

Formulaire des méthodes de première année

version beta, 2026-2027

mail : gwenole.ars@gmail.com

Sommaire

Fiche 1 :	Outils N°1 : Nombre complexe	1
Fiche 2 :	Outils N°2 : Trigonométrie	5
Fiche 3 :	Outils N°3 : Pivot de Gauss	8
Fiche 4 :	Outils N°4 : Matrice et déterminant	12
Fiche 5 :	Outils N°5 : Équivalents et Développements limités	18
Fiche 6 :	Outils N°6 : Polynômes	25
Fiche 7 :	Outils N°7 : Récurrence	31
Fiche 8 :	Algèbre N°1 : Ensemble	34
Fiche 9 :	Algèbre N°2 : Espace Vectoriel	37
Fiche 10 :	Algèbre N°3 : Algèbre linéaire	48
Fiche 11 :	Algèbre N°4 : Produit scalaire	52
Fiche 12 :	Probabilité N°1 : Dénombrement	57
Fiche 13 :	Probabilité N°2 : Probabilité	61
Fiche 14 :	Probabilité N°3 : Variables aléatoires	64
Fiche 15 :	Analyse N°1 : Étude de fonctions	69
Fiche 16 :	Analyse N°2 : Suites et séries	81

Première partie

Outils N°1 : Nombre complexe

1 Écriture d'un complexe

1.1 Ensembles et formules à connaître

Définition 1 *il existe un ensemble de nombres (appelés nombres complexes), noté \mathbb{C} tel que :*

- \mathbb{C} contient \mathbb{R}
- \mathbb{C} est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles de \mathbb{R}
- \mathbb{C} contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$
- Chaque élément z de \mathbb{C} s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux réels.

Définition 2

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} \quad \mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0, \dots, n-1\}\}$$

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (1)$$

$$1 = e^{i0}, \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad j = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad -1 = e^{i\pi}, \quad -i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Définition 3 (Formule d'Euler)

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (2)$$

1.2 Forme algébrique

La forme algébrique d'un complexe est $a + ib$, pour cela, on utilisera surtout les formules de (1).

1.3 Forme polaire

La forme polaire d'un complexe est $\rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et θ définie à 2π près.

À partir d'une forme algébrique $a + ib$, on factorise par le module $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ et on détermine θ tel que $\cos(\theta) = \frac{a}{\rho}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{\rho}$.

Valeurs usuelles de trigonométrie :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Remarque 1

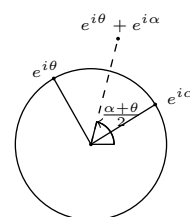
- Appliquer ces formules directement sur les expressions que l'on vous donne, n'essayer pas de calculer d'abord la forme algébrique.
- La forme polaire est pratique pour simplifier des produits, quotient ou puissance de complexes.
- S'aider d'un dessin pour facilement trouver l'argument θ

1.4 Méthode de l'angle moitié

Le but est de donner une forme polaire à $e^{i\theta} \pm e^{i\alpha}$

La méthode :

1. Factoriser par l'angle moitié $e^{i\frac{\theta+\alpha}{2}}$ (angle de la diagonale d'un losange)
2. Reconnaître une des formule d'Euler (Formule (2)) dans les parenthèses
3. **Attention** pour avoir la forme polaire, il faut faire attention au signe du cos ou sin obtenue. Si il est négatif, il faut rajouter π à l'angle $\frac{\theta+\alpha}{2}$ (en effet $-1 = e^{i\pi}$).

**2 Résolution d'équation complexe****2.1 Résolution de $z^n = c \in \mathbb{C}$**

La méthode :

- Ecrire c sous forme polaire $\rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$.
- Ecrire sur votre copie avec vos valeurs :

$$z^n = \rho e^{i\theta} = \left(\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \right)^n$$

Cette dernière écriture n'est possible que si n est un entier !

- Conclure par $z = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$
- **Attention** ne pas oublier les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, sinon tout est faux.

2.2 Résolution de $z^2 = a + ib$

Cette méthode s'applique uniquement si vous ne pouvez pas écrire $a + ib$ sous forme polaire.

1. Poser $z = x + iy$.
On a alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy$
2. Créer un système en x et y de trois équations :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z^2) = a & (i) \\ \operatorname{Im}(z^2) = b & (ii) \\ |z|^2 = |a + ib| & (iii) \end{cases}$$

3. À partir des lignes (i) et (iii), déterminer x^2 et y^2 .

4. L'équation (ii) permet de savoir si x et y sont de même signe ou non et ainsi de trouver les deux couples (x, y) solutions.

Exemple 1 Résoudre $z^2 = 1 + i$

Posons $z = x + iy$

Alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

$$\text{Par identification : } (S) \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$$(s) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases}$$

Les solutions sont $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

Remarque 2 Il est dès fois plus rapide de deviner la valeur de δ qui est plutôt assez simple, en prenant $2xy = b$, on peut chercher des $x, y \in \mathbb{Z}$ qui vérifie cette condition.

Exemple 2 on veut résoudre $\delta^2 = 3 + 4i$, on a alors $2xy = 4$ soit $xy = 2$, on trouve $x = 1$ et $y = 2$ ou $x = 2$ et $y = 1$, reste à vérifier $(1 + 2i)^2 = -3 + 4i$ et $(2 + i)^2 = 3 + 4i$

Pour la rédaction sur la copie :

On a $(2 + i)^2 = 3 + 4i$

Ainsi $\delta^2 = (2 + i)^2$ et par conséquent $\delta = \pm(2 + i)$

2.3 Résolution de $e^z = c \in \mathbb{C}$

La méthode :

- Ecrire c sous forme polaire $\rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$.
- On pose $z = x + iy$, et on écrit :

$$e^z = e^x e^{iy} = \rho e^{i\theta}$$

- Conclure par $x = \ln \rho$ et $y = \theta + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- On a ainsi la valeur de z

2.4 Résolution de $az^2 + bz + c = 0$

Tout repose sur la propriété :

Proposition 1

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de $(E) : az^2 + bz + c = 0$, alors

- Si $\Delta = \delta^2 \neq 0$, (E) admet deux racines distinctes : $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une racine double : $z = \frac{-b}{2a}$.

La méthode est donc simple :

- Déterminer le discriminant Δ
- Déterminer **un** δ tel que $\delta^2 = \Delta$ avec la méthode de la section 2.1 ou si nécessaire de la section 2.2.
- **Attention** , il faut choisir un δ et ne pas prendre les deux solutions de l'équation.
- Appliquer les formules de la proposition.

3 Utilisation des complexe en étude de fonctions

Pour simplifier et calculer des primitives de $\cos(\omega x)e^{\alpha x}$ ou $\sin(\omega x)e^{\alpha x}$, on considère la fonction $x \mapsto e^{i\omega x}e^{\alpha x} = e^{(\alpha+i\omega)x}$ qui a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{\alpha+i\omega}e^{(\alpha+i\omega)x}$ que l'on écrira sous forme algébrique.

Il suffira alors de conserver la partie réelle pour trouver la primitive de $\cos(\omega x)e^{\alpha x}$ ou la partie imaginaire pour $\sin(\omega x)e^{\alpha x}$

Exemple 3 Donner une primitive de $x \mapsto x \cos(2x)e^x$

On s'intéresse à $x \mapsto xe^{i2x}e^x = xe^{(1+2i)x}$

Par intégration par partie,

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{(1+2i)x}$ c'est-à-dire $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{1}{1+2i}e^{(1+2i)x}$.

u et v étant C^1 sur \mathbb{R} .

Ainsi

$$\begin{aligned} \int xe^{(1+2i)x} dx &= \left[x \frac{1}{1+2i} e^{(1+2i)x} \right] - \int \frac{1}{1+2i} e^{(1+2i)x} dx = x \frac{1}{1+2i} e^{(1+2i)x} - \frac{1}{(1+2i)^2} e^{(1+2i)x} \\ &= x \frac{1-2i}{5} e^x e^{2ix} - \frac{1}{-3+4i} e^x e^{2ix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int xe^{(1+2i)x} dx &= x \frac{1-2i}{5} e^x (\cos(2x) + i \sin(2x)) - \frac{-3-4i}{25} e^x (\cos(2x) + i \sin(2x)) \\ &= (x(\cos(2x) + 2 \sin(2x))e^x + (3 \cos(2x) - 4 \sin(2x))e^x) \\ &\quad + i(x(\sin(2x) - 2 \cos(2x))e^x + (3 \sin(2x) + 4 \cos(2x))e^x) \end{aligned}$$

Ainsi on considère la partie réelle, on a

$$\int x \cos(2x)e^x dx = x(\cos(2x) + 2 \sin(2x))e^x + (3 \cos(2x) - 4 \sin(2x))e^x$$

Deuxième partie

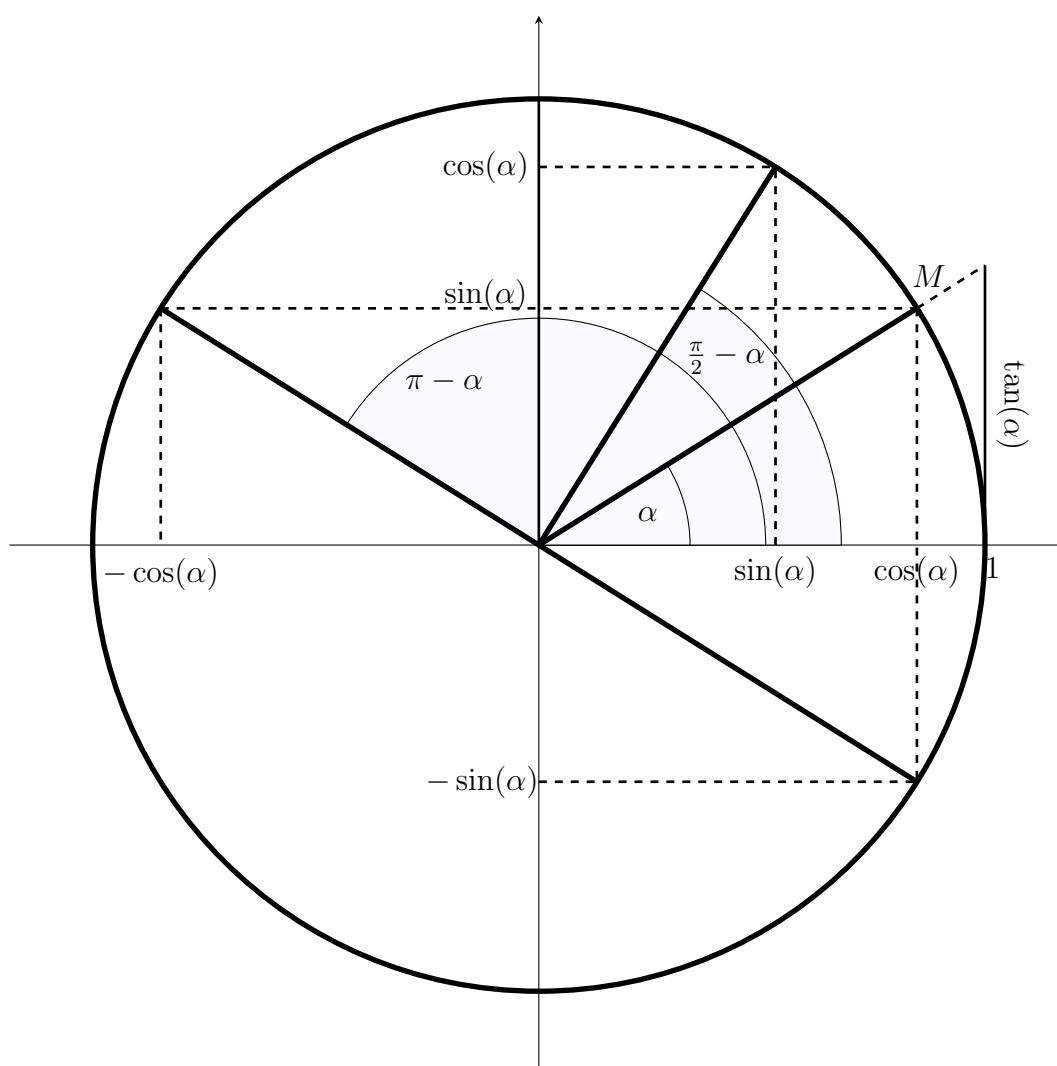
Outils N°2 : Trigonométrie

1 Symétries

$$\begin{aligned}
 \cos(-x) &= \cos x \\
 \sin(-x) &= -\sin x \\
 \tan(-x) &= -\tan x \\
 \cos(\pi - x) &= -\cos x \\
 \sin(\pi - x) &= \sin x \\
 \tan(\pi - x) &= -\tan x \\
 \cos(\pi + x) &= -\cos x \\
 \sin(\pi + x) &= -\sin x \\
 \tan(\pi + x) &= \tan x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\
 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\
 \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{1}{\tan x} \\
 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x \\
 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x \\
 \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\frac{1}{\tan x}
 \end{aligned}$$

On retrouve ces formules à l'aide du cercle trigonométrique :



2 Égalités

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} / b = a + 2\pi k \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} / b = -a + 2\pi k \end{cases} \quad \sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} / b = a + 2\pi k \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} / b = \pi - a + 2\pi k \end{cases}$$

$$\tan a = \tan b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / a = b + \pi k$$

On retrouve ces formules à l'aide du cercle trigonométrique.

3 Formules d'addition

$$\begin{array}{l|l} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b & \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} & \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{array}$$

Remarque 3 Il suffit de connaître la partie de gauche pour retrouver ensuite toutes les formules citées en-dessous.

4 Formules de duplication

$$\begin{array}{l|l} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a & \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \\ = 2 \cos^2 a - 1 & \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \\ = 1 - 2 \sin^2 a & \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} \\ \sin 2a = 2 \sin a \cos a & \\ \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} & \end{array}$$

Remarque 4 $\cos(2a) = \cos(a+a)$ et $\sin[2a] = \sin(a+a)$ et utiliser la formule de Pythagore $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

5 Formules de linéarisation

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

Remarque 5 $\cos a \cos b$ apparaît dans la formule $\cos(a + b)$

On écrit $\begin{cases} \cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \end{cases}$ et en éliminant $\sin a \sin b$ par pivot, on obtient

$$2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a - b) + \cos(a + b)$$

6 Formules de factorisation

$$\begin{array}{l} \sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \sin p - \sin q = 2 \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \end{array} \right.$$

Remarque 6 On écrit $\begin{cases} \cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \end{cases}$.

Ainsi $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos(a) \cos(b)$ avec $\begin{cases} a + b = p \\ a - b = q \end{cases}$ (c-à-d $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$).

6.1 Formules en “tangente t sur 2”

Soit $t \in]-\pi, \pi[$, en posant $u = \tan \left(\frac{t}{2} \right)$ on a :

$$\cos t = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \quad \left| \quad \sin t = \frac{2u}{1 + u^2} \quad \left| \quad \tan t = \frac{2u}{1 - u^2} \right. \right.$$

Remarque 7 On commence par écrire $\tan t = \tan(2(t/2)) = \frac{\tan(t/2) + \tan(t/2)}{1 - \tan^2(t/2)} = \frac{2u}{1-u^2}$

À l'aide de $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, on a $\cos t = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 t}} = \sqrt{\frac{(1 - u^2)}{(1 + u^2)^2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

Puis $\sin t = \cos t \tan t = \frac{1-u^2}{1+u^2} \frac{2u}{1-u^2} = \frac{2u}{1+u^2}$

7 Principe de fusion

$$A \cos x + B \sin x \longrightarrow C \cos(x - \varphi)$$

Si A ou B est non-nul, on écrit :

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x \right)$$

Puis on détermine φ tel que $\begin{cases} \cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ \sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{cases}$.

Méthode 1 1. • *L'un au moins des coefficients de x_1 est non-nul. On en choisit un, que l'on appellera premier pivot, et supposons qu'il se situe à la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i .*

- *On effectue l'opération élémentaire $L_1 \longleftrightarrow L_i$.*
- *Dorénavant, le système est de la forme*

$$(S_1) \begin{cases} a_{1,1}^{(1)}x_1 + a_{1,2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1,n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} & (L_1) \\ a_{2,1}^{(1)}x_1 + a_{2,2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2,n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} & (L_2) \\ \vdots \\ a_{p,1}^{(1)}x_1 + a_{p,2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{p,n}^{(1)}x_n = b_p^{(1)} & (L_p) \end{cases}$$

où $a_{1,1}^{(1)} \neq 0$

- *Ensuite on effectue les opérations élémentaires suivantes*

$$\forall i \in \{2; \dots; p\} \quad L_i \leftarrow L_i + \frac{\lambda}{a_{i,1}} L_1 \quad \text{ou} \quad L_i \leftarrow a_{i,1} L_i + \lambda L_1 \quad \text{si } a_{i,1} \text{ ne dépend pas d'un paramètre}$$

qui nous permettent d'obtenir le système (S_2) équivalent à (S) donné par

$$(S_2) \begin{cases} a_{1,1}^{(1)}x_1 + a_{1,2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1,n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} & (L_1) \\ a_{2,2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2,n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} & (L_2) \\ \vdots \\ a_{p,2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{p,n}^{(2)}x_n = b_p^{(2)} & (L_p) \end{cases} (S'_2)$$

2. *Dans le système*

$$(S'_2) \begin{cases} a_{2,2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2,n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} & (L_2) \\ \vdots \\ a_{p,2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{p,n}^{(2)}x_n = b_p^{(2)} & (L_p) \end{cases}$$

(a) *soit l'inconnue x_2 apparaît effectivement et donc il existe une certaine ligne où le coefficient de x_2 est non-nul. On utilise alors ce coefficient comme deuxième pivot et on procède alors comme dans 1. On obtient alors un système de la forme*

$$(S''_2) \begin{cases} a_{2,2}^{(3)}x_2 + a_{2,3}^{(3)}x_3 + \dots + a_{2,n}^{(3)}x_n = b_2^{(3)} & (L_2) \\ a_{3,3}^{(3)}x_3 + \dots + a_{3,n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} & (L_3) \\ \vdots \\ a_{p,3}^{(3)}x_3 + \dots + a_{p,n}^{(3)}x_n = b_p^{(3)} & (L_p) \end{cases}$$

où $a_{2,2}^{(3)} \neq 0$. Ainsi le système (S) est équivalent à un système (S_3) de la forme

$$(S_3) \begin{cases} a_{1,1}^{(1)}x_1 + a_{1,2}^{(1)}x_2 + a_{1,3}^{(3)}x_3 + \dots + a_{1,n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} & (L_1) \\ a_{2,2}^{(3)}x_2 + a_{2,3}^{(3)}x_3 + \dots + a_{2,n}^{(3)}x_n = b_2^{(3)} & (L_2) \\ a_{3,3}^{(3)}x_3 + \dots + a_{3,n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} & (L_3) \\ \vdots \\ a_{p,3}^{(3)}x_3 + \dots + a_{p,n}^{(3)}x_n = b_p^{(3)} & (L_p) \end{cases}$$

où $a_{1,1}^{(1)} \neq 0$ et $a_{2,2}^{(3)} \neq 0$.

Les pièges Les pièges ont surtout lieu pour les systèmes à paramètres. Ils sont très délicat et correspondent à faire une opération interdite dans le cas $L_j \leftarrow a_j L_j - a_i L_i$

Il ne faut **surtout** pas que a_j puisse s'annuler et que a_i ait des valeurs interdites (quotient).

Exemple 5 Pour le système en x, y :
$$\begin{cases} (a+1)x + (2a^2 - a - 1)y = 0 \\ (a+2)x + (2a+1)y = 0 \end{cases}$$

On ne peut pas éliminer directement x , car les seules opérations du pivot possibles sont $L_2 \leftarrow (a+1)L_2 - (a+2)L_1$ ou $L_2 \Leftarrow L_2 - \frac{a+2}{a+1}L_1$ (ici $a = -1$ est une valeur qui fait empêcher d'appliquer le pivot)

Vous pouvez éliminer y par pivot, en effet $(2a^2 - a - 1) = (2a+1)(a-1)$, donc l'opération $L_1 \Leftarrow L_1 - (a-1)L_2$ est valable avec L_2 le pivot.

