpha_3 D^3 = 0$.

On obtient à partir de la diagonale, le système

$$\begin{cases} \alpha_0 + 3\alpha_1 + 3^2\alpha_2 + 3^3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_0 + 1\alpha_1 + 1^2\alpha_2 + 1^3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_0 + (-1)\alpha_1 + (-1)^2\alpha_2 + (-1)^3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_0 + (-3)\alpha_1 + (-3)^2\alpha_2 + (-3)^3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est un déterminant de Vandermonde. Il est égal à

$$(1-3)(-1-3)(-1-1)(-3-3)(-3-1)(-3+1) \neq 0$$

On a donc un système de Cramer qui admet une unique solution, le quadruplet $(0, 0, 0, 0)$.

Donc la famille (I_4, D, D^2, D^3) est libre. Comme $\mathcal{C}_D$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui est un sous-espace vectoriel de dimension 4, et que le cardinal de la famille (I_4, D, D^2, D^3) est libre, on peut conclure que la famille (I_4, D, D^2, D^3) est une base de $\mathcal{C}_D$.

e. L'application Φ est bien une application de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à valeurs dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

$\forall M, N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\lambda M + N) = \Delta(\lambda M + N)\Delta^{-1} = \lambda\Delta M\Delta^{-1} + \Delta N\Delta^{-1} = \lambda\Phi(M) + \Phi(N)$$

Donc l'application Φ est linéaire.

Déterminons son noyau. $\forall M, N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on a

$$M \in \text{Ker } \Phi \iff \Delta M\Delta^{-1} = 0 \iff \Delta^{-1}\Delta M\Delta^{-1}\Delta = 0 \iff M = 0$$

On a donc $\text{Ker } \Phi = \{0\}$, donc Φ est injective, et comme Φ est un endomorphisme en dimension finie, Φ est une bijection.

On peut aussi déterminer sa bijection réciproque. En notant $\Psi : N \mapsto \Delta^{-1}N\Delta$, on a pour tout $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$,

$$\Phi(\Psi(M)) = \Delta(\Delta^{-1}M\Delta)\Delta^{-1} = M \quad \text{et} \quad \Psi(\Phi(M)) = \Delta^{-1}(\Delta M\Delta^{-1})\Delta = M$$

Donc Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, bijectif de réciproque Ψ .

f. • Montrons que $\Phi(\mathcal{C}_D) \subset \mathcal{C}_A$.

Soit $N \in \Phi(\mathcal{C}_D)$. Il existe $M \in \mathcal{C}_D$ telle que $N = \Phi(M) = \Delta M \Delta^{-1}$.

On a

$$N A = \Delta M \Delta^{-1} A = \Delta M \Delta^{-1} \Delta D \Delta^{-1} = \Delta M D \Delta^{-1}$$

Et

$$A N = A \Delta M \Delta^{-1} = \Delta D \Delta^{-1} \Delta M \Delta^{-1} = \Delta D M \Delta^{-1}$$

Comme $MD = DM$, on a $NA = AN$, donc $N \in \mathcal{C}_A$.

On a bien $\Phi(\mathcal{C}_D) \subset \mathcal{C}_A$.

• Montrons que $\mathcal{C}_A \subset \Phi(\mathcal{C}_D)$.

Soit $M \in \mathcal{C}_A$. Comme Φ est bijective, il existe $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, $M = \Phi(N)$.

On a $N = \Psi(M) = \Delta^{-1} M \Delta$.

On a

$$N D = \Delta^{-1} M \Delta D = \Delta^{-1} M \Delta \Delta^{-1} A \Delta = \Delta^{-1} M A \Delta$$

Et

$$D N = D \Delta^{-1} M \Delta = \Delta^{-1} A \Delta \Delta^{-1} M \Delta = \Delta^{-1} A M \Delta$$

Comme $MA = AM$, on a $ND = DN$, donc $N \in \mathcal{C}_D$.