Si vous avez un système à paramètres. Il est plus souvent d'écrire le système sous forme matriciel et d'utiliser le déterminant. Pour cela, allez voir la Fiche 4 : section 4.3.

Quatrième partie

Outils N°4 : Matrice et déterminant

1 Produit matriciel

On a la définition du produit matriciel :

Définition 4 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle produit de A par B , la matrice $C = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ notée AB dont les coefficients sont

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

Cette formule est théorique et n'est utilisée que pour des exercices théoriques.

En pratique, pour faire le produit, on les écrit ainsi :

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 180 & 250 & 150 \end{pmatrix} \begin{matrix} \nearrow 5 \times 3 \\ \nearrow +6 \times 4 \\ \nearrow +3 \times 4 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} 51 & 69 & 97 \\ 2140 & 2820 & 4050 \end{pmatrix} = A \times B$$

2 Inversion de matrices

2.1 Déterminer l'inverse

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ une matrice carré, on résoud l'équation $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, c'est-

à-dire $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n = y_n \end{cases}$ pour obtenir $\begin{cases} x_1 = b_{1,1}y_1 + \dots + b_{1,n}y_n \\ \vdots \\ x_n = b_{n,1}y_1 + \dots + b_{n,n}y_n \end{cases}$

soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ où B est la matrice inverse de A .

Remarque 9 Attention à bien respecter l'ordre de (x_i) et (y_j) (lignes et colonnes du système) pour avoir simplement à lire la matrice B

Exemple 6 Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ x + z = b \\ x + y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + x + y = a \\ y = a - b \\ x + y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = a - c \\ x = -a + b + c \\ y = a - b \end{cases}$$

Donc P est inversible et d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.2 Déterminer l'inverse à partir d'une équation de M

Il suffit d'isoler I à droite de l'équation et de factoriser par M à gauche.

On a une équation polynomial de $M : a_n M^n + \dots + a_1 M + a_0 I = 0$ avec $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$

On a alors $M(a_n M^{n-1} + \dots + a_1 I) = -a_0 I \Leftrightarrow M\left(\frac{a_n}{-a_0} M^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{-a_0} I\right) = I$

Donc M est inversible et d'inverse : $\frac{a_n}{-a_0} M^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{-a_0} I$.

Exemple 7 Soit A telle que $A^3 + 4A - 3I = 0$

Alors $I = \frac{1}{3}(A^3 + 4A) = \frac{1}{3}(A^2 - 4I)A$

Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 - 4I)$.

3 Puissance de matrices

3.1 Puissance d'une matrice $A = PBP^{-1}$

Faire une récurrence :

Rédaction 1 Notons $\mathcal{P}_n : A^n = PB^n P^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$

$$A^0 = I \quad ; \quad PB^0 P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

Donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Supposons \mathcal{P}_n vraie.

Nous avons $A^n = PB^n P^{-1}$

Or $A^{n+1} = A^n \times A = PB^n P^{-1} PBP^{-1} = PB^n B P^{-1} = PB^{n+1} P^{-1}$

Donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \geq 0$, $A^n = PB^n P^{-1}$.

Il reste à calculer B^n :

- Si B est diagonale, c'est à dire

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Alors

$$B^n = \begin{pmatrix} a_{1,1}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & & a_{p,p}^n \end{pmatrix}$$

- Si B est triangulaire, alors on peut écrire $B = D + N$ avec $DN = ND$, on se ramène au calcul de puissance de la section 3.2

3.2 Puissance d'une matrice $A = D + N$, avec $DN = ND$

On utilise la formule du binôme :

$$A^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$$

Mais il faut **absolument** indiquer que $DN = ND$

Remarque 10 • Dans la plupart des cas, il existe un entier p tel que $N^p = 0$. Ce qui simplifie énormément la résolution pour $n \geq p$.

Par exemple pour $N^3 = 0$, on obtient :

$$\forall n \geq 3, A^n = \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} N D^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 D^{n-2}$$

- Ce n'est pas toujours le cas, mais souvent on aura calculer les puissances $n^{\text{ième}}$ de D ou N précédemment.
- Pour la formule du binôme de Newton, on préfère toujours mettre le N^k plutôt N^{n-k} .

Exemple 8 • Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n

On a $A = 3I_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus $3I_2 N = 3N = N 3I_2$ et $N^2 = 0_2$, ainsi, pour tout $k \geq 2$, $N^k = N^2 N^{k-2} = 0_2$

Par binôme de Newton,

$$\begin{aligned} A^n &= (3I_2 + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (3I_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} N^k \\ &= \binom{n}{0} 3^n I_2 + \binom{n}{1} 3^{n-1} N + 0 = 3^n I_2 + n 3^{n-1} N \\ &= 3^n \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3}n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer B^n

On a $A = I_2 + U$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus $I_2 U = U = U I_2$ et $U^2 = 2U$, ainsi, par récurrence, pour tout $k \geq 1$, $U^k = 2^{k-1}U$
Par binôme de Newton,

$$\begin{aligned} B^n &= (I_2 + U)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U^k (I_2)^{n-k} = \binom{n}{0} I_2 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} U \\ &= I_2 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k \right) \frac{1}{2} U = I_2 + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} - 1 \right) \frac{1}{2} U \\ &= I_2 + \frac{3^n - 1}{2} U \end{aligned}$$

3.3 Puissances d'une matrice A sachant $P(A)$ où P est un polynôme

Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P est de la forme

$$X^n = Q_n P + R_n \quad \deg(R_n) < \deg(P) \quad (3)$$

On utilisera la méthode de la Fiche 6 : section 2.2

Puis on pose $X = A$ (**ne pas oublier** de changer le 1 en I) et on obtient
 $A^n = 0 + R_n(A)$

Exemple 9 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a $A^2 = 3A - 2I$

Considérons la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$, pour n fixé.

Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^n = (X - 1)(X - 2)Q + aX + b$

Pour $X = 1$, on a $1^n = 0 + a + b$ et pour $X = 2$, $2^n = 2a + b$

$$\text{Ainsi } \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n \end{cases}$$

On a donc $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + (2^n - 1)X + 2 - 2^n$

Et pour $X = A$, $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$

3.4 Divination de A^n

Calculer A^2, A^3, A^4 pour trouver une formule générique de A^n et la montrer par récurrence.

Exemple 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A^2 = 2A$, $A^3 = 4A$

Montrons que $A^n = 2^{n-1}A$ pour $n \geq 1$

- Initialisation : $n = 1$, on a $2^{1-1}A = A = A^1$
- Hérédité : Supposons que $A^n = 2^{n-1}A$ pour n fixé.
 $A^{n+1} = A^n A = 2^{n-1}A^2 = 2^{n-1}(2A) = 2^{(n+1)-1}A$
- Conclusion : par principe de récurrence, on a $A^n = 2^{n-1}A$ pour $n \geq 1$

4 Matrices, systèmes et déterminant

4.1 Déterminant

Définition 5 Soit A une matrice de taille $n \times n$ telle que $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

On pose $A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

On appelle déterminant de A , $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$

Avec pour convention $\det \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = ad - bc$

Remarque 11 Pour simplifier un déterminant (en faisant apparaître de nombreux zéros), on peut effectuer des méthodes similaires au pivot de Gauss :

- Fixer une colonne C_i et effectuer les opérations $C_j \leftarrow \mathbf{1}C_j - \alpha_j C_i$, pour $j \neq i$
- Fixer une ligne L_i et effectuer les opérations $L_j \leftarrow \mathbf{1}L_j - \beta_j L_i$, pour $j \neq i$
- Si une colonne peut s'écrire $C_i = \alpha C'_i$, on peut sortir α du déterminant et le mettre en facteur d'un déterminant où C_i est remplacé par C'_i
- Si une ligne peut s'écrire $L_i = \alpha L'_i$, on peut sortir α du déterminant et le mettre en facteur d'un déterminant où L_i est remplacé par L'_i
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients sur la diagonale.

Exemple 11 Déterminer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda & 1 \\ \lambda+2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ &= (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \quad (\lambda+2) \text{ multiple commun de } C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \quad L_i \leftarrow L_i - L_1 \text{ pour } i \geq 2 \\ &= (\lambda+2)(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

4.2 Utilisation du déterminant

Le déterminant sert à vérifier qu'une matrice est inversible ou non :

- Si $\det(A) = 0$, A n'est pas inversible.
- Si $\det(A) \neq 0$, A est inversible.

4.3 Système homogène à paramètre.

On cherche à résoudre un système de la forme $A_k X = 0$, avec $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dépendant du paramètre k .

Pour cela, il suffit de déterminer $\det(A_k)$ comme fonction en k .

Pour tout k tel que $\det(A_k) \neq 0$, il y a une unique solution 0.

Sinon, effectue le pivot pour les autres k (qui sont des valeurs particulières).

Exemple 12 Résoudre le système
$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

On obtient $AX = 0$ avec $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Comme $\det(A) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$.

- Pour $\lambda \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$, La solution est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Pour $\lambda = -2$, on a le système
$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$$

Donc les solutions sont l'espace vectoriel $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- Pour $\lambda = 1$, on a le système
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y - z$$

Donc les solutions sont l'espace vectoriel $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Cinquième partie

Outils N°5 : Équivalents et Développements limités

1 Les limites

1.1 Généralité

Limites des fonctions de référence

le logarithme : Ensemble de définition : $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

l'exponentiel : Ensemble de définition : \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Formes indéterminées Les formes indéterminées sont ‘

$$\infty - \infty \quad ; \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad ; \quad 0 \times \pm\infty \quad ; \quad \frac{0}{0}$$

Remarque 12 On peut souvent conclure une forme indéterminée par les règles de comparaison suivante :

- L'exponentiel $x \mapsto e^{ax}$ impose sa limite sur les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$
- Les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ impose sa limite sur les fonctions logarithmes $x \mapsto \ln(P(x))$ avec P un polynôme.
- L'exponentiel $x \mapsto e^{ax}$ impose sa limite sur les fonctions logarithmes $x \mapsto \ln(P(x))$ avec P un polynôme.

Vous ne pouvez utiliser ceci **QUE** pour des limites de forme indéterminée.

On peut résumer par cela :

$$\text{Pour une F.I., } \ln \ll x^\alpha \ll e^x$$

2 Équivalent et négligeabilité

2.1 Définitions

Définition 6

- f est négligeable devant g en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ ssi $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

On note $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$.

- f et g sont équivalente en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ ssi $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

On note $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.

On utilise aussi $f(x) \underset{a}{=} g(x) + o(g(x))$

2.2 Règle de négligeabilité

Pour simplifier la notation $f \ll g$ veut dire $f = o(g)$.

en $+\infty$:

$$\begin{array}{ccccccc} (\ln x)^\beta & \ll & x^\alpha & \ll & x^\gamma & \ll & e^{ax} \quad (q^x = e^{x \ln q}) \\ \beta > 0 & & \alpha > 0 & & \gamma > \alpha & & a > 0 \end{array}$$

en 0 :

$$\begin{array}{ccccccc} (\ln x)^\beta & \ll & x^\alpha & \ll & x^\gamma \\ \beta > 0 & & \alpha > 0 & & \gamma < \alpha \end{array}$$

2.3 Règles de calculs avec $o(u)$ pour $u \rightarrow 0$

- ▶ Additions de o .
 - $o(u^n) - o(u^n) = o(u^n)$ (on ne simplifie jamais les o !)
 - $o(u^n) + o(u^n) = o(u^n)$
 - $o(u^n) + o(u^p) = o(u^p)$ pour tout $0 \leq p \leq n$
 - $\lambda o(u^n) = o(\lambda u^n) = o(u^n)$ avec $\lambda \neq 0$.
- ▶ Multiplication de o .
 - $u^n \times o(1) = o(u^n)$
 - $u^p \times o(u^q) = o(u^{p+q})$
 - $o(u^p) \times o(u^q) = o(u^{p+q})$.
- ▶ Quotient et o .
 - $\frac{o(u^q)}{u^p} = o(u^{q-p})$

2.4 équivalents usuels en 0

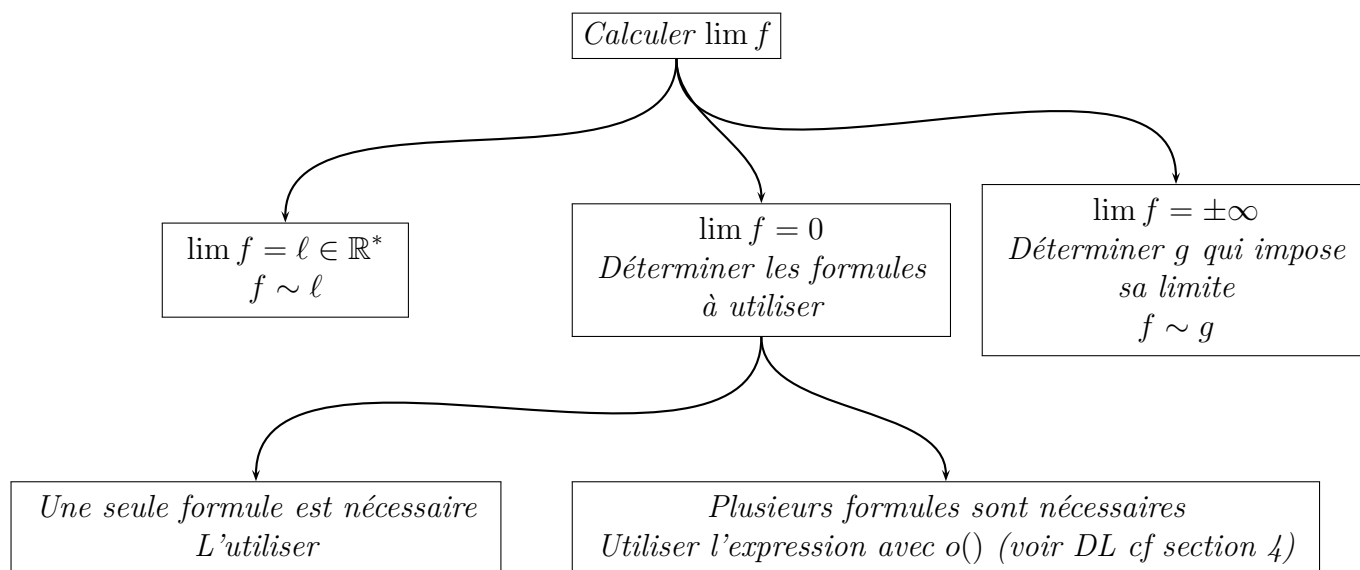
Equivalent	$o()$
$e^x - 1 \sim x$	$e^x = 1 + x + o(x)$
$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+x) = x + o(x)$
$\sin x \sim x$	$\sin x = x + o(x)$
$\tan x \sim x$	$\tan x = x + o(x)$
$\cos(t) - 1 \sim -\frac{t^2}{2}$	$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
$\operatorname{sh} x \sim x$	$\operatorname{sh} x = x + o(x)$
$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}^*$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$

3 Détermination d'un équivalent

Méthode 2

1. Si ramener à 0 par changement de variable
Si l'équivalent est en a , $x = u + a$ et en $+\infty$, $x = \frac{1}{u}$
2. Mettre au même dénominateur et factoriser au maximum l'expression.

3. Pour chaque terme f de l'expression :



Exemple 13 Equivalent de $f(x) = \frac{x^2 + \ln x - 3}{x - \sqrt{e^{2x} - 3}}$ en $+\infty$.

On a $f(x) = \frac{x^2 + \ln x - 3}{x - \sqrt{e^{2x} - 3}} \underset{\infty}{\sim} \frac{x^2}{-\sqrt{e^{2x}}} = -\frac{x^2}{e^x}$.

4 Développements limités (DL)

4.1 Formule classique en 0 :

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \alpha \in \mathbb{R}$.

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$

4.2 En dehors de 0 :

Il faut se ramener à 0 par changement de variables :

en $a \in \mathbb{R}$: Poser $t = x - a$.

en $+\infty$ ou $-\infty$: Poser $t = \frac{1}{x}$.

4.3 Produit et composée de DL

Produit : $f_1 \times f_2 \times \dots \times f_p$

- Commencer par déterminer le $o()$ du calcul en regardant chaque $o()$ multiplier par les termes de tête des autres facteurs
- Développer les expressions en s'arrêtant au $o()$ précédent.

Exemple 14 $f(x) = (x + x^2 + o(x^2))(1 + 2x^2 + o(x^2))(2 - x + o(x))$

Le calcul des $o()$ donne $o(x^2) \times 1 \times 2 = o(x^2)$, $x \times o(x^2) \times 2 = o(x^3)$ et $x \times x \times o(x) = o(x^3)$ (vous n'avez pas besoin d'écrire cela sur la copie).

On a $f(x) = (x + x^2)(x + 2x^2)(2 - x) + o(x^2) = (x^2)(2 - x) + o(x^2) = 2x^2 + o(x^2)$

Composée : $f \circ g$

- On doit avoir $g(x) = x^p + \dots + o(x^n)$
- Si le début du DL de f est $f(u) = a_0 + a_k u^k + \dots$, alors l'ordre de notre DL sera $o(x^{(k-1)p+n})$ (cf le produit de g^k du paragraphe précédent)
- Ecrire le DL de f en 0 à l'ordre calculé en remplaçant tout les u par l'expression de g sans le $o()$ et développer.

Remarque 13 L'expression $o(x^{(k-1)p+n})$ nous permet d'optimiser l'ordre des DL nécessaires. Mais c'est assez compliquer de sans souvenir. Faites le DL à l'ordre de départ si vous avez du mal à le voir.

Exemple 15 $DL_5(0)$ de $\cos(\ln(1+x))$

On a $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$ et $\cos(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 + o(u^5)$

Donc

$$\begin{aligned}
 \cos(\ln(1+x)) &= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right)^2 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right)^4 + o(x^5) \\
 &= 1 - \frac{1}{2}x^2 \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 \right)^2 + \frac{1}{24}x^4 \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 \right)^4 + o(x^5) \\
 &= 1 - \frac{1}{2}x^2 \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 \right)^2 + \frac{1}{24}x^4 \left(1 - \frac{1}{2}x \right)^4 + o(x^5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\ln(1+x)) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 \left(1 - \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{4}x^3 - \frac{1}{3}x^3\right) + \frac{1}{24}x^4(1 - \frac{4}{2}x) + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 \left(1 - x + \frac{5}{12}x^2 - \frac{5}{6}x^3\right) + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^5 + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

4.4 Division de deux DL

Pour le quotient $\frac{f}{g}$, factoriser g par le premier terme de DL pour faire apparaître un facteur $\frac{1}{1 - (\dots)}$ et utiliser la composition du DL de $\frac{1}{1-u}$ de la section précédente.

Exemple 16 $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$

Pour cela, il est nécessaire de faire un $DL_4(0)$ des expressions classiques (Cf 4.5).

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} &= \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)} = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}{x(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3))} \\
&= \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)} \\
&= (1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3))(1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

4.5 Choisir l'ordre du DL

Nous avons une expression factoriser $A(x) = \frac{\prod_{i=1}^p f_i(x)}{\prod_{i=1}^p g_i(x)}$ et on souhaite un $DL_n(0)$

- D'abord déterminer un équivalent de $A(x)$ de la forme αx^m
- Considérer l'ordre réduit $n' = n - m$
- Pour chaque facteur f_i (ou g_i), on a un équivalent $\alpha_i x^{m_i}$ déterminer tout à l'heure.
On doit effectuer un $DL_{n_i}(0)$ tel que $n_i = n' + m_i$

Remarque 14

Si les f_i ou g_i ont pour équivalent $\alpha_i x^{m_i}$

Alors, pour un $DL_k(0)$ de f_i , on a $f_i = \alpha_i x^{m_i} + \dots + o(x^k) = \alpha_i x^{m_i} (1 + \dots + o(x^{k-m_i}))$ par factorisation.

De plus $f_i \times f_j = \alpha_i x^{m_i} (1 + \dots + o(x^{k-m_i})) \times \alpha_j x^{m_j} (1 + \dots + o(x^{k-m_j})) = \alpha_i \alpha_j x^{m_i+m_j} (1 + \dots + o(x^{\min(k-m_i, k-m_j)}))$ par les règles de $o()$

On fait en sorte que $k - m_i = k - m_j = n'$. Reste à choisir n' .