On a bien $\mathcal{C}_A \subset \Phi(\mathcal{C}_D)$.

Comme Φ est un isomorphisme, $\mathcal{C}_D$ et $\mathcal{C}_A$ ont même dimension. Donc $\dim \mathcal{C}_A = 4$.

Comme Φ est un isomorphisme, il transforme une base de $\mathcal{C}_D$ en une base de $\mathcal{C}_A$. Donc $(\Phi(I_4), \Phi(D), \Phi(D^2), \Phi(D^3))$ est une base de $\mathcal{C}_A$. On en déduit que la famille (I_4, A, A^2, A^3) est une base de $\mathcal{C}_A$.

3. a. Montrons d'abord que, si $P(X) \in E$, on a $\phi(P(X)) \in E$.

Soit $P(X) = a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \dots + a_0$.

On a

$$(n-1) X P(X) = (n-1) a_{n-1} X^n + R(X) \text{ avec } R(X) \text{ polynôme de degré inférieur ou égal à } n-1.$$

Puis

$$(1-X^2) P'(X) = -(n-1) a_{n-1} X^n + S(X) \text{ avec } S(X) \text{ polynôme de degré inférieur ou égal à } n-1.$$

Par addition, on a $\phi(P(X)) = R(X) + S(X)$ et on a bien $\phi(P(X)) \in E$.

La dérivation et le produit d'un polynôme par un autre est linéaire. Donc φ est un endomorphisme de E .

Soit $h \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

$$\underline{\varphi(X^h) = (n-1)X^{h+1} + (1-X^2)hX^{h-1} = hX^{h-1} + (n-1-h)X^{h+1}}$$

b. Pour écrire la matrice B de φ dans la base $\mathcal{B}$, il faut regarder l'image d'une base,

ou on a vu que $\varphi(X^j) = jX^{j-1} + (n-1-j)X^{j+1}$,

ce qui signifie que les coefficients de B sont nuls, sauf : $b_{j+1,j} = n-1-j$ et $b_{j-1,j} = j-1$.

On retrouve la définition des coefficients de A_n . Donc $\underline{M_B(\varphi) = A_n}$

c. On a

$$\begin{aligned}
 \phi(P_h) &= (n-1)X(X-1)^h (X+1)^{n-1-h} \\
 &\quad + (1-X^2) \left[h(X-1)^{h-1}(X+1)^{n-1-h} + (n-1-h)(X-1)^h(X+1)^{n-2-h} \right] \\
 &= (n-1)X(X-1)^h (X+1)^{n-1-h} \\
 &\quad - (X-1)(X+1) \left[h(X-1)^{h-1}(X+1)^{n-1-h} + (n-1-h)(X-1)^h(X+1)^{n-2-h} \right] \\
 &= (n-1)X(X-1)^h (X+1)^{n-1-h} \\
 &\quad - \left[h(X-1)^h(X+1)^{n-h} + (n-1-h)(X-1)^{h+1}(X+1)^{n-1-h} \right] \\
 &= (n-1)X(X-1)^h (X+1)^{n-1-h} \\
 &\quad - (X-1)^h (X+1)^{n-1-h} \left[h(X+1) + (n-1-h)(X-1) \right] \\
 &= (X-1)^h (X+1)^{n-1-h} \left[(n-1)X - h(X+1) - (n-1-h)(X-1) \right] \\
 &= (n-1-2h)(X-1)^h (X+1)^{n-1-h}
 \end{aligned}$$

On a donc $\underline{\varphi(P_h) = (n-1-2h)P_h}$.

d. Comme P_h est non nul (pour tout h), on a obtenu ainsi des valeurs propres de ϕ . Les réels $\{n-1-2h, h \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ sont distincts deux à deux. Donc le spectre est inclus dans cet ensemble. Mais comme cet ensemble possède $n-1 = \dim(E)$ nombres distincts, on peut dire que le spectre de ϕ est égal à $\{n-1-2h, h \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$.
La matrice A_n admet n valeurs propres distinctes et elle appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc A_n est diagonalisable.

e. A_n est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A_n .