Comme pour chaque facteur avec un $o()$, on aura $(1 + \dots + o(x^{n'}))$, au final, $f = \alpha x^m (1 + \dots + o(x^{n'})) = \alpha x^m + \dots + o(x^{m+n'})$.

On trouve bien $m + n' = n$ l'ordre souhaité.

Exemple 17 On veut un $DL_5(0)$ de $f(x) = \frac{\sin(x) \tan(x)}{\cos(x) \operatorname{ch}(x)}$

On a $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x \times x}{1 \times 1} = x^2$

L'ordre réduit est donc $5 - 2 = 3$

- pour $\sin(x) \sim x$, il faut un $DL_{3+1}(0)$, c'est-à-dire $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$
- pour $\tan(x) \sim x$, il faut un $DL_{3+1}(0)$, c'est-à-dire $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$
- pour $\cos(x) \sim 1$, il faut un $DL_{3+0}(0)$, c'est-à-dire $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$
- pour $\operatorname{ch}(x) \sim 1$, il faut un $DL_{3+0}(0)$, c'est-à-dire $\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$

On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4))(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4))}{(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3))(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3))} = \frac{x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^5)}{1 + o(x^3)} \\ &= (x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^5))(1 + o(x^3)) = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^5) \end{aligned}$$

5 Utilisation des DL

5.1 Continuité ou dérivabilité

- Pour justifier qu'une fonction f est continue en un point a (ou prolongeable par continuité en a), il suffit de montrer que f admet un $DL_0(a)$.

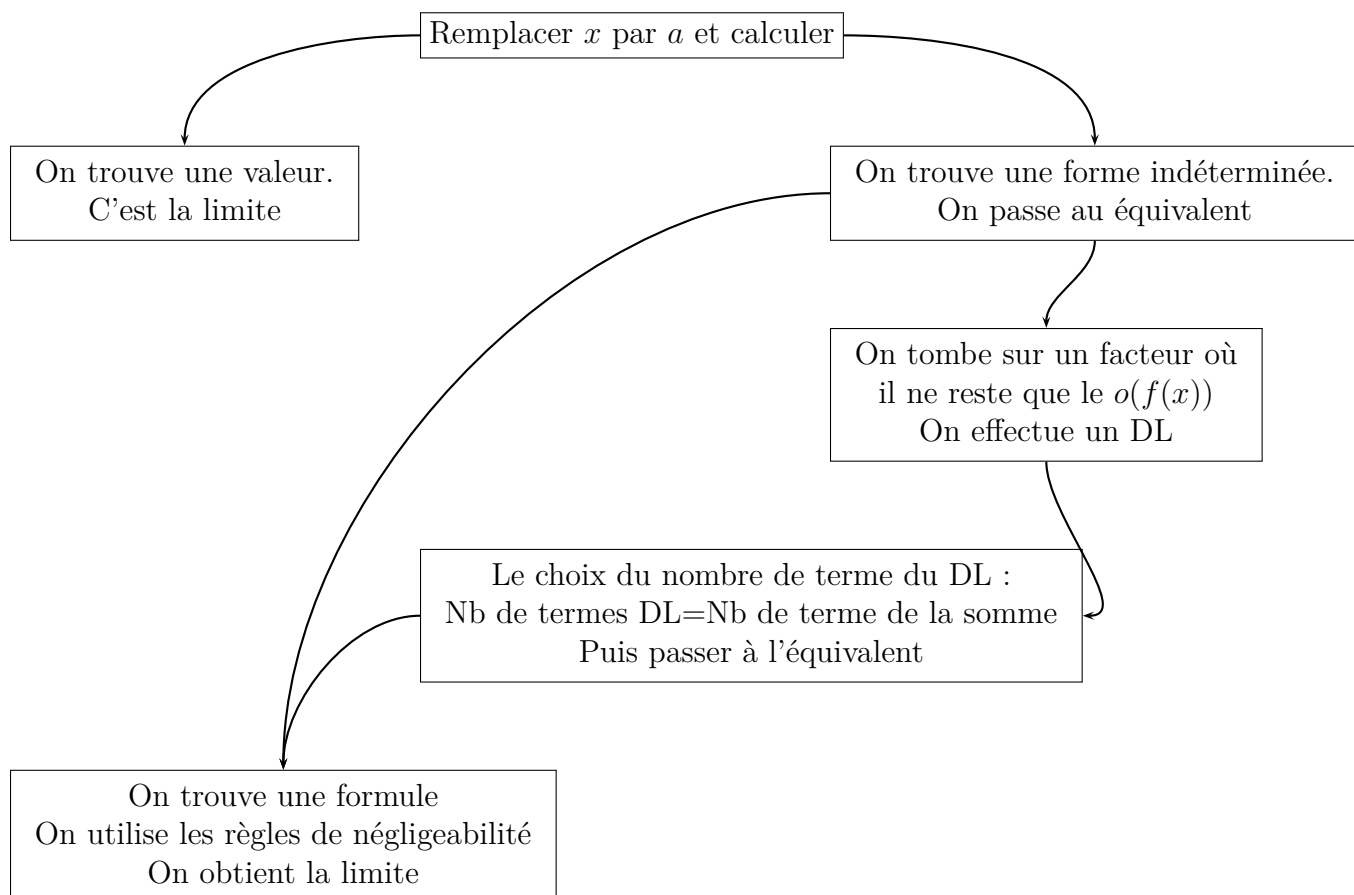
$$\text{On a alors } f(x) = f(a) + o(1)$$

- Pour justifier qu'une fonction f est C^1 en un point a (ou prolongeable en une fonction dérivable en a), il suffit de montrer que f admet un $DL_1(a)$.

$$\text{On a alors } f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$

5.2 Détermination d'une limites

Suivre l'arbre ci-dessous : on veut calculer $\lim f(x)$ en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.



Sixième partie

Outils N°6 : Polynômes

1 Identité remarquable

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \text{ avec } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j$$

2 Division euclidienne

Définition 7 Soit A et B deux polynômes, alors il existe une unique paire de polynôme (Q, R) telle que

$$A = QB + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(Q).$$

2.1 Par le calcul

On pose la division en la faisant monôme par monôme. c'est-à-dire on regarde le monôme de plus haut degré de A ($a_n X^n$) et de B ($b_p X^p$)

On conserve $\frac{a_n}{b_p} X^{n-p}$ pour Q et on remplace A par $A - \frac{a_n}{b_p} X^{n-p} B$

Puis on réitère jusqu'à ce que $n < p$.

Exemple 18 Division de $x^4 + 2x + 4$ par $x^2 + 2$

$$\begin{array}{r} x^4 \quad \quad +2x \quad +4 \\ -2x^2 \quad +2x \quad +4 \\ \hline \quad \quad \quad 2x \quad +8 \end{array} \left| \begin{array}{l} x^2 + 2 \\ x^2 - 2 \end{array} \right.$$

Alors on a $x^4 + 2x + 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2) + 2x + 8$

2.2 Pour trouver le reste

On cherche le reste de la division euclidienne de A par B

On pose R , ce reste, de manière générique $R = a_0 + a_1 X + \dots + a_{p-1} X^{p-1}$ avec $p = \deg(B)$.

On factorise B au maximum et on remplace X par les racines α de B et on a alors une équation $A(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_{p-1} \alpha^{p-1}$. Si B admet des racines uniques, dérivée l'expression $A = BQ + R$ et remplacer X par la racine pour trouver une autre équation.

Au final, vous aurez p équations et un pivot de Gauss permettra de trouver les a_i

Exemple 19 Soit $A = X^n + X + 3$ et $B = (X + 1)(X - 1)^2$

On pose $R = aX^2 + bX + C$ et $A = BQ + aX^2 + bX + C$

Pour $X = -1$, $(-1)^n + 2 = a - b + c$

Pour $X = 1$, $5 = a + b + c$.

Or 1 est racine double de B , elle annule B et B' , en dérivant $A = BQ + R$, on a

$$nX^{n-1} + 1 = Q'B + B'Q + 2aX + b$$

Donc pour $X = 1$, $n + 1 = 2a + b$

On obtient le système :

$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ a - b + c = (-1)^n + 2 \\ 2a + b = n + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + b + a = 5 \\ 2a + b = n + 1 \\ 2b = 3 - (-1)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2n-1+(-1)^n}{4} \\ b = \frac{3-(-1)^n}{2} \\ c = \frac{15-2n+(-1)^n}{4} \end{cases}$$

Donc le reste de la division euclidienne est $R = \frac{2n-1+(-1)^n}{4}X^2 + \frac{3-(-1)^n}{2}X + \frac{15-2n+(-1)^n}{4}$.

3 Racine d'un polynôme

Définition 8 • Un élément $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine ou zéro du polynôme A si $A(\alpha) = 0$.

$$\bullet \alpha \text{ est racine d'ordre } m \text{ de } P \Leftrightarrow \begin{cases} P^{(k)}(\alpha) = 0, & \text{pour tout } k \in \{0, \dots, m-1\} \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0. \end{cases}$$

Proposition 2 • Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont p racines distinctes de A , alors A est divisible par

$$\prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)$$

• Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont p racines distinctes de A de multiplicité respectives m_1, \dots, m_p . Alors $\prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)^{m_i} | A$.

Corollaire 1 • Si A est de degré n et admet n racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, alors

$$A = \lambda \prod_{i=1}^n (X - a_i)$$

où λ est le coefficient dominant de A .

• Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ de coefficient dominant a . Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont p racines distinctes de A de multiplicité respectives m_1, \dots, m_p telles que $\sum_{i=1}^p m_i = \deg A$. Alors,

$$A = a \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)^{m_i} = a(X - \alpha_1)^{m_1} \dots (X - \alpha_p)^{m_p}.$$

4 Factorisation

4.1 Racines évidentes

Elle consiste à chercher une solution évidente. Si on considère un polynôme de la forme $X^n + \dots + a_2X^2 + a_1X + a_0$, alors cette solution évidente doit diviser a_0 . On la recherche en particulier dans les valeurs suivantes : 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 (à tester dans cet ordre).

On trouve alors une racine α et on écrit

$$X^n + \dots + a_2X^2 + a_1X + a_0 = (X - \alpha)(X^{n-1} + \dots + \beta_1X - \frac{a_0}{\alpha}),$$

Pour trouver $X^{n-1} + \dots + \beta_1X - \frac{a_0}{\alpha}$, on peut soit effectuer la division euclidienne (section 2.1) soit en devinant la forme du polynôme (on connaît déjà les coefficients extrêmes) et en développant pour trouver les paramètres.

Exemple 20 Factoriser $P = X^3 - 13X^2 + 47X - 35$

1 est une racine évidente.

Ainsi $\exists b \in \mathbb{R}$ tel que $P = (X - 1)(X^2 + bX + 35)$

Le coefficient en X^2 est $-13 = b - 1$,

Par conséquent, $P = (X - 1)(X^2 - 12X + 35)$

Le discriminant de $X^2 - 12X + 35$ est $\Delta = 4$ de racines 5 et 7

Donc $P = (X - 1)(X - 5)(X - 7)$

4.2 Méthode dans \mathbb{C}

4.2.1 Factorisation de $P = X^n - a$

On utilise les racines n -ième de l'unité (Voir Fiche 1 : sections 2.1 et 2.2

Il suffit de résoudre $P(z) = 0$ pour trouver toutes les racines de P dans \mathbb{C}

Exemple 21 Factoriser $P = 3X^3 + 24$

Réolvons $3z^3 + 24 = 0$

On a $z^3 = -8 = 2^3 e^{i\pi} = (2e^{i\pi/3})^3$

Ainsi $\left(\frac{z}{2e^{i\pi/3}}\right)^3 = 1$

Donc $\frac{z}{2e^{i\pi/3}} = e^{i2k\pi/3}$, $k \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$, soit $z = 2e^{i(2k+1)\pi/3}$

On a trouvé trois racines distinctes de P .

On en conclue que $P = 3 \prod_{i=0}^2 (X - 2e^{i(2k+1)\pi/3})$.

4.2.2 Factorisation d'un polynôme de degré 2 à coefficient dans \mathbb{C}

On utilise les méthode de la Fiche 1 : section 2.4, en résolvant $P(z) = 0$

Exemple 22 Factoriser $P = iX^2 + (1 - 5i)X + 6i - 2$

Réolvons $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$

Le discriminant est $\Delta = (1 - 5i)^2 - 4i(6i - 2) = -2i = 2e^{-\frac{i\pi}{2}} = \delta^2$

On pose $\delta = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} = 1 - i$.

Les racines sont 2 et $3 + i$.

Ainsi $P = i(X - 2)(X - (3 + i))$.

4.3 Factorisation dans \mathbb{R}

4.3.1 Méthode classique :

Une méthode simple est de factoriser dans \mathbb{C} puis de développer les termes de la forme $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$.

Cette méthode n'est sûrement pas la plus efficace.

Exemple 23 Factoriser $X^4 + X^2 + 1$

Pour $Y = X^2$, on obtient le polynôme $Y^2 + Y + 1$ de racine $e^{2i\pi/3}$ et $e^{4i\pi/3}$

Donc $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - e^{2i\pi/3})(X^2 - e^{4i\pi/3}) = (X - e^{i\pi/3})(X + e^{i\pi/3})(X - e^{2i\pi/3})(X + e^{2i\pi/3})$

Comme le polynôme est à coefficients réelles, on a $X^4 + X^2 + 1 = (X - e^{i\pi/3})(X - e^{i\pi/3})(X + e^{i\pi/3})(X + e^{i\pi/3})$

Donc $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - 2\cos\frac{\pi}{3}X + 1)(X^2 + 2\cos\frac{\pi}{3}X + 1) = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$.

4.3.2 Cas particulier $X^4 + pX^2 + q$ avec $\Delta = p^2 - 4q < 0$:

Dans ce cas, on $X^4 + q$ sous la forme $(X^2 + \sqrt{q})^2 - 2\sqrt{q}X^2$

On obtient alors le polynôme $(X^2 + \sqrt{q})^2 - (2\sqrt{q} - p)X^2$ et on reconnaît $a^2 - b^2$.

Exemple 24 $X^4 + X^2 + 1 = (X^4 + 1) + X^2 = ((X^2 + 1)^2 - 2X^2) + X^2 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$.

4.3.3 Polynômes symétriques de degré paire : $P = a_{2n}X^{2n} + \dots + a_0$ tel que $a_{2n-k} = a_k$

On pose $Y = X + \frac{1}{X}$, on factorise P par X^n puis on écrit le quotient à l'aide de Y .

On factorise le polynôme en Y , et on distribue les X de X^n sur les facteurs en Y (1 par facteur), $XY = X^2 + 1$

Exemple 25 $P = X^6 + X^4 + X^2 + 1 = X^3(X^3 + X + \frac{1}{X} + \frac{1}{X^3})$ Or $Y^3 = X^3 + \frac{1}{X^3} + 3(X + \frac{1}{X})$
Donc $P = X^3(Y^3 - 3Y + Y) = X^3(Y^3 - 2Y) = X^3Y(Y - \sqrt{2})(Y + \sqrt{2}) = (XY)(XY - \sqrt{2}X)(XY + \sqrt{2}X) = (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$

5 Montrer qu'un polynôme est nul

Pour montrer qu'un polynôme de degré n est nul, on peut

1. Soit montrer qu'il admet $n + 1$ racines distinctes.
2. Soit montrer qu'il a une infinité de racines.

Remarque 15 On peut utiliser cette propriété pour justifier l'unicité de polynôme en considérant la différence des polynômes.

Exemple 26 Montrer qu'il existe un unique polynôme P_5 tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P_5(\cos(x)) = \cos(5x)$

- Pour l'existence : on a $\cos(5x) = \operatorname{Re}(e^{i5x})$

$$\text{Or } e^{i5x} = (e^{ix})^5 = (\cos x + i \sin x)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (i \sin x)^k \cos^{5-k} x$$

$$\text{Ainsi } \cos(5x) = \binom{5}{0} \cos^5 x - \binom{5}{2} \sin^2 x \cos^3 x + \binom{5}{4} \sin^4 x \cos x = \cos^5 x - 10(1 - \cos^2 x) \cos^3 x + 5(1 - \cos^2 x)^2 \cos x$$

$$\text{On peut poser } P_5 = X^5 - 10(1 - X^2)X + 5(1 - X^2)^2 X$$

- Pour l'unicité : soit Q un polynôme tel que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(\cos(x)) = \cos(5x)$

On a $\forall \alpha \in [-1; 1]$, Posons $x = \arccos(\alpha)$.

$$Q(\alpha) = \cos(5x) = P_5(\alpha)$$

$$\text{Donc } (Q - P_5)(\alpha) = 0$$

$Q - P_5$ admet une infinité de racines.

On en conclue que $Q - P_5 = 0$, soit $Q = P_5$.

6 Décomposition d'une fraction rationnelle

Méthode 3 Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle à coefficients dans \mathbb{R} (c'est-à-dire que P et Q sont deux polynômes à coefficients dans \mathbb{R} , avec $Q \neq 0$).

La décomposition en produit de facteurs irréductibles du dénominateur Q s'écrit :

$$\lambda(X - a_1)^{p_1} \dots (X - a_k)^{p_k} (X^2 + b_1X + c_1)^{q_1} \dots (X^2 + b_\ell X + c_\ell)^{q_\ell} \quad (4)$$

où

- * les a_i et λ sont des réels
- * les p_i et q_j sont des entiers strictement positifs,
- * les b_j, c_j sont des réels tels que $b_j^2 - 4c_j < 0$ (c-à-d que l'on ne peut pas factoriser plus dans \mathbb{R}).

Cette fraction $\frac{P}{Q}$ peut alors s'écrire, **de manière unique** sous la forme d'une somme :

- d'un polynôme E , qui s'appelle la **partie entière** de $\frac{P}{Q}$ (c'est le quotient de la division euclidienne de P par Q),
- de fractions de la forme $\frac{d_{ir}}{(X - a_i)^r}$, avec $1 \leq r \leq p_i$ et d_{ir} des constantes réelles. Ces fractions s'appellent des **éléments simples de première espèce**,
- de fractions de la forme $\frac{e_{js}X + f_{js}}{(X^2 + b_jX + c_j)^s}$, avec $1 \leq s \leq q_j$ et e_{js} et f_{js} des constantes réelles.

Ces fractions s'appellent des **éléments simples de seconde espèce**.

Il reste à déterminer les constantes. Les différentes méthodes sont l'identification, la multiplication par un facteur et remplacer t par un racine du facteur, les équivalents, le choix de certaines valeurs de X , la parité, ...

A vous de choisir la plus efficace.

Remarque 16 • Pour se rappeler le nombre de variables à introduire, vous en avez autant que le degré de Q .

- En pratique, Q est simplement scindé à racines simples, c'est-à-dire

$$Q = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n) \text{ avec } \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$$

On a alors $\frac{P}{Q} = E + \frac{a_1}{X - \alpha_1} + \dots + \frac{a_n}{X - \alpha_n}$, $a_i \in \mathbb{R}$

Et pour calculer a_1 , on multiplie par $X - \alpha_1$ l'expression pour avoir

$$\frac{P}{(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n)} = A_1 + (X - \alpha_1) \left(E + \dots + \frac{a_n}{X - \alpha_n} \right)$$

Et pour $X = \alpha_1$, on trouve la valeur de a_1

Exemple 27 Décomposer : $\frac{X^2 - X + 1}{X^2(X^2 + 1)^2}$

Comme $\deg(X^2 - X + 1) < \deg(X^2(X^2 + 1)^2)$, la partie entière E est nulle.

Il existe donc a, b, c, d, e et f des réels tels que $\frac{X^2 - X + 1}{X^2(X^2 + 1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX + d}{X^2 + 1} + \frac{eX + f}{(X^2 + 1)^2}$

- Pour b : on multiplie par X^2 et pour $X \rightarrow 0$: $\frac{X^2 - X + 1}{(X^2 + 1)^2} = aX + b + X^2 \left(\frac{cX + d}{X^2 + 1} + \frac{eX + f}{(X^2 + 1)^2} \right)$

Et ainsi $1 = b$

- Pour e et f : on multiplie par $(X^2 + 1)^2$ et pour $X \rightarrow i$:

$$\frac{X^2 - X + 1}{X^2} = (cX + d)(X^2 + 1) + eX + f + (X^2 + 1)^2 \left(\frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} \right)$$

Alors $\frac{-i}{-1} = ei + f$, $e = 1$ et $f = 0$

- Pour a, c et d , il faut trois équations :

— On peut prendre $X = 1$, et on a : $\frac{1}{4} = a + b + \frac{1}{2}(c + d) + \frac{1}{4}(e + f) \Leftrightarrow 2a + c + d = -2$

— On peut prendre $X = -1$, et on a :

$$\frac{3}{4} = -a + b + \frac{1}{2}(-c + d) + \frac{1}{4}(-e + f) \Leftrightarrow -2a - c + d = 0$$

— On peut faire un équivalent en $+\infty$, et on a $\frac{X^2 - X + 1}{X^2(X^2 + 1)^2} \sim \frac{1}{X^4}$ et

$$\frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX + d}{X^2 + 1} + \frac{eX + f}{(X^2 + 1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{c}{X} + o\left(\frac{1}{X}\right)$$

Ainsi $a + c = 0$

On obtient le système $\begin{cases} 2a + c + d = -2 \\ -2a - c + d = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -1 \\ a = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

Donc $\frac{X^2 - X + 1}{X^2(X^2 + 1)^2} = \frac{-1}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{X - 1}{X^2 + 1} + \frac{X}{(X^2 + 1)^2}$

Septième partie

Outils N°7 : Réurrence

1 Ordre d'une relation de récurrence

Définition 9 Soit p un entier naturel non nul.

Soit g_n une application de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^p$ à valeur dans \mathbb{R} .

On appelle relation de récurrence d'ordre p d'une suite (u_n) la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = g_n(u_n, \dots, u_{n+p-1})$$

Pour déterminer l'ordre d'une relation de récurrence, il faut trouver l'indice le plus petit n_0 et l'indice le plus grand n_1 . L'ordre est simplement $n_1 - n_0$.

2 Réurrence classique

Proposition 3 Soit n_0 un entier positif. Supposons que \mathcal{P}_{n_0} est vraie. Si $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}_n$ est vraie implique \mathcal{P}_{n+1} alors $\forall n \geq n_0$ la propriété \mathcal{P}_n est vraie.

Le principe de récurrence est principalement une méthode de rédaction.

Etape 1 : Ecrire une initialisation, il faut tester la formule à démontrer pour la première valeur de n .

Etape 2 : Ecrire l'hérédité, il faut supposer la formule pour un n donné.

Le but sera de montrer la formule au rang $n + 1$.

Pour cela, on écrit une relation de récurrence (sur la partie de gauche en générale). Après on applique la formule que l'on a supposée.

Si vous n'obtenez pas tout de suite la formule du rang $n + 1$, il sera nécessaire de faire la différence entre ce que vous avez trouvé et ce que vous voulez avoir et de calculer le signe.

Etape 3 : Conclure la récurrence.

Exemple 28 On veut montrer que $\forall n \geq 3, n! \geq 2 \times 3^{n-2}$

Initialisation : Pour $n = 3$,

$$3! = 6 \text{ et } 2 \times 3^{3-2} = 6.$$

$$\text{Donc } 3! \geq 2 \times 3^{3-2}$$

Hérédité : Supposons que $n! \geq 2 \times 3^{n-2}$ pour n donné.

$$\text{Montrons que } (n+1)! \geq 2 \times 3^{(n+1)-2}.$$

$$\text{On a } (n+1)! = (n+1)n!$$

$$\text{Or } n! \geq 2 \times 3^{n-2}$$

$$\text{Donc } (n+1)! \geq (n+1)2 \times 3^{n-2}.$$

$$\text{Considérons } (n+1)2 \times 3^{n-2} - 2 \times 3^{(n+1)-2} = 2 \times 3^{n-2}(n+1-3) = 2 \times 3^{n-2}(n-2) > 0 \text{ car } n \geq 3.$$

$$\text{Donc } (n+1)! \geq (n+1)2 \times 3^{n-2} \geq 2 \times 3^{(n+1)-2}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\forall n \geq 3, n! \geq 2 \times 3^{n-2}$

3 Récurrence d'ordre p

La méthode est la même que la récurrence simple. Mais au lieu de démontrer la formule au rang n , vous devez démontrer que le système des formules du rang n au rang $n + p - 1$.

Par conséquent, lors de l'initialisation, vous avez p formules à tester.

Et pour l'hérédité, on suppose le système des formules du rang n au rang $n + p - 1$ et on démontre le système du rang $n + 1$ au rang $n + p$.

Bien sûr, les formules du rang $n + 1$ à $n + p - 1$, sont déjà démontrées par le "supposons". Et il reste à montrer la formule au rang $n + p$.

Exemple 29 On considère (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Montrer que $u_n = n, \forall n \geq 0$

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 0, u_n = n, u_{n+1} = n + 1$ et $u_{n+2} = n + 2$

Initialisation : Pour $n = 0$,

$u_0 = 0, u_1 = 1$ et $u_2 = 2$

Hérédité : Supposons que $u_n = n, u_{n+1} = n + 1$ et $u_{n+2} = n + 2$ pour un n fixé.

Montrons que $u_{n+1} = n + 1, u_{n+2} = n + 2$ et $u_{n+3} = n + 3$

La relation est vraie pour u_{n+1} et u_{n+2}

$u_{n+3} = 3(n + 2) - 3(n + 1) + n = n + 3$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq 0, u_n = n, u_{n+1} = n + 1$ et $u_{n+2} = n + 2$.

Donc $\forall n \geq 0, u_n = n$

4 Récurrence forte

On effectue une récurrence forte si la relation de récurrence est d'ordre n . Mais la méthode est la même que la récurrence simple. La seule chose qui change est à l'hérédité.

Cette fois si on suppose que toutes les formules de rang $k \leq n$ et on démontre le rang $n + 1$.

Exemple 30 Soit $(x_k)_{k \geq 1}$ une suite de \mathbb{R}_+^* .

On suppose que pour tout entier $n \geq 1$, on a l'égalité
$$\sum_{k=1}^n x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2.$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $x_n = n$.

Initialisation : Pour $n = 1$

On a
$$\sum_{k=1}^1 x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^1 x_k \right)^2.$$

Donc $x_1^3 = x_1^2$, or $x_1 > 0$

Donc $x_1 = 1$

Hérédité : Supposons que $\forall k \leq n, x_k = k$, pour un n donné.

Montrons que $x_{n+1} = n + 1$.

On a
$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k \right)^2.$$

$$\text{Donc } x_{n+1}^3 + \sum_{k=1}^n x_k^3 = \left(x_{n+1} + \sum_{k=1}^n x_k \right)^2.$$

Or $\forall k \leq n, x_k = k$

$$\text{Ainsi } x_{n+1}^3 + \sum_{k=1}^n k^3 = \left(x_{n+1} + \sum_{k=1}^n k \right)^2$$

$$x_{n+1}^3 + \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left(x_{n+1} + \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$x_{n+1}^3 = x_{n+1}^2 + n(n+1)x_{n+1}$$

$$x_{n+1} (x_{n+1}^2 - x_{n+1} - n(n+1)) = 0$$

$$x_{n+1} (x_{n+1} - (n+1)) (x_{n+1} + n) = 0, \text{ or } x_{n+1} > 0$$

$$\text{Donc } x_{n+1} - (n+1) = 0.$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, on a $x_n = n$.

Huitième partie

Algèbre N°1 : Ensemble

1 Les définitions à connaître par cœur

$$a \in A = \left\{ x \in E \text{ tq } \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_2(x) = 0 \end{cases} \right\} \iff \begin{cases} f_1(a) = 0 \\ \vdots \\ f_2(a) = 0 \end{cases}$$

$$a \in A = \{x \in E \text{ tq } \exists z \in F, x = f(z)\} \iff \exists z, a = f(z)$$

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$

$$x \in E + F \iff \exists y \in E \text{ et } z \in F \text{ tq } x = y + z$$

$$x \in f(A) \iff \exists a \in A, x = f(a)$$

$$x \in f^{-1}(A) \iff f(x) \in A$$

$$x \in \text{Ker}(f) \iff f(x) = 0$$

$$x \in \text{Im}(f) \iff \exists a \in E, x = f(a)$$

$$x \in F^\perp \iff \forall y \in F, (x|y) = 0$$

$$g \circ h = f \iff \forall x \in E, g(h(x)) = f(x)$$

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B$$

$$f \text{ est injective} \iff \forall x, x' (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

$$f \text{ est surjective} \iff \forall y \exists x \text{ tq } y = f(x)$$

$$f \text{ est bijective} \iff \forall y \exists! x \text{ tq } y = f(x)$$

2 Les techniques de démonstration

2.1 En partant du début

Vous devez remplacer ce que vous avez (qui correspond presque tout le temps à la partie de gauche des définitions de la section précédente), par la traduction ensembliste (la partie de droite).

2.2 En partant de la fin

Vous avez le droit d'écrire ce que vous devez trouver à la fin pour ne pas perdre le fil de votre démonstration.

Il y a certaine restriction, si vous voulez obtenir une partie de gauche des définitions de la section précédente, vous devez avoir au dessus la partie de droite avec les changement suivant :

- " $\exists y \in E$ " doit être remplacé par "Pour $y = \dots$," avec au lieu des \dots une formule explicite en fonction des variables précédentes.

- " $\forall y \in E$ " doit être remplacé par "Soit $y \in E$," le plus tôt possible dans une démonstration, c'est-à-dire juste après les phrases introductives de votre démonstration (cf sections suivantes).
- On ne peut pas remonter une union d'ensemble

3 Montrer que $A \subset B$

Pour faire cela, vous devez démarrer votre démonstration par "Soit $x \in A$ " et la finir par "Donc $x \in B$ ".

Exemple 31 Soit f une application tel que $f(0) = 0$, montrer que $f^{-1}(0) \subset (f^2)^{-1}(0)$.

1. Soit $x \in f^{-1}(0)$
3. Alors $f(x) = 0$
5. $f(f(x)) = f(0) = 0$.
4. On a $f^2(x) = 0$
2. Donc $x \in (f^2)^{-1}(0)$

Donc $f^{-1}(0) \subset (f^2)^{-1}(0)$.

Les numéros de 1. à 5. correspond à la démarche d'écriture et de recherche de la démonstration, on écrit d'abord 1.(le début), puis 2.(ce qu'on veut obtenir), ensuite 3. et 4. (les traductions ensemblistes) et 5. le lien entre 3. et 4.

Exemple 32 Soit f une application de E dans E . Montrer que $f^2(E) \subset f(E)$.

1. Soit $x \in f^2(E)$
3. Alors $\exists y \in E, f^2(y) = x$
5. $f(f(y)) = x$.
4. Pour $z = \mathbf{f}(y)$, on a $f(z) = x$
2. Donc $x \in f(E)$

Donc $f^2(E) \subset f(E)$.

Les numéros de 1. à 5. correspond à la démarche d'écriture et de recherche de la démonstration, on écrit d'abord 1.(le début), puis 2.(ce qu'on veut obtenir), ensuite 3. et 4. (les traductions ensemblistes) et 5. le lien entre 3. et 4.. Bien sûr, la partie $\mathbf{f}(y)$ n'a pu être écrite qu'après avoir trouvé le lien 5.

4 Montrer que $A = B$

Il suffit de montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$.

Exemple 33 Montrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- Montrons que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Soit $x \in A \cup (B \cap C)$

$x \in A$

or $A \subset A \cup B$ et $A \subset A \cup C$

$x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$

$x \in B \cap C$

$x \in B$ et $x \in C$

or $B \subset A \cup B$ et $C \subset A \cup C$

$x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$

Donc $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- Montrons que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

Soit $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$

$$\begin{array}{l}
 x \in A \text{ et } x \in A \\
 \text{or } A \subset A \cup (B \cap C) \\
 \text{donc } x \in A \cup (B \cap C)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 x \in A \text{ et } x \in C \\
 \text{or } A \subset A \cup (B \cap C) \\
 \text{donc } x \in A \cup (B \cap C)
 \end{array} \right.
 \left| \begin{array}{l}
 x \in B \text{ et } x \in A \\
 \text{or } A \subset A \cup (B \cap C) \\
 \text{donc } x \in A \cup (B \cap C)
 \end{array} \right.
 \left| \begin{array}{l}
 x \in B \text{ et } x \in C \\
 x \in B \cap C \\
 \text{or } B \cap C \subset A \cup (B \cap C) \\
 \text{donc } x \in A \cup (B \cap C)
 \end{array} \right.$$

Donc $x \in A \cup (B \cap C)$

5 Montrer $A \Rightarrow B$

La démonstration commence par : "Supposons A et montrons B ".

Puis faire les techniques précédentes.

Exemple 34 Montrer $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$.

Supposons que $A \cup B = B$ et montrons que $A \subset B$

Soit $x \in A$

On a $A \subset A \cup B$

Ainsi $x \in A \cup B = B$

Donc $x \in B$

6 Montrer $A \Leftrightarrow B$

Il suffit de montrer que $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.

Neuvième partie

Algèbre N°2 : Espace Vectoriel

1 Les Formes classiques

1.1 trois formes

Il existe plusieurs façon de définir des ensembles. Les deux formes les plus usuelles sont la forme conditionnelle et la forme paramétrique.

Définition sous forme conditionnelle	Définition sous forme paramétrique	Définition par une famille
$F = \{x \in E \mid P(x) = Q(x)\}$ <ol style="list-style-type: none"> 1. Que signifie ou que dire si $x \in F$? Soit $x \in F$, x vérifie $P(x) = Q(x)$ 2. Comment montrer que $x \in F$? Si $x \in E$, calculer $P(x) - Q(x)$ et trouver 0. 	$G = \{x \in E \mid x = P(\lambda), \lambda \in I\}$ <ol style="list-style-type: none"> 1. Que signifie ou que dire si $x \in G$? Soit $x \in G$, il existe $\lambda \in I$ tel que $x = P(\lambda)$. 2. Comment montrer que $x \in G$? Si $x \in E$, déterminer une expression $\lambda \in I$ à l'aide de x tel que $x = P(\lambda)$. 	$H = Vect(\{x_1, \dots, x_n\})$ <ol style="list-style-type: none"> 1. Que signifie ou que dire si $x \in H$? Soit $x \in H$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$. 2. Comment montrer que $x \in H$? Si $x \in E$, déterminer les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ à l'aide de x tel que $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.

Exemple 35 $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \right\}$ est une forme conditionnelle sur

les vecteurs de \mathbb{R}^3 que l'on écrit de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dont la condition est le système $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$

$F_2 = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ tel que } f'(x+1) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$ est une forme conditionnelle sur les fonctions C^1 sur \mathbb{R} qui s'écrivent f dont la condition est l'équation $f'(x+1) = f(x)$ pour tout x .

$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x + 2y \\ y - x \\ z + y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ est une forme paramétrique sur les vecteurs de

\mathbb{R}^3 que l'on écrit de la forme $\begin{pmatrix} x + 2y \\ y - x \\ z + y \end{pmatrix}$

$G_2 = \{aX^3 + (a-b)X + b \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } a, b \in \mathbb{R}\}$ est une forme paramétrique sur les polynômes qui s'écrivent P que l'on écrira toujours $aX^3 + (a-b)X + b$ avec a et b dans \mathbb{R} .

1.2 Passer d'une forme conditionnelle à une forme paramétrique un ensemble F

Méthode 4

Etape 1 : Prendre un élément générique de votre espace vectoriel E définie à l'aide de paramètres réels et indiquer qu'il appartient à votre ensemble F :

- Si $E = \mathbb{R}^n$, prendre $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x_i \in \mathbb{R}$

Par exemple pour \mathbb{R}^3 , on écrit : "Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F$ ".

- Si $E = \mathbb{R}_n[X]$, prendre $a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ avec $a_i \in \mathbb{R}$
Par exemple pour $\mathbb{R}_3[X]$, on écrit : "Soit $aX^3 + bX^2 + cX + d \in F$, a, b, c et $d \in \mathbb{R}$ ".

- Si $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, prendre $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$

Par exemple pour $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on écrit : "Soit $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in F$ ".

- Si $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, prendre $a_1u_1 + \dots + a_nu_n$, $a_i \in \mathbb{R}$
Par exemple pour $\text{Vect}(\cos, \sin)$, on écrit : "Soit $x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x) \in F$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ ".

Etape 2 : Transformer vos conditions en un système de condition.

- Si $E = \mathbb{R}^n$, c'est déjà le cas.
- Si $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, faire le calcul matriciel et créer un système en identifiant coefficients par coefficients
- Si E est une espace de fonctions du type $x \mapsto f(x)$, injecter votre forme générique dans la condition.

Pour trouver des équations, choisir de valeur pour x , voire des limites. Vous pouvez aussi dériver et reprendre d'autres valeurs

- Si $E = \mathbb{R}_n[X]$, injecter votre forme générique dans les conditions.
Regrouper en X^k et identifier coefficients par coefficients. Vous pouvez aussi utiliser les techniques des fonctions.

Etape 3 : Résoudre le système des équations caractéristiques par un pivot de Gauss.

Si vous n'avez qu'une équation, passer à l'étape suivante.

Etape 4 : Déterminer les variables principales et les écrire à l'aide des autres variables.

Etape 5 : Dans l'expression choisie dans l'étape 1, on remplace les variables principales par les résultats obtenus dans l'étape 4.

Etape 6 : La forme paramétrique est simplement l'ensemble des expressions de l'étape 5.

Exemple 36 Pour $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2) \text{ et } P'(1) = 0\}$
Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in F$

$$P(1) = P(2) \Rightarrow a + b + c + d = 8a + 4b + 2c + d$$

$$P'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$$

On obtient le système (S) :
$$\begin{cases} a + b + c + d = 8a + 4b + 2c + d \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} c + 3b + 7a = 0 \\ c + 2b + 3a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + 2b + 3a = 0 \\ b + 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5a \\ b = -4a \end{cases}$$

$$\text{Donc } P = aX^3 + (-4a)X^2 + (5a)X + d$$

$$F = \{aX^3 - 4aX^2 + 5aX + d \in \mathbb{R}_3[X], a, d \in \mathbb{R}\}.$$

1.3 Passer d'une forme paramétrique à une forme conditionnelle pour F

Méthode 5

Etape 1 : Prendre un élément générique de votre espace vectoriel E définie à l'aide de paramètres réels et indiquer qu'il appartient à votre ensemble F :

- Si $E = \mathbb{R}^n$, prendre $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x_i \in \mathbb{R}$

Par exemple pour \mathbb{R}^3 , on écrit : "Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F$ ".

- Si $E = \mathbb{R}_n[X]$, prendre $a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ avec $a_i \in \mathbb{R}$

Par exemple pour $\mathbb{R}_3[X]$, on écrit : "Soit $aX^3 + bX^2 + cX + d \in F$, a, b, c et $d \in \mathbb{R}$."

- Si $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, prendre $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$

Par exemple pour $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on écrit : "Soit $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in F$ "

- Si $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, prendre $a_1u_1 + \dots + a_nu_n$, $a_i \in \mathbb{R}$

Par exemple pour $\text{Vect}(\cos, \sin)$, on écrit : "Soit $x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x) \in F$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ "

Etape 2 : Ecrire cet élément générique à l'aide des paramètres de F (si nécessaire utiliser une forme générique pour les paramètres de F) et identifier les paramètres aux paramètres de la forme générique de l'étape 1.

Etape 3 : Résoudre le système des équations en prenant comme inconnues les paramètres de la forme paramétrique par un pivot de Gauss.

Etape 4 : Déterminer les équations de compatibilité.

Etape 5 : Les conditions de la forme conditionnelle sont simplement les équations de l'étape 4.

Cette méthode est surtout utilisé sur \mathbb{R}^n car on obtient juste les équations d'une forme générique.