Or 0 est valeur propre de A_n si et seulement si il existe $h \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $n-1-2h = 0$

Si n est pair, $n-1-2h$ est impair et donc ne peut pas être nul.

Si n est impair, posons $h = \frac{n-1}{2}$. On a $h \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $n-1-2h = 0$.

Donc A_n est inversible si et seulement si n est pair.

Problème 1.

Partie I : Etude dans un cas particulier

I.1.

I.1.a. On calcule le polynôme caractéristique de A : pour $x \in \mathbb{R}$, $\chi_A(x) = (x+2)(x-1)^2$. Par conséquent

$$\boxed{\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2; 1\}.$$

I.1.b. On peut calculer le déterminant de la famille $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

Donc $\mathcal{F}$ est une base $\mathbb{R}^3$.

On vérifie par calcul que

$$A u_1 = u_1, \quad A u_2 = u_2 \quad \text{et} \quad A u_3 = -2 u_3$$

$\mathcal{F}$ est une base de vecteurs propres de A .

I.1.c. On vient de trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A donc

A est diagonalisable.

On peut aussi remarquer que A est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable.

I.1.d.

I.2.

I.2.a. On calcule le polynôme caractéristique de B : pour $x \in \mathbb{R}$, $\chi_A(x) = (x - 2)^3$. Par conséquent

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{-2\}.$$

I.2.b. Si la matrice B était diagonalisable, elle serait semblable à $2 I_3$, or la seule matrice semblable à $2 I_3$ est elle-même, donc on aurait $B = 2 I_3$, ce qui est faux.

B n'est pas diagonalisable.

I.3.

I.3.a. Déterminons le sous-espace propre $E_1(A)$.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y - z = x \\ -x - z = y \\ -x - y = -z \end{cases} \iff x + y + z = 0$$

Le sous-espace propre $E_1(A)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Déterminons le sous-espace propre $E_2(B)$.

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x - 3y - z = 2x \\ 2y = 2y \\ x - 3y + z = 2z \end{cases} \iff x - 3y - z = 0$$

Le sous-espace propre $E_2(B)$ est le plan d'équation $x - 3y - z = 0$.

L'intersection de ces deux plans est défini par :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = -2x \end{cases}$$

Donc $E_1(A) \cap E_2(B)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur u_4 .

$$E_1(A) \cap E_2(B) = \text{Vect}(u_4).$$

I.3.b. Comme u_3 n'est pas vecteur propre de B et qu'il engendre $E_{-2}(A)$, il n'y a pas de vecteur propre commun à A et B dans $E_{-2}(A)$. De plus 2 est la seule valeur propre de B donc les vecteurs propres communs à A et B sont dans $E_1(A) \cap E_2(B)$.

D'après la question précédente,

les vecteurs propres communs à A et B sont les vecteurs de la forme $x u_4$, $x \in \mathbb{R}^*$.

Partie II : Condition nécessaire et conditions suffisantes

II.1.

II.1.a. Soient λ et μ tels que $Ae = \lambda e$ et $Be = \mu e$. Alors

$$(AB - BA)e = AB e - BA e = A(\mu e) - B(\lambda e) = \mu A e - \lambda B e = \mu \lambda e - \lambda \mu e = 0$$

$$e \in \text{Ker}([A, B]).$$

II.1.b. Le vecteur e est non nul car c'est un vecteur propre, donc $[A, B]$ n'est pas injectif et comme il s'agit d'une matrice carrée (endomorphisme en dimension finie), cela prouve que $[A, B]$ n'est pas inversible et

$$\text{rg}([A, B]) < n.$$

II.2. On a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$, donc admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

$$\text{Sp}(A) \neq \emptyset.$$

II.3. On suppose $[A, B] = 0_n$. Comme $K = \mathbb{C}$, A a au moins une valeur propre : soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

Comme $[A, B] = 0_n$ on a $\text{Ker}([A, B]) = \mathcal{M}_{n,1}(K)$ et on a $E_\lambda(A) \subset \text{Ker}([A, B])$.

$$A \text{ et } B \text{ vérifient la propriété } \mathcal{H}.$$

II.4.

II.4.a. On vérifie d'abord que pour tout $X \in E_\lambda(A)$, on a $\psi(X) \in E_\lambda(A)$.

Par hypothèse on a $(AB - BA)X = 0$, soit $ABX = BAX$.

Or $AX = \lambda X$ donc $A(BX) = \lambda BX$ ce qui signifie que $BX \in E_\lambda(A)$. L'application $\psi : X \mapsto BX$ est bien une application de $E_\lambda(A)$ dans lui même.

De plus, pour toutes matrices X et Y de $E_\lambda(A)$ et tous complexes α et β , on a

$$\psi(\alpha X + \beta Y) = B(\alpha X + \beta Y) = \alpha BX + \beta BY = \alpha \psi(X) + \beta \psi(Y)$$

$$\psi \text{ est un endomorphisme de } E_\lambda(A).$$

II.4.b. le complexe λ est valeur propre de A donc $E_\lambda(A)$ est de dimension non nulle.

De plus comme $K = \mathbb{C}$, ψ admet au moins une valeur propre : il existe $\mu \in \mathbb{C}$ et $X \in E_\lambda(A)$ non nul tels que $\psi(X) = \mu X$.

On a donc $BX = \mu X$, $AX = \lambda X$ et X non nul : X est un vecteur propre commun à A et B .

$$\text{Il existe un vecteur propre commun à } A \text{ et } B.$$

II.5. En dimension 1 les endomorphismes sont les homothéties vectorielles : $E \rightarrow E$, $u \mapsto \alpha u$, avec $\alpha \in \mathbb{K}$.

Donc tous les vecteurs non nuls de E sont des vecteurs propres donc

$\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

II.6.

II.6.a. Comme les matrices A et B ne vérifient pas $\mathcal{H}$, $E_\lambda(A)$ n'est pas inclus dans $\text{Ker}(C)$ et il existe $u \in E_\lambda(A)$ tel que $u \notin \text{Ker}(C)$.

Ce vecteur u est donc un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui vérifie

$$Au = \lambda u \text{ et } Cu \neq 0.$$

II.6.b. Par hypothèse $\text{Im}(C)$ est de dimension 1 et $v = Cu$ est un vecteur non nul de cette image donc

$$\text{Im}(C) = \text{Vect}(v).$$

II.6.c. On a $v = Cu$ donc

$$v = (AB - BA)u = ABu - BAu = ABu - \lambda Bu = (A - \lambda I)(Bu)$$

On a $v \in \text{Im}_\lambda(A)$. La question précédente permet alors de dire que

$$\text{Im}(C) \subset \text{Im}_\lambda(A).$$

II.6.d. Le sous-espace $\text{Im}(C)$ est de dimension 1 donc $1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A))$.

Le complexe λ est valeur propre de A donc $E_\lambda(A)$ a une dimension non nulle et, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1$.

$$1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1.$$

II.6.e On a

$$[A, A - \lambda I_n] = A(\lambda I_n) - \lambda I_n A = \lambda A - \lambda A = 0$$

On a

$$[B, A - \lambda I_n] = B(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)B = BA - \lambda B - AB + \lambda B = -(AB - BA) = -[A, B] = -C$$

$$[A, A - \lambda I_n] = 0 \text{ et } [B, A - \lambda I_n] = -C.$$

Les applications φ et ψ sont des applications linéaires par propriétés du produit matriciel.

Soit $X \in \text{Im}_\lambda(A)$. Il existe Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $X = (A - \lambda I_n)Y$.