Exemple 37 $F = \left\{ \begin{pmatrix} a + 2b \\ b + c \\ a + 3b + c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F$

Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix} a + 2b \\ b + c \\ a + 3b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

On obtient le système

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ b + c = y \\ a + 3b + c = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = x \\ b + c = y \\ 0 = z - x - y \end{cases}$$

Donc $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, z - x - y = 0 \right\}$

1.4 Écrire un Vect sous forme paramétrique

On utilise juste la définition

Définition 10 Soit $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$
Alors $F = \{a_1 u_1 + \dots + a_n u_n, a_i \in \mathbb{R}\}$

1.5 Écrire une forme paramétrique en Vect

Méthode 6

Etape 1 : Donner la forme paramétrique de F .

Etape 2 : Si les paramètres ne sont pas des réels, prendre leur forme générique

- Pour $\mathbb{R}_n[X]$, prendre $a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ avec $a_i \in \mathbb{R}$

- Pour $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, prendre $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$

Et remplacer dans la forme paramétrique.

Etape 3 : Regrouper par paramètre

Etape 4 : Le coefficient devant chaque paramètre donne un élément dans le Vect.

Etape 5 : La famille génératrice est l'intérieur du Vect.

Exemple 38 $F = \{(X - 1)P' - P, P \in \mathbb{R}_2[X]\}.$

Posons $P = aX^2 + bX + c,$

$$(X - 1)P' - P = (X - 1)(2aX + b) - (aX^2 + bX + c) = a(X^2 - 2X) + b(-1) + c(-1)$$

$$\text{Ainsi } F = \{a(X^2 - 2X) + b(-1) + c(-1), a, b, c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X^2 - X, -1, -1)$$

2 Sous espace Vectoriel

2.1 Montrer qu'une forme conditionnelle est un espace vectoriel (ou un sous-espace vectorielle)

Revenir à la définition du sous-espace vectoriel :

Définition 11 F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si

- (i) $0 \in F$
- (ii) Pour tout $X, Y \in F$, $X + Y \in F$
- (iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $X \in F$, $\lambda X \in F$.

Pour le faire, on introduit les éléments X, Y et λ puis on vérifie les conditions sur $X + Y$ et sur λX .

Exemple 39 Pour $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) | \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)\}$

On a $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) | \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - f(x) = 0\}$

(i) Soit $O_{\mathbb{R}} : x \mapsto 0$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $O'_{\mathbb{R}}(x) + O_{\mathbb{R}}(x) = 0 + 0 = 0$

Donc $O_{\mathbb{R}} \in F$

(ii) Pour tout $f_1, f_2 \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$, vérifions que l'élément $\lambda f_1 + f_2$ est dans F

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\lambda f_1 + f_2)'(x) - (\lambda f_1 + f_2)(x) &= \lambda f_1'(x) + f_2'(x) - \lambda f_1(x) - f_2(x) \\ &= \lambda \underbrace{(f_1'(x) - f_1(x))}_{=0 \text{ car } f_1 \in F} + \underbrace{(f_2'(x) - f_2(x))}_{=0 \text{ car } f_2 \in F} \\ &= \lambda \cdot 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\lambda f_1 + f_2 \in F$

Donc F est un espace vectoriel.

Remarque 17 Si on peut directement écrire F sous la forme d'un $Vect$ (voir section 1.5), alors il est inutile de passer par la définition. On a aussitôt un sous espace vectoriel.

2.2 Montrer qu'une forme paramétrique est un sous espace vectorielle

Il suffit de déterminer une famille génératrice de l'espace vectorielle (voir section 1.5). En effet, si $F = Vect(u_1, \dots, u_n)$ alors c'est aussitôt un sous espace vectorielle

2.3 Déterminer une famille génératrice

On écrit en forme de $Vect$ (voir section 1.5).

3 Les bases canoniques

Les bases canoniques sont à connaître par cœur comme leur dimension.

\mathbb{R}^n : La base canonique est e_1, \dots, e_n où $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ avec le 1 à la $i^{\text{ème}}$ ligne.

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n.$$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: La base canonique est $e_{1,1}, \dots, e_{i,j}, \dots, e_{n,n}$ où

$$e_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

avec le 1 à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.

$$\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p.$$

$\mathbb{R}_n[X]$: La base canonique est $1, X, X^2, \dots, X^n$

$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1.$$

4 Passer d'un Vect à une base

4.1 Par la liberté et l'extraction si nécessaire

Soit $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$

On introduit des réels λ_i et on écrit $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0$ sous la forme d'un système (en regardant les coefficients pour les vecteurs ou les matrices ou en regroupant par X^i pour les polynômes).

On résout ensuite le système pour déterminer les variables principales et secondaires.

La base est formée des éléments correspondant aux variables principales au départ et éliminer celles qui viennent des variables secondaires.

Remarque 18 Si vous allez au bout du système en exprimant les variables principales en fonction des secondaires et en les remplaçant dans $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0$

En regroupant par variable secondaire, on obtient les relations entre les vecteurs.

Exemple 40 $F = \text{Vect}((1, 0, 1), (2, 1, 3), (0, 1, 1))$.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(2, 1, 3) + \lambda_3(0, 1, 1) = 0$.

On obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La famille n'est pas libre. λ_2 est une variable secondaire, la base extraite de cette famille est $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

4.2 Par famille échelonnée

4.3 Par le pivot de Gauss sur les colonnes

On effectue un pivot de Gauss sur les vecteurs du Vect jusqu'à obtenir une famille échelonnée. Il reste à conclure que la famille échelonnée est libre et donc c'est une base du Vect.

Exemple 41 Soit $F = Vect((1, 0, 1), (2, 1, 3), (0, 1, 1))$.

$$\begin{aligned} F &= Vect((1, 0, 1), (2, 1, 3), (0, 1, 1)) = Vect((1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 1)) \\ &= Vect((1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 0)) = Vect((1, 0, 1), (0, 1, 1)) \end{aligned}$$

La famille $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est échelonnée donc libre.

De plus elle est génératrice.

Donc $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est une base de F

Remarque 19 Pour cette méthode, vous devez absolument conserver le Vect lors des calculs. Sinon, l'expression est fautive

5 Déterminer la dimension d'un espace vectoriel F

La dimension est le nombre d'éléments de la base. Par conséquent, il suffit de déterminer une base. Pour cela, vous devez absolument utiliser la méthode de la section 4 après avoir obtenu le Vect.

6 Déterminer les coordonnées d'un point dans une base

Soit $F = Vect(u_1, \dots, u_p)$ et un élément de F , disons v

On introduit des réels λ_i et on écrit $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = v$ sous la forme d'un système.

On résout ensuite le système pour déterminer les valeurs des λ_i . Les coordonnées de v dans la base u_1, \dots, u_p sont $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.

Exemple 42 $F = Vect((1, 0, 1), (2, 1, 3))$ et $v = (0, 1, 1)$.

Soit λ_1, λ_2 des réels tels que $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(2, 1, 3) = (0, 1, 1)$.

On obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées de v dans $((1, 0, 1), (2, 1, 3))$ sont $(-1, 1)$.

7 Déterminer la matrice de passage entre bases

Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E

Pour déterminer la matrice de passage de \mathcal{B}_1 à \mathcal{B}_2 , on cherche les coordonnées des éléments de la base d'arrivée (ici \mathcal{B}_2) dans la base de départ (\mathcal{B}_1).

Ainsi on peut écrire $f_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ et le vecteur coordonnées $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ correspond à la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice de passage.

Exemple 43 Pour $\mathcal{B} = \{X^2, (X-1)^2, (X-2)^2\}$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$, cherchons la matrice de passage de la base canonique à \mathcal{B} .

On a :

$X^2 = 0 \times 1 + 0 \times X + 1 \times X^2$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

$(X-1)^2 = 1 \times 1 + (-2) \times X + 1 \times X^2$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

$(X-2)^2 = 4 \times 1 + (-4) \times X + 1 \times X^2$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 20 Si P est la matrice de passage de \mathcal{B}_1 à \mathcal{B}_2 , alors P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de \mathcal{B}_2 à \mathcal{B}_1 .

8 Montrer qu'une famille \mathcal{F} est une base de \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}_n[X]$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

8.1 Méthode classique

La méthode est en deux étapes :

- Faire la liberté de la famille \mathcal{F} .
- Comparer le cardinal de \mathcal{F} à la dimension de l'espace vectoriel classique.

Exemple 44 Pour montrer que $\mathcal{B} = \{X^2, (X-1)^2, (X-2)^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Soit a, b, c des réels tels que $aX^2 + b(X-1)^2 + c(X-2)^2 = 0$

En développant, on a $(b+4c) + (-2)(b+2c)X + (a+b+c)X^2 = 0$.

On obtient le système
$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b+4c=0 \\ b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0$$

Donc \mathcal{B} est une famille libre.

C'est une famille libre de 3 éléments dans $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension 3. Donc \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

8.2 Par la matrice de passage

Considérer P la matrice des coordonnées des vecteurs par rapport à la base canonique. Il reste à vérifier que $\det(P) \neq 0$ pour conclure que P est une matrice de passage.

Exemple 45 Pour montrer que $\mathcal{B} = \{X^2, (X-1)^2, (X-2)^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

La matrice des coordonnées de \mathcal{B} dans la base canonique est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Donc P est une matrice de passage entre deux bases. Et par conséquent, \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

9 Opération sur les sous-espaces vectoriels

9.1 Intersection

Pour faire l'intersection de deux sous espaces vectoriels, il y a deux cas :

- Vous avez deux formes conditionnelles, vous regrouper les conditions ensembles en appelant de manière identique l'élément de E .

Exemple 46 $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f' + f = 0\}$ et $G = \{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid g(0) = 0\}$

$$\text{Alors } F \cap G = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid \begin{cases} f' + f = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \right\}$$

- Vous avez une forme paramétrique et une forme conditionnelle, vous parter avec un élément de la forme paramétrique et vous l'injecter dans la condition.

Exemple 47 $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ a+c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 2y - z = 0 \right\}$

$$\text{Alors } F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ a+c \end{pmatrix} \mid (a+b) + 2(b+c) - (a+c) = 0 \right\}$$

Si vous n'avez pas ces formes, utilisez la section 1. pour se mettre dans ce cas.

9.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Pour faire la somme de deux sous-espaces vectoriels, il suffit d'utiliser la proposition suivante :

Proposition 4 Si $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ et $G = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$

alors $F + G = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p)$

Si vous n'avez pas une famille génératrice de F et G utiliser la section 1.5.

9.3 Supplémentaire de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[X]$ ou $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

On se ramène à la définition des supplémentaires :

Définition 12 Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E . F et G sont des supplémentaires de E ($F \oplus G = E$ si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$).

Vous devez donc chercher une famille génératrice de $F \cap G$ et une base de $F + G$ (se référer aux sections précédentes). Pour montrer qu'ils sont supplémentaires, il ne doit ni avoir de famille génératrice pour $F \cap G$ et avoir $\dim(F + G) = \dim(E)$

Avec les dimensions de F et G , on peut se limiter à l'un des systèmes de la proposition suivante.

Proposition 5 On a les équivalences :

$$F \oplus G = E \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim(F + G) = \dim(E) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ \dim(F + G) = \dim(E) \end{cases}$$

9.4 Supplémentaire dans d'autre espace que $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[X]$ ou $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

Pour certains sous-espaces vectoriels, il est impossible de trouver une famille génératrice. Il est alors nécessaire d'effectuer une méthode d'analyse-synthèse. Cette méthode peut être considérée comme difficile à appréhender. En effet, vous devez partir de la solution pour trouver la solution...

Pour cela, vous devez utiliser la proposition suivante :

Proposition 6 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels dans un espace vectoriel E . Alors

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow [\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G : x = y + z.]$$

La démonstration se fait en deux temps.

1. L'analyse : Vous supposez le résultat et à l'aide des formes conditionnelles ou paramétriques des ensembles, vous exprimez les inconnues à l'aide de la première variable.
2. La synthèse : Vous posez les valeurs trouver pour les inconnues. Vous devez ensuite vérifier que chaque formule appartient au bon ensemble et que toutes les formules répondent à la question.

Il est difficile de détailler plus cette méthode. Mais si vous pouvez écrire un des deux sous-espaces vectoriels sous forme paramétrique, faites-le, cela simplifie la méthode en cherchant d'abord les paramètres de la forme paramétrique grâce aux conditions de la forme conditionnelle.

Je vais à travers un exemple précis commenter (en gras) ce que vous devez faire.

Exemple 48 Soit $F = \{f \in C(\mathbb{R}) \text{ tq } \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ et $G = \{f \in C(\mathbb{R}) \text{ tq } f \text{ est constante}\}$.

Montrons que $F \oplus G = C(\mathbb{R})$.

Pour démontrer cela, il faut choisir une fonction f et trouver une unique fonction constante g et une unique fonction d'intégrale nulle sur $[0; 1]$ h telles que $f = g + h$

- Analyse : Soit $f \in C(\mathbb{R})$. **Votre départ**

Soient $g \in F$ et $h \in G$ telles que $f = g + h$ **Ce que vous êtes censé démontrer** c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)(*)$.

Pour pouvoir continuer, il faut traduire le condition des ensembles F et G . Si vous avez la possibilité de choisir une forme paramétrique, faites-le.

$$g \in F, \text{ alors } \int_0^1 g(t)dt = 0$$

$$h \in G, \text{ alors il existe } a \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = a$$

On applique les conditions et les formes paramétriques à (*)

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (g(t) + a)dt = \int_0^1 g(t)dt + a[t]_0^1 = a$$

On obtient $h(x) = \int_0^1 f(t)dt$ et $g(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)dt$.

Ces expressions sont uniques.

On a trouvé des formules explicites et unique pour g et h. La partie "Analyse" est donc terminé.

- Synthèse : Soit $f \in C(\mathbb{R})$.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)dt$ et $h(x) = \int_0^1 f(t)dt$.

On repart de la première ligne de l'analyse et on écrit les formules trouvées dans l'analyse. Il nous reste plus qu'à vérifier la deuxième ligne de l'analyse à savoir les trois points suivants : $g \in F$, $h \in G$ et $g + h = f$

— h est constante donc $h \in G$.

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (f(x) - \int_0^1 f(t)dt)dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f(t)dt \int_0^1 1dx = 0,$$

donc $g \in F$.

$$g(x) + h(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt = f(x)$$

Donc $F \oplus G = C(\mathbb{R})$.

Dixième partie

Algèbre N°3 : Algèbre linéaire

1 Montrer que f est une application linéaire

On revient à la définition :

Définition 13 Soit f une application de E dans F , deux espaces vectoriels. f est une application linéaire si et seulement si

- (i) $f(0) = 0$
- (ii) Pour tout $X, Y \in E$, $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$
- (iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $X \in F$, $f(\lambda X) = \lambda f(X)$.

Pour le faire, on introduit les éléments X, Y et λ puis on vérifie les conditions sur $X + Y$ et sur λX .

Exemple 49 Soit f l'application qui à M associe $AM + MA$.

- (i) $f(0) = A0 + 0A = 0$
- (ii) Pour tout $M_1, M_2 \in E$, calculons l'image de l'élément $M_1 + M_2$.

$$f(M_1 + M_2) = A(M_1 + M_2) + (M_1 + M_2)A = \underbrace{(AM_1 + M_1A)}_{=f(M_1)} + \underbrace{(AM_2 + M_2A)}_{=f(M_2)} = f(M_1) + f(M_2)$$
- (iii) Pour tout $M \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, calculons l'image de l'élément λM

$$f(\lambda M) = A(\lambda M) + (\lambda M)A = \lambda \underbrace{(AM + MA)}_{=f(M)} = \lambda f(M)$$

Donc f est linéaire

Remarque 21 dans le cas d'application de R^n dans R^p , on peut gagner du temps sur l'écriture de la linéarité en identifiant \mathbb{R}^k à $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ et alors, on peut écrire $f(X) = AX$ avec A une matrice.

Exemple 50 Soit f l'application qui à (x, y, z) associe $(x + 2y - z, x + z)$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, en identifiant les éléments de \mathbb{R}^n à des vecteurs colonnes,

on a $f(X) = AX$

Ainsi, pour tout $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(X_1 + \lambda X_2) = A(X_1 + \lambda X_2) = AX_1 + \lambda AX_2 = f(X_1) + \lambda f(X_2).$$

f est linéaire

2 Montrer que f est un endomorphisme de E

Pour tout espace vectoriel autre que $\mathbb{R}_n[X]$, on peut conclure aussitôt après la linéarité et écrivant $\forall x \in E, f(x) \in E$

Pour $\mathbb{R}_n[X]$, il faut justifier qu'on ne dépasse pas le degré n soit par des considérations sur le degré, soit en calculant l'image de la base canonique.

3 Donner la matrice de f dans une base

Pour trouver la matrice dans une base (u_1, \dots, u_n) , il faut le faire en plusieurs étapes :

Etape 1 : Calculer $f(u_i)$.

Etape 2 : Déterminer les coordonnées de $f(u_i)$ dans la base (u_1, \dots, u_n)

Etape 3 : Les coordonnées forment la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice.

Exemple 51 Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ telle que $f(P) = (X - 1)P' - P$.

Donner la matrice de f dans la base canonique :

La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $1, X, X^2$.

$$f(1) = -1 = (-1).1 + 0X + 0X^2, \quad f(X) = -1 = (-1).1 + 0X + 0X^2$$

$$\text{et } f(X^2) = X^2 - 2X = 0.1 + (-2)X + 1X^2$$

$$\text{La matrice de } f \text{ est } \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 22 Si vous ne connaissez que l'image d'une base, vous pouvez quand même trouver la matrice du morphisme. À partir de la matrice, vous pourrez calculer le noyau et l'image.

4 Déterminer le noyau de f

4.1 Par la définition

On revient à la définition du noyau : $\text{Ker}(f) = \{X \in E \text{ tel que } f(X) = 0\}$

On obtient une forme conditionnelle que l'on transforme en famille génératrice par les méthodes du chapitre "Espaces Vectoriels".

Exemple 52 Soit $f : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{cases}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$M \in \text{Ker}(f) \iff AM - MA = 0$$

$$\text{Or } AM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \text{ et } MA = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$$

$$\text{On obtient donc le système } (S) : \begin{cases} a+c - (a+b) & = 0 \\ b+d - (a+b) & = 0 \\ (a+c) - (c+d) & = 0 \\ b+d - (c+d) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = d \\ b & = c \end{cases}$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tel que } c, d \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Les matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ ne sont pas colinéaires. Elles forment une famille libre et génératrice.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Ker}(f).$$

4.2 Par la matrice de f

On donne des coordonnées à tout élément X dans la base de la matrice (u_1, \dots, u_n) :

$$X = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

Puis on résout le système $A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$ pour obtenir les valeurs des α_i en fonction des variables secondaires.

On remplace ces valeurs dans l'expression de X précédente.

Exemple 53 Soit f l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $((1, 0, 0), (2, 3, 4), (0, 1, 1))$.

Soit X tel que $X = \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(2, 3, 4) + \alpha_3(0, 1, 1)$.

$$\text{Calculons } A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

D'où $X = -\alpha_3(1, 0, 0) + \alpha_3(0, 1, 1) = \alpha_3(-1, 1, 1)$.

Donc $\text{Ker}(f) = \{\alpha_3(-1, 1, 1)\} = \text{Vect}((-1, 1, 1))$.

5 Déterminer l'image de f

5.1 Par la définition

On revient à la définition de l'image : $\text{Im}(f) = \{f(X) \text{ tel que } X \in E\}$

Ceci est une forme paramétrique, elle n'est pas forcément exploitable. Il peut être nécessaire d'écrire le X de manière générique pour déterminer $\text{Im}(f)$

5.2 Par l'image d'une base

Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

Attention : la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est la plupart du temps une famille liée.

5.3 Par la matrice de f

Les vecteurs colonnes forment les coordonnées d'une famille génératrice de l'image. C'est à dire que si $A = (a_{i,j})$ et (u_1, \dots, u_n) la base de la matrice,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(\sum_{j=1}^n a_{1,j}u_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{i,j}u_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{n,j}u_j\right)$$

Il reste à extraire une base de cette famille génératrice par la méthode de la fiche 10.