On a

$$\varphi(X) = A(A - \lambda I_n)Y = (A - \lambda I_n)AY$$

Donc $\varphi(X) \in \text{Im}_\lambda(A)$.

Comme $[B, A - \lambda I_n] = -C$, on a $B(A - \lambda I_n) = (A - \lambda I_n)B - C$.

Donc

$$\psi(X) = B(A - \lambda I_n)Y = ((A - \lambda I_n)B - C)Y = (A - \lambda I_n)BY - CY$$

On a $(A - \lambda I_n)BY \subset \text{Im}_\lambda(A)$.

De plus $CY \in \text{Im}(C)$ et $\text{Im}(C) \subset \text{Im}_\lambda(A)$ donc $CY \in \text{Im}_\lambda(A)$.

On en déduit que $\psi(X) \in \text{Im}_\lambda(A)$.

φ et ψ définissent des endomorphismes de $\text{Im}_\lambda(A)$.

II.6.f. Comme $\text{Im}([\varphi, \psi]) \subset \text{Im}(C)$, on a $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à φ et ψ , endomorphismes de $\text{Im}_\lambda(A)$ qui est de dimension non nulle et strictement inférieure à n : φ et ψ ont un vecteur propre commun. A fortiori

A et B ont un vecteur propre commun.

II.7. $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vérifiée pour tout entier $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Soit E de dimension n .

Soit φ et ψ deux d'endomorphismes de E tels que $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$.

On considère A et B les matrices associées respectivement à φ et ψ dans une base de E , $C = AB - BA$.

Si $\text{rang}(C) = 1$ et si A et B ne vérifient pas $\mathcal{H}$, alors, d'après II.6., A et B ont un vecteur propre commun : φ et ψ ont un vecteur propre commun ($K = \mathbb{C}$ donc A a au moins une valeur propre).

Si $\text{rang}(C) = 1$ et A, B vérifient $\mathcal{H}$, alors d'après II.4., φ et ψ ont un vecteur propre commun.

Si $\text{rang}(C) = 0$, alors $[A, B] = 0$ et, d'après II.3. et II.4., φ et ψ ont un vecteur propre commun.

On en déduit que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée.

Par récurrence, on peut conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$\mathcal{P}_n$ est vraie.

Partie III : Etude d'un autre cas particulier

III.1. On a $g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^{2n-k}$. On pose $\ell = 2n - k$, et on a $g(P) = \sum_{\ell=0}^{2n} a_{2n-\ell} X^\ell$.

$$g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k.$$

III.2. Pour tout polynôme P , $\deg P' \leq \deg P$ et la dérivation des polynômes est linéaire donc f est un endomorphisme de E .

La question précédente prouve que g est une application de E dans E .

Si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} g(P + Q) &= X^{2n}(P + Q) \left(\frac{1}{X} \right) \\ &= X^{2n}P \left(\frac{1}{X} \right) + X^{2n}Q \left(\frac{1}{X} \right) \\ &= g(P) + g(Q) \end{aligned}$$

donc g est linéaire.

f et g sont des endomorphismes de E .

III.3.

III.3.a. Soit P un vecteur propre de g et λ la valeur propre associée. On a $g(P) = \lambda P$, soit

$$\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k = \lambda \sum_{k=0}^{2n} a_k X^{2n-k}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} a_{2n} &= \lambda a_0 \\ a_{2n-1} &= \lambda a_1 \\ \vdots & \\ a_n &= \lambda a_n \\ a_{n-1} &= \lambda a_{n+1} \\ \vdots & \\ a_0 &= \lambda a_{2n} \end{cases}$$

Si le polynôme P est de degré inférieur ou égal à $n-1$, on a $a_n = a_{n+1} = \dots = a_{2n} = 0$.