Exemple 54 Soit f l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(1, X-1, (X-1)^2)$.

Alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1.1 + 0(X-1) + 0(X-1)^2, 0.1 + 0(X-1) + 0(X-1)^2, 1.1 + 1(X-1) + 0(X-1)^2)$.

Donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1, 0, X) = \text{Vect}(1, X)$.

6 Injectivité, Surjectivité et bijectivité

6.1 Démontrer qu'un endomorphisme est injectif

Pour une application linéaire, il suffit de calculer $\ker(f)$
 f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$

6.2 Démontrer qu'un endomorphisme est surjectif

Pour une application linéaire, il suffit de calculer $\text{Im}(f)$
 $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$

6.3 Démontrer qu'un endomorphisme est bijectif en dimension finie

6.3.1 À partir du noyau

Pour cela, il suffit de montrer que $\text{Ker } f = \{0\}$ par le calcul du noyau. Et on conclure par la rédaction suivante :

Rédaction 2 $\text{Ker } f = \{0\}$ donc f est injective.

Or d'après le théorème du rang $\dim(\text{Im } f) = \dim E - \dim(\text{Ker } f) = \dim E$ et $\text{Im}(f) \subset E$. Donc $\text{Im}(f) = E$, f est surjective.

On a finalement f bijective.

6.3.2 À partir de la matrice

Soit A une matrice de f dans une base quelconque.
 f est bijective si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

6.4 Théorème du rang

Le théorème du rang est utiliser dans les sections 6.3.

Théorème 1 Soit f une application linéaire de E dans F . On a

$$\dim(E) = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f)$$

$\dim(\text{Im } f)$ est le rang de f et est noté $\text{rg}(f)$.

Onzième partie

Algèbre N°4 : Produit scalaire

1 Définitions et propriétés

1.1 Le produit scalaire

Pour montrer que l'on a un produit scalaire, on revient à la définition :

Définition 14 Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive, c'est-à-dire une application : $E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x|y)$ telle que :

- (i) $\forall (x_1, x_2, y_1, y_2, x, y) \in E^6$,
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda x_1 + x_2|y) = \lambda(x_1|y) + (x_2|y)$ et $(x|\lambda y_1 + y_2) = \lambda(x|y_1) + (x|y_2)$
 (bilinéarité, cad linéarité à gauche et à droite)
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = (y|x)$ (symétrie)
- (iii) $\forall x \in E, (x|x) \geq 0$ (positivité)
- (iv) $\forall x \in E, (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (définie)

Remarque 23 Souvent pour réduire la preuve d'un produit scalaire, on montre d'abord la symétrie puis la linéarité à gauche et on conclue par : "Par symétrie, $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à droite donc bilinéaire."

Exemple 55 Montrer que $\Phi : (f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0; 1]; \mathbb{R})$

- Symétrie : on a $\forall f, g \in \mathcal{C}^0([0; 1]; \mathbb{R}), \Phi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 g(t)f(t)dt = \Phi(g, f)$

- Bilinéarité :

Soit $f_1, f_2, g \in \mathcal{C}^0([0; 1]; \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\lambda f_1 + f_2, g) = \int_0^1 (\lambda f_1 + f_2)(t)g(t)dt = \lambda \int_0^1 f_1(t)g(t)dt + \int_0^1 f_2(t)g(t)dt = \lambda \Phi(f_1, g) + \Phi(f_2, g)$$

Φ est linéaire à gauche.

ar symétrie, Φ est linéaire à droite donc bilinéaire.

- Positivité : Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1]; \mathbb{R}), \Phi(f, f) = \int_0^1 (f(t))^2 dt \geq 0$ car $f^2(t) \geq 0$ sur $[0; 1]$
- Définie : Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1]; \mathbb{R}), \Phi(f, f) = 0$

On a $\int_0^1 (f(t))^2 dt = 0$

Or f^2 est continue et positive sur $[0; 1]$

Donc $\forall t \in [0; 1], f^2(t) = 0$ soit $f(t) = 0$

Φ est définie.

Donc Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0; 1]; \mathbb{R})$

Remarque 24 Un espace vectoriel de dimension finie munie d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien.

1.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz

- $\forall (x, y) \in E^2, (x|y)^2 \leq (x|x)(y|y)$.
- Cas d'égalité : $\forall (x, y) \in E^2, (x|y)^2 = (x|x)(y|y)$ si et seulement si (x, y) est une famille liée ($x = \lambda y$ ou inversement, $\lambda \in \mathbb{R}$.)

Remarque 25 Utilisation de Cauchy-Schwartz

- Elle permet de démontrer des inégalités triangulaires. Ce sera pratique pour le chapitre sur les normes en PSI.
- Elle prouve que $Cov(X, Y) \leq V(X)V(Y)$ pour donner des propriétés sur le coefficient de corrélation linéaire.
- Elle permet de montrer des inégalités difficiles :

$$\begin{aligned} & - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{ avec } (a|b) = \sum_{i=1}^n a_i b_i \text{ et } b = (1, \dots, 1) \\ & - \left(\int_0^1 P(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 P(t)^2 dt \text{ avec } (P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) \text{ et } Q = 1 \end{aligned}$$

1.3 Les normes

Pour montrer que l'on a une norme, on revient à la définition :

Définition 15 Une norme N sur E est une application de E dans \mathbb{R} telle que :

- (i) $\forall x \in E, N(x) \geq 0$
- (ii) $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- (iii) $\forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ (ne pas oublier les valeurs absolues)
- (iv) $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Remarque 26 Si E est munie d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. On définit une norme appelée norme euclidienne sur E par $N(x) = \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ et une distance euclidienne $d(x, y) = \|x - y\|$

2 Orthogonalité, Orthonormalité

2.1 Définitions

Définition 16 (vecteurs orthogonaux, espaces orthogonaux, orthogonal d'un ensemble)

x et y sont orthogonaux ssi $(x|y) = 0$. On note $x \perp y$.

- x est orthogonal à A ssi $\forall a \in A, (x|a) = 0$. On note $x \perp A$.
- Deux sev de E, F et G , sont orthogonaux ssi $\forall x \in F, \forall y \in G, (x|y) = 0$.
- Soit $A \subset E$: l'orthogonal de A est l'ensemble $A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, (x|a) = 0\}$.

Définition 17 (famille orthogonale, famille orthonormale)

- Une famille (e_1, \dots, e_p) est orthogonale ssi $\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, i \neq j, (e_i|e_j) = 0$.
- Une famille (e_1, \dots, e_p) est orthonormale (ou orthonormée) ssi $\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$ (cad $(e_i|e_j) = 1$ si $i = j, = 0$ sinon).
- Une base orthonormée est une famille orthonormée qui est une base.

2.2 Propriétés

Voici une liste de propriétés bien utiles :

- Pour tout sous espace vectoriel (sev) F de E euclidien, F^\perp est un supplémentaire de F dans E , appelé supplémentaire orthogonal de F : $F \oplus F^\perp = E$.
- Si F et G sont deux sev de E euclidien,

$$(F^\perp)^\perp = F, (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \text{ et } (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

- Théorème de Pythagore :
Soient $x, y \in E$, $x \perp y$. On a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ et } \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

- Une famille orthonormale est toujours libre.
- Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormée de E .
- Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E , la décomposition d'un vecteur \vec{x} en combinaison linéaire des vecteurs de la base est :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n (\vec{x}|e_i) e_i$$

(pas de système à résoudre pour déterminer les coordonnées!)

- Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E , le produit scalaire vérifie :

$$(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \text{ avec } x_k = (x|e_k).$$

- Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E , la norme associée vérifie :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2, \text{ avec } x_k = (x|e_k).$$

- Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E , pour $X = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et

$$Y = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ alors}$$

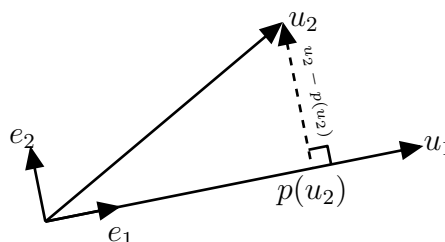
$$(x|y) = X^T Y \text{ et } \|x\| = \sqrt{X^T X}$$

2.3 Construction d'une base orthonormée

On utilise le **procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt** : soit $b = (u_1, \dots, u_n)$ une base quelconque de E . Il existe une base orthogonale (e_1, \dots, e_n) de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ telle que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

En pratique, on ne l'applique que sur une famille finie (u_1, \dots, u_p) et la construction se fait par itération.

- On pose pour démarrer, $e_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1$.
- Supposons (e_1, \dots, e_k) construit.
 - On cherche le projeté orthogonale de u_{k+1} sur $Vect(e_1, \dots, e_k)$, il s'écrit $p(u_{k+1}) = \sum_{i=1}^k (u_{k+1}|e_i)e_i$
 - Ainsi $v_{k+1} = u_{k+1} - p(u_{k+1})$ est orthogonale à $Vect(e_1, \dots, e_k)$



- On pose alors $e_{k+1} = \frac{1}{\|v_{k+1}\|}v_{k+1}$

Exemple 56 Soit $\mathcal{F} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ Donner une base orthonormale de $Vect(\mathcal{F})$

- Posons $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$
- Le projeté orthogonale de $(0, 1, 1)$ sur $Vect(e_1)$ est

$$((0, 1, 1)|e_1)e_1 = \frac{1}{2}((0, 1, 1)|(1, 1, 0))(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

On prend $v_2 = (0, 1, 1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ et on pose $e_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

- Le projeté orthogonale de $(1, 0, 1)$ sur $Vect(e_1, e_2)$ est

$$\begin{aligned} p((1, 0, 1)) &= ((1, 0, 1)|e_1)e_1 + ((1, 0, 1)|e_2)e_2 \\ &= \frac{1}{2}((1, 0, 1)|(1, 1, 0))(1, 1, 0) + \frac{2}{3}((1, 0, 1)|\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right))\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

On prend $v_3 = (1, 0, 1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(1, -1, 1)$ et on pose $e_3 = \sqrt{3}(1, -1, 1)$

3 projection orthogonale et symétrie orthogonale

3.1 Définitions

Définition 18

- Le projecteur orthogonal p_F sur F est le projecteur sur F parallèlement à F^\perp .
- La symétrie orthogonale s_F par rapport à F est la symétrie par rapport à F , parallèlement à F^\perp ; $s_F = 2p_F - Id_E$.

Définition : distance d'un vecteur à un sev. Comment la calculer ? Soit F un sev de E , soit $x \in E$: $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$. Intérêt : il suffit de calculer $p_F(x)$, sachant que $\|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2$. 79

Comment calculer le projeté orthogonal d'un vecteur sur un espace F ? Soit (e_1, \dots, e_p) une base orthonormée de F . Alors, $p_F(x) = \sum_{k=1}^p (x|e_k)e_k$. Expliquer comment appliquer le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à une base (u_1, \dots, u_n) de E . On construit (e_1, \dots, e_n) , avec : $e_1 = u_1$. $e_{k+1} = u_{k+1} - p_k(u_{k+1})$, où p_k est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ (et on utilise pour cela la question précédente)

Douzième partie

Probabilité N°1 : Dénombrement

1 Définition et règle de calcul

1.1 Définition et propriétés

Définition 19 Le cardinal de E est le nombre d'éléments de E . On le note $\text{card}(E)$ ou $|E|$ (ou $\#E$).

Remarque 27

- $\text{card}(\emptyset) = 0$
- $\text{card}(\{p, \dots, q\}) = q - p + 1$, pour $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \leq q$.

Proposition 7 Soit E, F et A_i des ensembles.

- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
- $\text{card}(A/B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$.
- Crible de Poincaré :

$$\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Remarque 28 En pratique, il faut connaître le cas $n = 3$ et $n = 4$:

$$\begin{aligned} \text{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \text{card}(A_3) \\ &\quad - \text{card}(A_1 \cap A_2) - \text{card}(A_1 \cap A_3) - \text{card}(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + \text{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \text{card}(A_3) + \text{card}(A_4) \\ &\quad - \text{card}(A_1 \cap A_2) - \text{card}(A_1 \cap A_3) - \text{card}(A_1 \cap A_4) - \text{card}(A_2 \cap A_3) - \text{card}(A_2 \cap A_4) - \\ &\quad + \text{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \text{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \text{card}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \text{card}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &\quad - \text{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4). \end{aligned}$$

Définition 20 Deux ensembles A et B sont dits **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

1.2 Les p -listes

Définition 21 Soit E un ensemble à n éléments, on appelle p -liste de E une suite de p éléments de E et on note l'ensemble des p -listes E^p .

L'ensemble des p -listes est constitué de n^p éléments.

Remarque 29

- Une application de $E = \{a_1, \dots, a_p\}$ sur $F = \{b_1, \dots, b_p\}$ est une p -liste.
- $\mathcal{P}(E)$ est une n -listes sur 2 éléments, en particulier $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

1.3 Arrangement

Définition 22 Soit E un ensemble à n éléments, un arrangement d'ordre p de E est une p -liste d'éléments distincts 2 à 2 de E .

Le nombre d'arrangement d'ordre p de E est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Remarque 30 Cas particulier, un arrangement d'ordre n de E , avec $\text{card}(E) = n$, correspond à une permutation de tous les éléments de E .

Le nombre de permutation des éléments de E est $n! = A_n^n$.

1.4 Combinaison

Définition 23 Soit E un ensemble à n éléments, une combinaison d'ordre p de E est un ensemble à p éléments de E 2 à 2 distincts.

Le nombre de combinaison d'ordre p de E est $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Proposition 8 Propriétés du binomial :

- Soit $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$, on a

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad ; \quad \binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$$

- Formule de Pascal :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

2 Méthodes générales de dénombrement

Méthode 1 : Pour savoir quelle type de dénombrement on utilise, on peut se fier au tableau suivant :

	Ordre	Remise
p -liste	\times	\times
A_n^p	\times	
$\binom{n}{p}$		

Méthode 2 : "Créer un schéma"

- Déterminer le nombre de cases du schéma.
- Inscrire les caractéristiques de chaque case en regroupant les caractéristiques similaires ensemble si possible.

Attention, les caractéristiques doivent être distinctes entre elles, sinon appliquer la méthode "diviser pour mieux régner".

- Si certaines caractéristiques ne sont pas clairement définies, on utilisera une lettre (A,B,C,...) par caractéristique distincte et on les dénombre à l'aide de binomiaux en les regroupant par nombre de cases.

- Pour chaque caractéristique différente, compter le nombre de cases (correspond à p) et le nombre d'éléments avec la caractéristique (correspond à n) et utiliser le bon type de dénombrement.
- Si vous avez un ordre, penser à utiliser les placements (à l'aide de binomial) des cases. Mais faites attention, certains éléments peuvent être fixés.

Exemple 57 On tire dans un jeu de 32 cartes avec remise 5 cartes en notant leurs valeurs.

Quelle est le nombre de brelans possibles (ne pas compter les full).

Solution : Le tirage est effectuée avec remise et ordre. Nous allons utiliser les p -listes pour mesurer les tirages.

Le schéma de tirage est (A, A, A, B, C) où A, B et C représentent trois hauteurs de cartes différentes

Le choix de A est $\binom{8}{1}$ (le choix d'une hauteur parmi les 8 possible, par exemple la hauteur "roi"), celui de B et C est $\binom{8-1}{2} = \binom{7}{2}$ (on a déjà choisi le "roi", il ne reste que 7 hauteurs possibles et il me faut deux lettres B et C).

Le choix de position de A est $\binom{5}{3}$ (cela revient à placer les 3 lettres A dans mon schéma à 5 cases), celui de B , $\binom{5-3}{1} = \binom{2}{1}$ (comme on a déjà placé A , il ne reste plus que 2 cases pour placer la lettre B) et pour C $\binom{2-1}{1} = \binom{1}{1}$.

Le dénombrement des A est 4^3 (le nombre de carte de hauteur A - par exemple on a 4 "roi" et la puissance est le nombre de cases de A), celui de B est 4^1 et pour C , 4^1

Donc le nombre de Brelan est $\binom{8}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{5}{3} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times 4^3 \times 4^1 \times 4^1 = \dots$

Méthode 3 : "Dénombrer c'est tricher"

Comme l'intituler l'indique, le dénombrement n'est pas d'effectuer l'expérience aléatoire mais de trouver une méthode qui donne tous les résultats souhaités.

Par exemple, si on vous impose des conditions sur la deuxième carte. On peut commencer d'abord par la choisir avant de prendre la première. Cela se traduirait par le schéma : $(\neq 2^{eme}, Cond, \dots)$

Méthode 4 : "Diviser pour régner"

On découpe notre ensemble E en plusieurs autres ensembles disjoints ($E = A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$). Puis on utilise la formule $card(E) = card(A) + card(B)$.

Méthode 5 : "Faire le contraire de ce que l'on demande"

$$card(A) = card(E) - card(\overline{A})$$

On applique souvent cette méthode si vous avez dans l'événement les mots : "au moins", "au plus", "moins de", "plus de".

Remarque 31 Faites attention à ces termes :

- "au moins" correspond au signe mathématiques \geq .
- "moins de" correspond au signe mathématiques $<$.
- "au plus" correspond au signe mathématiques \leq .
- "plus de" correspond au signe mathématiques $>$.

Méthode 6 : "Ranger ses chaussettes"

Ce dénombrement permet de placer n éléments indiscernables parmi p tiroirs. Pour cela, il suffit de considérer les n éléments les uns à côté des autres et le dénombrement correspond au placement (des binomiaux) des séparations entre ces éléments.

Exemple 58 On veut le nombre de couple (x, y, z) de $(\mathbb{N}^*)^3$ tel que $x + y + z = n$. Alors pour dénombrer ces triplets, on considère que n est la somme de n valeurs 1 identiques et indiscernables. Déterminer les trois variables x , y et z correspond à choisir 2 symboles $+$ entre les 1, le premier groupement correspond à x , le deuxième à y et les troisièmes à z .

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_x \oplus \underbrace{1 + \cdots + 1}_y \oplus \underbrace{1 + \cdots + 1}_z = n$$

Comme on a $n - 1$ symboles $+$, on a donc $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ possibilités.

Méthode 7 : Construire un diagramme. Il existe deux diagrammes simples, les arbres et les diagrammes de Vern (patatoïdes) :

- Si l'expérience aléatoire se fait en plusieurs étapes, on construit un arbre.
Le cardinal d'une branche d'un arbre est le produit des cardinaux du bout de la branche à la racine.
Le cardinal d'un ensemble est la somme des cardinaux des branches dont le bout est un élément de l'ensemble
- Si vous voulez connaître les cardinaux des ensembles qui est définies par plusieurs propriétés non disjointes. C'est à dire que $E = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ et vous connaissez $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ pour tout $0 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.
Vous partez du centre du diagramme et le complet en allant vers l'extérieur.

Treizième partie

Probabilité N°2 : Probabilité

1 Généralité

1.1 Définition et Vocabulaire

- On se donne un ensemble Ω , dit **univers**, représentant l'ensemble des résultats possibles.
- On se donne une partie \mathcal{T} de $\mathcal{P}(\Omega)$, dite **tribue** vérifiant :

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$, \emptyset est appelé l'**événement impossible**.

(ii) $\Omega \in \mathcal{T}$, Ω est appelé l'**événement certain**.

(iii) Si $A \in \mathcal{T}$, alors $\bar{A} \in \mathcal{T}$.

(iv) Si $A, B \in \mathcal{T}$, alors $A \cup B \in \mathcal{T}$.

Les éléments de \mathcal{T} sont appelé **événements**.

- L'espace (Ω, \mathcal{T}) est appelé **espace probabilisable**.
- Soit A et B deux événements tels que $A \cap B = \emptyset$, alors A et B sont dit **incompatibles**.
- On appelle **probabilité** sur (Ω, \mathcal{T}) , toute application \mathbb{P} de \mathcal{T} sur $[0; 1]$ telle que

(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

(ii) Si A et B sont deux événements incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

(iii) Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite d'événements incompatibles, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$.

- L'espace $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.
- Si $\mathbb{P}(A) = 0$, A est dit **quasi-impossible**.
- Si $\mathbb{P}(B) = 1$, B est dit **quasi-certain**.
- Une suite d'événement A_1, \dots, A_n est un système complet d'événement si :

(i) Pour tout i, j , $A_i \cap A_j = \emptyset$.

(ii) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

1.2 Propriétés

- **Probabilité conditionnelle :**

Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, la probabilité de A sachant que l'événement B est réalisé (dit plus simplement la probabilité de A sachant B) est donnée par la formule

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- **Indépendance :**

Soit A et B deux événements, si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, alors A et B sont dit **indépendants**.

- **Relations entre les événements :**

Soit A et B deux événements.

— Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

— $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

• **Crible de Poincaré :**

Soit A_1, \dots, A_n des événements,

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

• **Formule de probabilité conditionnelle :**

Soit A_1, \dots, A_n des événements,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

• **Théorème de probabilité totale :**

Soit A_1, \dots, A_n un système complet d'événements et B un événement, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_k) \\ \mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \mathbb{P}_{A_k}(B) \end{aligned}$$

• **La formule de Bayes :** Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A}) \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)}$$

2 Les méthodes

Méthode 1 : L'hypothèse d'équiprobabilité :

Cette hypothèse permet de se ramener au dénombrement. Dans ce cas

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Cette méthode est utilisée dans plusieurs cas :

- le mot "équiprobable" est clairement utilisée dans l'énoncé.
- la référence est implicite. On utilise l'expression "au hasard" ou l'on ne donne pas de valeur de probabilité.

Méthode 2 : "diviser pour régner".

Soit A_1, \dots, A_n des événements mutuellement incompatibles

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

Cette méthode est souvent utilisée quand on connaît les probabilités des événements élémentaires $\{\omega_i\}$ (ω_i des éléments de Ω).

Alors si $A = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\omega_1) + \dots + \mathbb{P}(\omega_n)$.

Méthode 3 : Déterminer la probabilité d'une intersection ou la probabilité conditionnelle

On cherche à calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$

Il faut faire attention à la "temporalité" des événements A et B

- A et B se réalise en même temps (on ne peut pas savoir qui a lieu avant l'autre).

On interprète $A \cap B$ en français puis on le dénombre à l'aide d'un schéma de dénombrement unique et ainsi on obtient $\mathbb{P}(A \cap B)$

Pour $\mathbb{P}_B(A)$, on utilise la formule $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

- B se réalise avant l'événement A .

On interprète B par rapport à l'expérience aléatoire, pour obtenir un nouveau système de départ. On cherche l'événement A à partir de ce nouveau système et on obtient ainsi $\mathbb{P}_B(A)$

Pour calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$, on utilise la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$

- B se réalise après l'événement A

Pour calculer $\mathbb{P}_B(A)$, on utilise la formule de Bayes. A est une des causes possibles de B , on appelle souvent cette formule la probabilité des causes.

Pour cela, on considère le système complet d'événement contenant $A : A_1, \dots, A_n$ le système complet d'événement avec $A_1 = A$.

Alors

$$\mathbb{P}_B(A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B) + \dots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)}$$

Si on ne détermine pas le système complet d'événement, on peut prendre A, \bar{A} comme système complet d'événement.

Pour calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$, on utilise la formule des probabilités composées dans l'ordre de réalisation : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)$

Méthode 4 : Utiliser les probabilités totales.

On applique la formule de probabilité totale, la difficulté réside dans la détermination du système complet d'événements.

Cette méthode s'applique :

- si l'expérience aléatoire se fait en deux étapes. Le système complet d'événements correspond aux résultats possibles de la première étape.
- l'expérience aléatoire évolue au cours du temps (Chaîne de Markov). Le système complet d'événement correspond à tous les états à l'instant n .
- Si la question précédente détermine la probabilité d'une intersection ou une probabilité "sachant que" (que l'on détermine par schéma ou loi classique) et celle que vous faites n'a plus d'intersection ou de "sachant que". Le système complet d'événements sera le "sachant que" ou l'autre événement de l'intersection.

Méthode 5 : Montrer l'indépendance d'événements.

On se ramène à la définition :

A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Rq : Si on vous pose cette question, ce n'est sûrement pas trivial et vous devez mettre les calculs sur votre copie.

Quatorzième partie

Probabilité N°3 : Variables aléatoires

1 Généralités

1.1 Définition

Définition 24 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Une variable aléatoire sur Ω est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour x réel donné, l'événement $X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$ est noté, de façon plus parlante, $(X = x)$.

Remarque 32

- Une V.A. est une observation numérique sur les résultats d'une expérience aléatoire, elle n'a en elle-même rien d'aléatoire, et ce n'est pas une variable, mais une application...
- Il ne faut pas non plus confondre les variables aléatoires avec les événements. X est une V.A. et $(X = n)$ (ou $X \geq n$) est un événement.
- La première chose à déterminer par une V.A. est l'univers image $X(\Omega)$, c'est-à-dire la valeur que prend la V.A. X .
- Déterminer la loi d'une V.A. revient à déterminer $\mathbb{P}(X = k)$, pour tout $k \in X(\Omega)$ dans un tableau ou sous une ou plusieurs formules (voir section 3)

Définition 25 (Loi conjointe) Soient (X, Y) un couple de variable discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P) telles que

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_m, m \in J\}.$$

La loi du couple (X, Y) (ou loi de (X, Y) ou loi conjointe de X et Y) est définie par

$$p_{n,m} = \mathbb{P}[(X = x_n) \cap (Y = y_m)].$$

Remarque 33 Une loi d'un couple peut se représenter de deux façon :

- par un tableau à double entrée (si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ prennent peu de valeurs)
- par une formule générale

Proposition 9 Les variables X et Y sont appelées variables marginales du couple (X, Y) . La loi de la variable X (resp. Y) s'appelle la loi marginale de X (resp. Y) du couple (X, Y) . Traditionnellement on note $\mathbb{P}(X = x_n) = p_{n\bullet}$ et $\mathbb{P}(Y = y_m) = p_{\bullet m}$

$$1. \forall n \in I, p_{n\bullet} = \sum_{m \in J} p_{n,m}$$

$$2. \forall m \in J, p_{\bullet m} = \sum_{n \in I} p_{n,m}$$

1.2 Espérance et Variance

Définition 26 Moments de variables aléatoires X et Y

- Espérance (ou moyenne) de X (sous réserve de convergence absolue)

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

- Moment d'ordre 2 de X (sous réserve de convergence absolue)

$$m_2(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) = E(X^2)$$

- Variance de X (sous réserve de convergence absolue)

$$V(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 \mathbb{P}(X = x_i) = E([X - E(X)]^2)$$

- Covariance de X et Y (sous réserve de convergence absolue)

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_{(x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} (x_i - E(X))(y_j - E(Y)) \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Proposition 10

- linéarité de l'espérance :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y); E(aX) = aE(X); E(aX + b) = aE(X) + b.$$

- théorème de transfert :

$$E(f(X)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$$

- théorème de Koenig-Huyghens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Définition 27 Soient (X, Y) un couple de variable discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P) telles que

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_p, p \in J\}.$$

et f une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, alors :

$$E(f(X, Y)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \sum_{y_j \in Y(\Omega)} f(x_i, y_j) \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j)$$

En particulier : $E(XY) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \sum_{y_j \in Y(\Omega)} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j)$

1.3 Propriétés

Proposition 11

- Théorème de probabilité totale : Soit X une v.a., $(X = x_i)_{x_i \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

$$\mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x_i) \mathbb{P}_{X=x_i}(Y = y_j) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

- *Indépendance* : Soient X et Y deux variables indépendantes

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad ; \quad V(X + Y) = V(X) + V(Y) \quad ; \quad cov(X, Y) = 0$$

Remarque 34 Ce n'est pas parce qu'une de ces propositions sont vraie que les V.A. sont indépendantes. Ces propriétés peuvent apparaître à l'aide de symétrie dans l'expérience aléatoire.

Théorème 2 (Bienaymé & Tchebichev)

Si X a une espérance m et une variance v alors $\mathbb{P}(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{v}{\varepsilon^2}$

Remarque 35 Ce théorème servira dans l'estimation par intervalle de confiance sous la forme $\mathbb{P}(|X - m| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{v}{\varepsilon^2}$

Exemple 59 Soit $X \hookrightarrow B(100, \frac{1}{10})$, alors $m = 10$ et $v = 9$.

On a ainsi d'après la formule de Bienaymé & Tchebichev, $\mathbb{P}(|X - 10| \geq \varepsilon) \leq \frac{9}{\varepsilon^2}$

C'est à dire $\mathbb{P}(10 - \varepsilon \leq X \leq 10 + \varepsilon) \geq 1 - \frac{9}{\varepsilon^2}$

Pour avoir un intervalle de confiance à 91%, il suffit que $1 - \frac{9}{\varepsilon^2} = \frac{91}{100} \Leftrightarrow \varepsilon = 10$

Donc $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 20) \geq \frac{91}{100}$

L'intervalle de confiance à 91% est $[0; 20]$.

2 Lois classiques

Proposition 12 *Loi usuelle* :

- X v.a certaine :

$$X(\Omega) = \{c\}; \quad \mathbb{P}(X = c) = 1$$

$$E(X) = c; \quad V(X) = 0$$

- X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ ou $\mathcal{B}(p)$ de paramètre $p \in]0, 1[$ ssi :

$$X(\Omega) = \{0, 1\}; \quad \mathbb{P}(X = 1) = p; \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

$$E(X) = p; \quad V(X) = p(1 - p).$$

- X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}, p \in]0, 1[$ ssi :

$$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}; \forall k \in \{0, \dots, n\}, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

X est le nombre de succès lors de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, la probabilité du succès à chaque épreuve étant p .

$$E(X) = np \quad ; \quad V(X) = np(1 - p).$$

Remarque 36 On peut écrire $X = X_1 + \dots + X_n$ où X_i est la V.A. de Bernoulli de la $i^{\text{ème}}$ épreuve de Bernoulli

- X suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ ssi

$$X(\Omega) = \{1, \dots, n\} \text{ et } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad ; \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

3 Méthodes

Méthode 1 : Utiliser des variables aléatoires.

Vous devez d'abord déterminer $X(\Omega)$.

Puis vous devez **réinterpréter** l'événement $(X = x_i)$ (ou $(X \leq x_i)$) sous forme de phrases pour comprendre ce qu'il faut faire. Puis utiliser les méthodes de probabilités discrètes.

Méthode 2 : Loi d'un couple pour $X(\Omega)$ et $Y(\omega)$ petit.

Faire un tableau à double entrée X en colonne et Y en ligne pour les valeurs de X et Y et pour chaque case (i, j) du tableau, interpréter $X = i \cap Y = j$.

Les lois marginales se calculent en faisant les sommes des coefficients de chaque ligne pour Y et celle des colonnes pour X .

Méthode 3 : Loi d'un couple pour $X(\Omega)$ et $Y(\omega)$ grand. On revient à la définition.

Pour des (i, j) génériques, interpréter $X = i \cap Y = j$. Vous aurez sûrement plusieurs cas distincts.

Les lois marginales se calculent en faisant les sommes avec comme indice i pour Y et j pour X .

Attention à bien découper vos sommes suivants les cas déterminés pour $X = i \cap Y = j$.

Méthode 4 : Déterminer un événement défini par deux variables aléatoires.

Vous devez utiliser le théorème de probabilité totale pour une des variables aléatoires dont on connaît la loi, puis **réinterpréter** la "probabilité sachant que" de la formule et la calculer avec les méthodes de probabilités discrètes.

Par exemple, pour l'événement $X = Y$, avec X et Y deux variables aléatoires dont on connaît la loi de X et $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

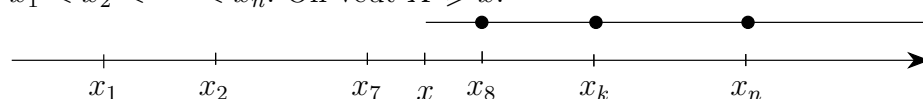
Rédaction 3 $(X = x_1), \dots, (X = x_n)$ forment un système complet d'événements, d'après le théorème de probabilité totale,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \mathbb{P}_{X=x_i}(X = Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \mathbb{P}_{X=x_i}(Y = x_i)$$

Méthode 5 : Déterminer un événement définie par une inégalité connaissant la loi.

On s'aide d'un schéma de l'axe des réels. On place sur un axe toutes les valeurs prises par la variable aléatoire et la demi droite correspondant à l'inégalité que l'on demande. La probabilité de l'inégalité correspond à la somme des probabilités des valeurs se trouvant la demi droite.

Exemple 60 Soit X une variable aléatoire tel que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. On veut $X \geq x$.

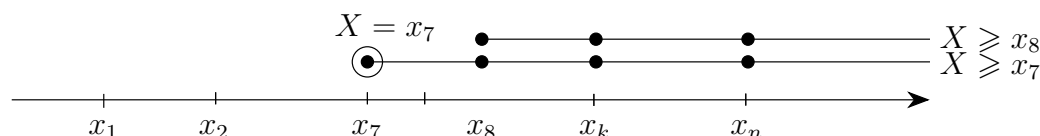


$$\text{Alors } \mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(X = x_8) + \mathbb{P}(X = x_9) + \dots + \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{k=8}^n \mathbb{P}(X = x_k).$$

Méthode 6 : Déterminer une loi connaissant les événements définis par une inégalité.

Vous devez faire l'inverse de la méthode 2. Pour cela, on s'aide toujours d'un schéma de l'axe des réels. On place sur un axe toutes les valeurs prises par la variable aléatoire et la demi droite correspondant à l'inégalité que l'on a et on entoure la valeur de la loi que l'on souhaite. On trace alors une deuxième demi-droite qui contient tous les autres points de la première demi-droite. La probabilité de cette valeur correspond à la différence des probabilités de ces inégalités (les deux demi-droites).

Exemple 61 Soit X une variable aléatoire tel que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. On a $X \geq x_k$ pour tout k .



Alors $\mathbb{P}(X = x_7) = \mathbb{P}(X \geq x_7) - \mathbb{P}(X \geq x_8)$.

Méthode 7 : Déterminer un événement défini par deux variables aléatoires.

Vous devez utiliser le théorème de probabilité totale pour une des variables aléatoires dont on connaît la loi ou la première si on a une temporalité, puis **réinterpréter** la "probabilité sachant que" de la formule et la calculer avec les méthodes de probabilités discrètes.

Exemple pour l'événement $X = Y$, avec X et Y deux variables aléatoires dont on connaît la loi de X et $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Rédaction 4 $(X = x_1), \dots, (X = x_n)$ forment un système complet d'événements, d'après le théorème de probabilité totale,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \mathbb{P}_{X=x_i}(X = Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \mathbb{P}_{X=x_i}(Y = x_i)$$

Méthode 8 : Démontrer que nous avons les lois $\mathcal{B}(n, p)$.

On effectue n expériences aléatoires identiques et indépendantes.

Chaque expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli dont le succès est "....." de probabilité ...

Et X mesure le nombre de succès.

Donc $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Méthode 9 : Calculer l'espérance, la variance.

Ecrire les formules de définition et appliquer les méthodes de somme.

Quinzième partie

Analyse N°1 : Étude de fonctions

1 Fonctions classiques

1.1 Fonction logarithme

Définition 28 La fonction logarithme népérien, notée \ln , est l'unique primitive sur \mathbb{R}_+^* de $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1. Elle est donc définie par :

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Proposition 13 (Propriétés du logarithme)

1. \ln est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$.
2. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
3. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(x^n) = n \ln x$.

Proposition 14 \ln est une bijection strictement croissante de $]0, \infty[$ dans \mathbb{R} vérifiant

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty.$$

Définition 29 Soit $a > 0, a \neq 1$. On appelle logarithme de base a , la fonction notée \log_a définie par

$$\forall x > 0, \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Remarque 37 La fonction \log correspond à la fonction \log_{10} et sa dérivée est $\log'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$

2 Fonction exponentielle

Définition 30 La fonction exponentielle, notée \exp , est la fonction réciproque du logarithme népérien. C'est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} dans $]0, \infty[$. On a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y).$$

Proposition 15 (Propriétés de l'exponentiel)

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.
2. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \exp(nx) = (\exp x)^n$.

Proposition 16 \exp est dérivable sur \mathbb{R} , égale à sa dérivée ($\exp' = \exp$) vérifiant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0.$$

Définition 31 Soit $a > 0$. On appelle exponentielle base a , la fonction notée \exp_a définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = \exp(x \ln a)$$

Remarque 38 Dès que la variable est en puissance, vous devez, par calculer les limites, dérivée, etc, l'écrire avec l'exponentiel.

Ainsi pour tout $x \in I$, $u(x)^{v(x)}$ doit être écrit comme $e^{v(x)\ln(u(x))}$ pour pouvoir l'étudier.

3 Fonction puissance

Définition 32 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance d'exposant α par $\forall x \in \mathbb{R}_+, x^\alpha = \exp(a \ln x)$.

Proposition 17 (Propriétés des puissances) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $f : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. De plus, pour tout a et b réels, $x > 0$ et $y > 0$, on a :

$$\begin{array}{lll} x^a y^a = (xy)^a & x^a x^b = x^{a+b} & (x^a)^b = x^{ab} \\ 1^a = 1 & x^0 = 1 & \ln(x^a) = a \ln x \end{array}$$

Définition 33 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n -ième la fonction de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ , réciproque de la bijection strictement croissante : $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^n \end{cases}$. On la note alors : $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt[n]{x} \end{cases}$.

Remarque 39 • À l'aide de la caractérisation, on obtient pour $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

- Dans le cas où n est impair, on peut définir la racine n -ième sur \mathbb{R} .
Par exemple, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est définie sur \mathbb{R} et on peut calculer $\sqrt[3]{-8} = -2$

3.1 Fonctions hyperboliques (type \exp)

- Définition de $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

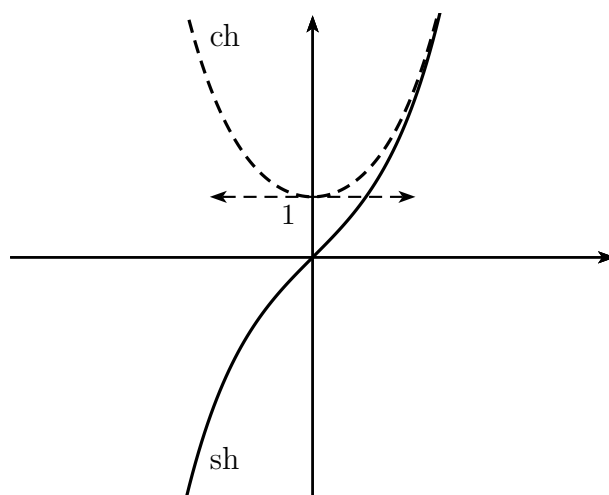
$$\text{et} \quad \text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- Elles sont continues et dérivables sur \mathbb{R} et

$$\boxed{\text{sh}' = \text{ch} \quad \text{et} \quad \text{ch}' = \text{sh}.}$$

- sh est impaire, ch est paire.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}x \geq 1$.