On en déduit du système que $a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_0 = 0$. Donc que $P = 0$. ce qui est faux car P est un vecteur propre.

$$\deg(P) \geq n.$$

III.3.b. On a $g(X^n) = X^n$ et X^n n'est pas le polynôme nul donc

$$X^n \text{ est un vecteur propre de } g.$$

III.4.

III.4.a. Soit P un polynôme de E . On a

$$P \in \text{Ker}(f^{i+1}) \iff f^{i+1}(P) = 0 \iff f^i(f(P)) = 0 \iff f^i(P') = 0 \iff P' \in \text{Ker}(f^i)$$

On fait une récurrence finie.

On a $f^1(P) = P'$. Or P' est nul si et seulement P est un polynôme constant c'est-à-dire un polynôme de degré ≤ 0 .

Donc $\text{Ker}(f^1) = \mathbb{C}_0[X]$.

On suppose que $\text{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]$ pour un entier i entre 1 et $2n-1$.

On a $P \in \text{Ker}(f^{i+1})$ si seulement si $P' \in \text{Ker}(f^i)$ donc si et seulement si $P' \in \mathbb{C}_{i-1}[X]$ donc $\text{Ker}(f^{i+1}) = \mathbb{C}_i[X]$.

$$\text{Si } i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, \text{ Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X].$$

III.4.b. Si P est un polynôme non nul de degré $i-1$, alors $f^i(P) = 0 = 0 P$. On a donc $0 \in \text{Sp}(f^i)$.

On a, pour tout polynôme P de $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$, on a, pour tout $k \geq 2n+1$, $f^k(P) = 0$, soit f^k est l'endomorphisme nul.

Il existe un entier p non nul tel que $p i \geq 2n+1$, et

$$(f^i)^p = f^{p i} = 0$$

On en déduit que le polynôme X^p est un polynôme annulateur de f^i . Comme le spectre de f^i est inclus dans l'ensemble des racines de ce polynôme annulateur, on a $\text{Sp}(f^i) \subset \{0\}$.

$$\boxed{\text{Sp}(f^i) = \{0\}.$$

III.5. • Supposons que $i \geq n + 1$.

On a alors $f^i(X^n) = 0 = 0 X^n$ donc X^n est vecteur propre de f^i .

Avec la question III.3.b. on peut en déduire que X^n est un vecteur propre commun à f^i et g .

• Supposons que f^i et g ont un vecteur propre commun. Notons le P .

D'après III.3.a., on a $\deg(P) \geq n$

D'après III.4.b., la valeur propre pour f^i est 0, donc $P \in \text{Ker}(f^i)$.

D'après III.4.a., on a $P \in \mathbb{C}_{i-1}[X]$, donc $\deg(P) \leq i - 1$.

Ainsi, $n \leq i - 1$ soit $i \geq n + 1$.

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ ont un vecteur propre commun si et seulement si } i \geq n + 1.}$$

III.6. $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2n+1}$ où pour i entre 2 et $2n$, $a_{i, i-1} = i - 1$ et tous les autres coefficients nuls :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Pour k entre 0 et $2n$, $g(X^k) = X^{2n-k}$ donc $B_n = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2n+1}$ où pour tout i entre 1 et $2n + 1$, $b_{i, 2n+2-i} = 1$, tous les autres coefficients étant nuls.

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

III.7.

III.7.a. En prenant $n = 1$ dans la question précédente, on obtient bien $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par produit matriciel, $(A_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A_1)^3$ est la matrice nulle.

III.7.b. On trouve $[A_1, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2.

$[(A_1)^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est aussi de rang 2.

III.7.c. Quand $i = 2$, on a $i \geq 1 + 1$ donc $(A_1)^2$ et B_1 ont un vecteur propre commun alors que la condition de la question

II.6. n'est pas vérifiée; celle-ci n'est donc pas nécessaire.

Quand $i = 1$, $rg([A_1, B_1]) < 3$ mais A_1 et B_1 n'ont pas de vecteur propre commun donc la condition de la question

II.1.b. n'est pas suffisante.