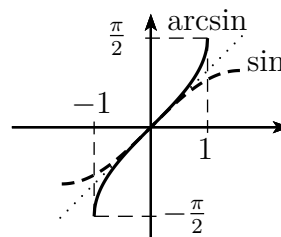
$$\boxed{\text{sh} + \text{ch} = \exp \quad \text{et} \quad \text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1.}$$



3.2 Fonctions circulaires réciproques (type ln)

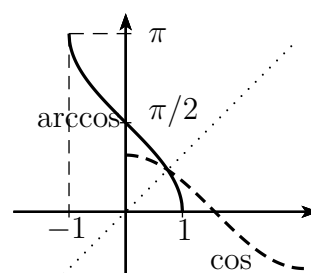
- $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ est continue sur $[-1, 1]$
- $\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x \\ \forall \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \arcsin(\sin(\theta)) = \theta. \end{cases}$
- \arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



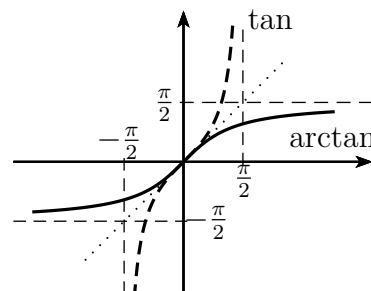
- $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ est continue sur $[-1, 1]$
- $\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x \\ \forall \theta \in [0, \pi], \arccos(\cos(\theta)) = \theta. \end{cases}$
- \arccos est dérivable sur $] -1, 1[$ et

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$



- $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] -\pi/2, \pi/2[$ est continue sur \mathbb{R}
- $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x \\ \forall \theta \in] -\pi/2, \pi/2[, \arctan(\tan(\theta)) = \theta. \end{cases}$
- \arctan est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

**Proposition 18 (Choix d'un angle)**

- Angle θ de la forme polaire à l'aide de Arccos :
On a un point M de coordonnée $(a; b)$, on a les relations suivantes :
 - Si $b \geq 0$, $\theta = \text{Arccos} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$
 - Si $b < 0$, $\theta = -\text{Arccos} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$
- Angle θ de la forme polaire à l'aide de Arcsin :
On a un point M de coordonnée $(a; b)$, on a les relations suivantes :
 - Si $a \geq 0$, $\theta = \text{Arcsin} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$
 - Si $a < 0$, $\theta = \pi - \text{Arcsin} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$

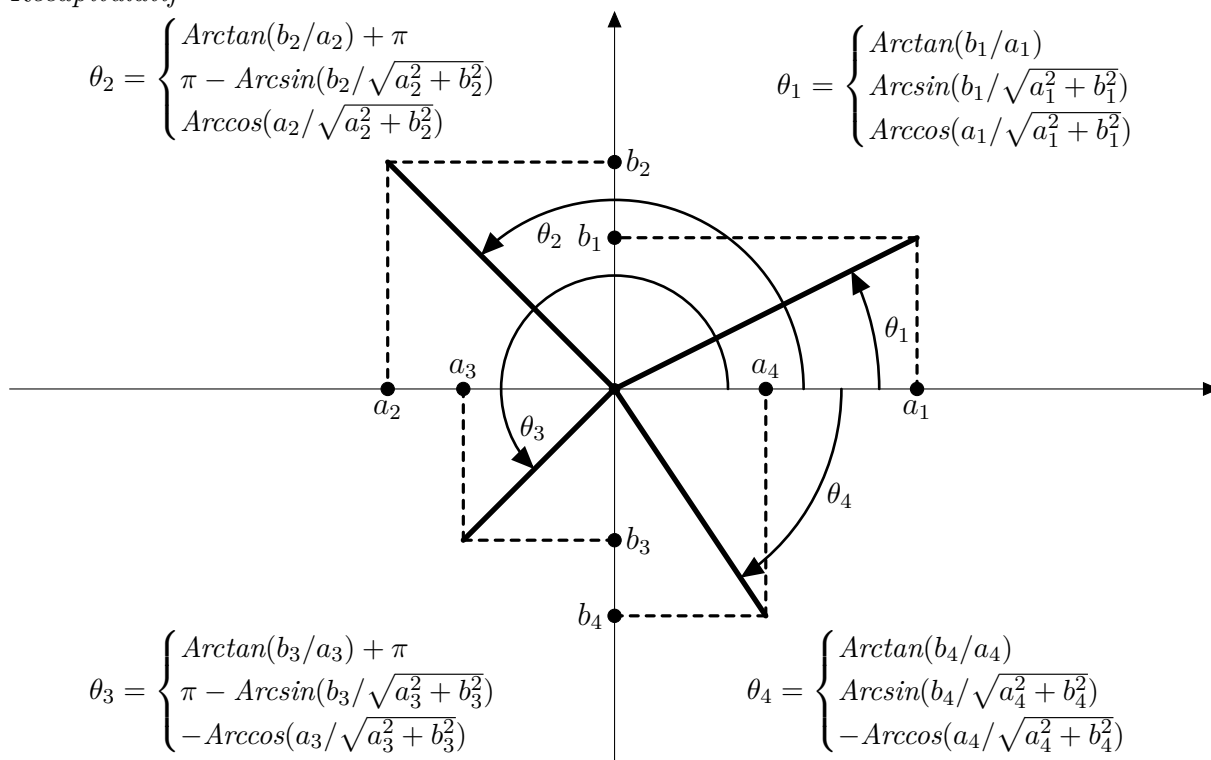
- Angle θ de la forme polaire à l'aide de Arctan :
On a un point M de coordonnée $(a; b)$, on a les relations suivantes :

- Si $a > 0$, $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$
- Si $a < 0$, $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$

- Récapitulatif

$$\theta_2 = \begin{cases} \text{Arctan}(b_2/a_2) + \pi \\ \pi - \text{Arcsin}(b_2/\sqrt{a_2^2 + b_2^2}) \\ \text{Arccos}(a_2/\sqrt{a_2^2 + b_2^2}) \end{cases}$$

$$\theta_1 = \begin{cases} \text{Arctan}(b_1/a_1) \\ \text{Arcsin}(b_1/\sqrt{a_1^2 + b_1^2}) \\ \text{Arccos}(a_1/\sqrt{a_1^2 + b_1^2}) \end{cases}$$



$$\theta_3 = \begin{cases} \text{Arctan}(b_3/a_3) + \pi \\ \pi - \text{Arcsin}(b_3/\sqrt{a_3^2 + b_3^2}) \\ -\text{Arccos}(a_3/\sqrt{a_3^2 + b_3^2}) \end{cases}$$

$$\theta_4 = \begin{cases} \text{Arctan}(b_4/a_4) \\ \text{Arcsin}(b_4/\sqrt{a_4^2 + b_4^2}) \\ -\text{Arccos}(a_4/\sqrt{a_4^2 + b_4^2}) \end{cases}$$

4 Continuité, dérivabilité et prolongement

4.1 En un point

On se ramène à la définition

Définition 34

- f est continue en a ssi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- f est dérivable en a ssi $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et appartient à \mathbb{R} .

4.2 Sur un intervalle

À l'aide des théorèmes généraux, on prouve la continuité ou la dérivabilité sur l'intervalle sauf en un nombre fini de points.

Les points qui posent problème sont généralement des points de rattachement de plusieurs définitions de f . Par exemple $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, la valeur $x = 0$ pose problème

On étudie, ensuite, la continuité ou la dérivabilité en ces points

4.3 Prolongement

On se ramène à la définition :

Définition 35

- f est prolongeable par continuité en a ssi $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et appartient à \mathbb{R} .
- f est prolongeable comme fonction C^1 en a ssi $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ existe et appartient à \mathbb{R} .

Proposition 19 (Utilisation des DL)

- f est prolongeable par continuité en a ssi f admet un $DL_0(a)$ et alors $f(x) = f(a) + o(1)$.
- f est prolongeable comme fonction C^1 en a ssi f admet un $DL_1(a)$ et alors $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o((x - a))$.

Remarque 40 Cette proposition est très pratique pour les question de prolongement C^1 . Elle évite de calculer f' et de faire deux limites.

5 Tableau de variation, dérivées

5.1 Dérivées classiques

Dérivée des fonctions de référence

$f(x)$	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	$f'(x)$
$x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	nx^{n-1}
$x^n \quad n \in \mathbb{Z}^*$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	nx^{n-1}
$x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\exp(\alpha x) \quad \alpha \in \mathbb{C}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\alpha \exp(\alpha x)$
$a^x \quad a \in \mathbb{R}_+^*$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$a^x \ln a$
$\ln x $	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$\frac{1}{x}$
$\log_a x \quad a \in \mathbb{R}_+^*$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$\frac{1}{x \ln a}$

$f(x)$	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	$f'(x)$
$\operatorname{ch} x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{sh} x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\operatorname{ch} x$
$\cos x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$-\sin x$
$\sin x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\cos x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$	$\mathbb{R} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$[-1; 1]$	$] - 1; 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$[-1; 1]$	$] - 1; 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\frac{1}{1+x^2}$

Opération sur les dérivées

composée	dérivée
$u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$
$u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha u'u^{\alpha-1}$
$u \times v$	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$(u'v - uv')/v^2$
$f(u)$	$u'f'(u)$

5.2 Tableau de signe de f'

Méthode 7 Pour déterminer le signe de f' , on met au même dénominateur et on factorise f' . Si l'un des facteurs pose problème (il possède par exemple un \ln), on factorise par le coefficient devant le \ln et on étudie les variations **UNIQUEMENT** du facteur qui reste pour connaître son signe.

Exemple 62 $f'(x) = x \ln x - 1 = x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$ et on étudie les variations de $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

5.3 Tableau de variation de f

Méthode 8 A partir du tableau de signe de f' , on trace le tableau de variation de f avec la règle : si $f' \leq 0$ sur $]a; b[$, f est décroissante sur $]a; b[$.

Remarque 41 Vous devez VERIFIER les variations de f à l'aide des limites. Par exemple, f ne peut pas être décroissante de 0 vers $+\infty$.

5.4 Intervalles stables

Définition 36 On dit que J est un intervalle stable pour f si et seulement si $f(J) \subset J$.

Méthode 9 Vous devez déterminer le tableau de variation de f sur l'intervalle I

5.5 Théorème de bijection

Théorème 3 (Théorème de bijection ou Corollaire du TVI)

Soit f une fonction continue, strictement monotone sur I .

Alors f est une bijection de I sur $f(I)$.

Méthode 10 Pour montrer que $f(x) = c$ admet une unique solution sur un intervalle I

1. On détermine le tableau de variation de f sur I .
2. On calcule $f(a)$ et $f(b)$.
3. **Rédaction 5** f est une fonction continue, strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a; b]$.

Donc f réalise une bijection de $[a; b]$ sur $[f(a); f(b)]$ (resp. $I = [f(b); f(a)]$).

De plus $c \in [f(a); f(b)]$ (resp. $c \in [f(b); f(a)]$).

Donc $f(x) = c$ admet une unique solution sur $[a; b]$.

5.6 Équations et inéquations

On ne sait résoudre que des équations ou inéquations dont les termes sont de même type : soit de type "logarithmique" (\ln , \arctan , \arcsin , \arccos , \log_a), soit de type "puissance" ($x \mapsto x^\alpha$, polynôme, fraction rationnelle), soit du type exponentiel (\exp , sh , ch , \cos , \sin , $x \mapsto a^x$).

Si ce n'est pas le cas, il est assez simple de s'intéresser au signe d'une expression en faisant soit un tableau de variation soit une majoration ou minoration par un des bords de l'intervalle d'étude.

Exemple 63 Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$, $\ln(1-x) < -x$

Posons $g : x \mapsto \ln(1-x) + x$, g est \mathcal{C}^1 sur $]0; 1[$ et $\forall x \in]0; 1[$, $g'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x} < 0$
 g est strictement décroissante.

Donc $\forall x \in]0; 1[$, $g(x) < g(0) = 0$ c'est-à-dire $\ln(1-x) < -x$

Remarque 42 On peut aussi montrer ce genre d'inégalité par la convexité ou concavité de la fonction.

Proposition 20 (Convexité-concavité) • f est convexe sur $[a; b]$ ssi $f'' \geq 0$ sur $[a; b]$.

Et alors la courbe de f est au dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes.

• f est concave sur $[a; b]$ ssi $f'' \leq 0$ sur $[a; b]$.

Et alors la courbe de f est en dessous de ses tangentes et au dessus de ses cordes.

Exemple 64 Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $\arctan(x) \geq \frac{\pi}{4}x$

\arctan est concave sur \mathbb{R}^+ car $\arctan''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \leq 0$

Donc \arctan est au dessus de ses cordes. La corde sur $[0; 1]$ est

$$y = \frac{\arctan(1) - \arctan(0)}{1 - 0}(x - 0) + \arctan(0) = \frac{\pi}{4}x$$

Ainsi pour tout $x \in [0; 1]$, $\arctan(x) \geq \frac{\pi}{4}x$.

5.7 Nombre de solutions d'une fonction f

Méthode 11 Faire un tableau de variation de la fonction et sur chaque changement de monotonie sur un intervalle, utiliser le théorème de bijection 5.5 pour savoir si il y a une solution sur l'intervalle correspondant

Exemple 65

x	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$f(x)$	0	-13	5	$-\infty$

f admet 2 solutions à $f(x) = 0$, une sur $[-3; 5]$ et une sur $]5; +\infty[$.

6 Propriétés de la fonction f

6.1 Périodicité

Définition 37 Une fonction f définie sur \mathbb{R} est dite périodique de période T si et seulement si $f(x + T) = f(x)$.

- Les fonctions cos et sin sont 2π -périodiques
- La fonction tan est π -périodique
- La fonction $x \rightarrow [x]$ (partie entière de x) est 1-périodique

Méthode 12 Pour déterminer la périodicité d'une fonction composée de sin, cos et tan, on cherche la périodicité de chaque terme.

Puis on prend le plus petit multiple commun.

Exemple 66 Soit $f : x \mapsto \sin(9x) \cos(6x)$

$x \mapsto \sin(9x)$ a pour période $9T = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{2}{9}\pi$, les multiples sont $\frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{8}{9}\pi, \dots$

$x \mapsto \cos(6x)$ a pour période $6T = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{1}{3}\pi$, les multiples sont $\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \dots$

La période commune est $\frac{2}{3}\pi$

f est $\frac{2}{3}\pi$ périodique.

Il est des fois nécessaire de tester un diviseur de ce multiple commun pour trouver la meilleur période

Exemple 67 Soit $f : t \mapsto \cos^2(t)$

cos est 2π périodique.

Mais $f(x + \pi) = (\cos(x + \pi))^2 = (-\cos(x))^2 = f(x)$

f est π périodique.

6.2 Parité de la fonction

Définition 38 • Une fonction f définie sur \mathbb{R} est dite paire si et seulement si $f(-x) = f(x)$.

- Une fonction f définie sur \mathbb{R} est dite impaire si et seulement si $f(-x) = -f(x)$.

Méthode 13 Pour déterminer la parité d'une fonction, on calcul $f(-x)$ et on simplifie au maximum l'expression pour retrouver $f(x)$ ou $-f(x)$.

Si on vous pose **EXPLICITEMENT** de montrer que la fonction est paire (resp. impaire), vous pouvez calculer $f(-x) - f(x)$ (resp. $f(-x) + f(x)$) et trouver 0

Autres symétries :

Définition 39 • Une fonction f définie sur \mathbb{R} est symétrique par rapport à la droite $x = a$ si et seulement si $f(a - x) = f(a + x)$.

- Une fonction f définie sur \mathbb{R} est symétrique par rapport aux points $A(a; b)$ si et seulement si $\frac{f(a-x) + f(a+x)}{2} = b$.

Ces formules se comprennent bien à l'aide d'un dessin.

6.3 Tangente de la fonction

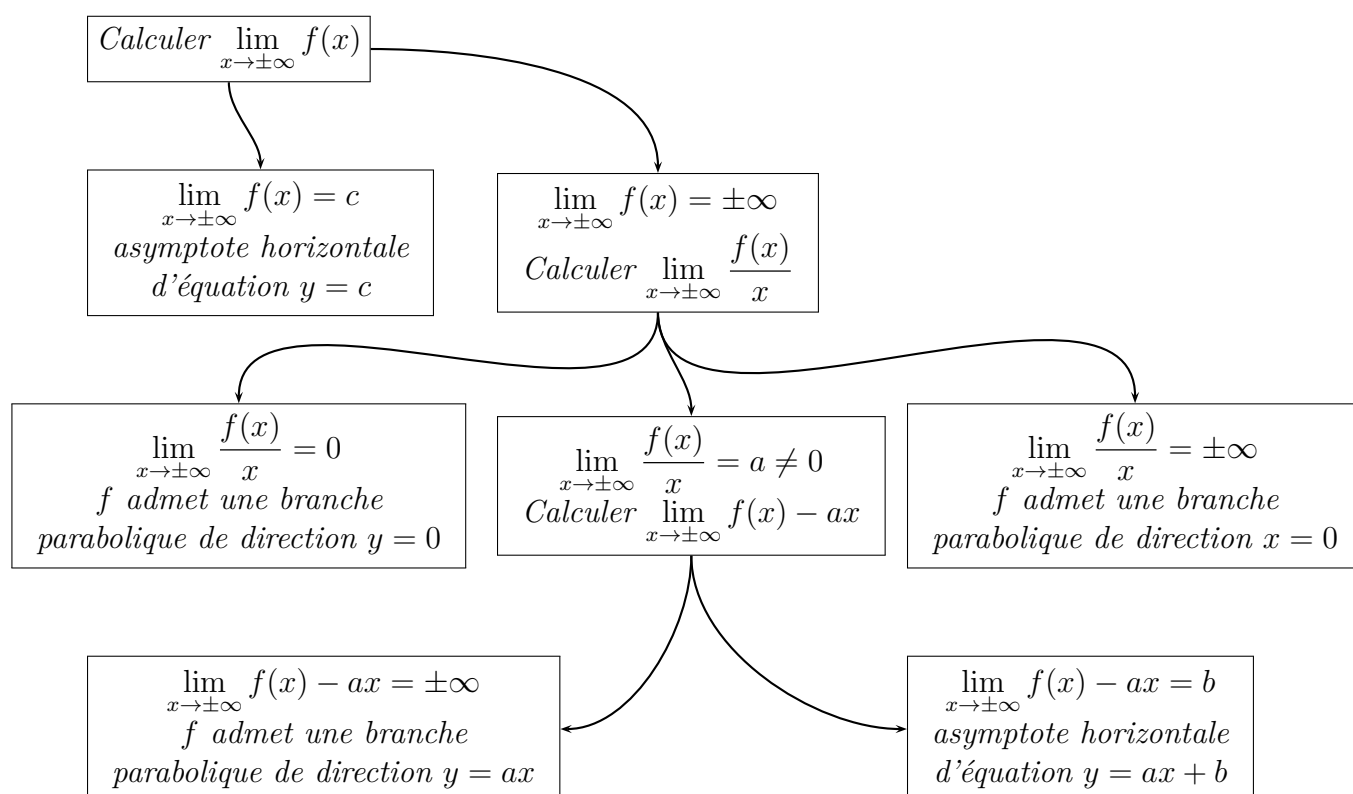
Définition 40 Soit f une fonction C^1 sur un intervalle I et $a \in I$.

L'équation de la tangente en a est donnée par la formule :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

6.4 Asymptotes et branches infinies

Méthode 14 Pour le cas où $x \rightarrow \pm\infty$, il y a une méthode classique d'étude de ces branches, vous devez suivre l'arbre ci-dessous.



Remarque 43 Un $DL_0(\pm\infty)$ permet de donner directement l'asymptote oblique en $\pm\infty$.

Exemple 68 Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ sur \mathbb{R}_+^* , donner l'asymptote en $+\infty$.
Pour tout $x > 0$;

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{1/2} \\ &= x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Donc $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe.

6.5 Déterminer la fonction réciproque f^{-1}

Pour déterminer la fonction réciproque f^{-1} , vous devez résoudre $f(x) = y$ où y est une paramètre. Vous obtenez alors $x = g(y)$ et la fonction g est la fonction f^{-1} .

7 Fonctions à plusieurs variables

7.1 Continuité

Montrer qu'une fonction n'est pas continue en $(0, 0)$ On étudie les limites des fonctions $f(0, y)$, $f(x, 0)$, $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ et on montre qu'au moins deux de ces limites sont différentes en $(0, 0)$.

Si nécessaire, calculer $f(x, x^\alpha)$ ou $f(x, ax + x^\alpha)$ ($\alpha \geq 0$) et déterminer α pour avoir une limite différente.

Exemple 69 Étudier la continuité de $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^4}{x^4+y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Cherchons $\alpha > 0$ tel que $\forall x > 0$, $f(x, x^\alpha)$ ne tende pas vers 0

$f(x, x^\alpha) = \frac{x^{1+4\alpha}}{x^4+x^{6\alpha}}$. On va choisir α tel que $4 = 6\alpha$ soit $\alpha = \frac{2}{3}$ (d'autres valeurs sont valables)

Ainsi $f(x, x^\alpha) = \frac{x^{11/3}}{2x^4} = \frac{1}{2x^{1/3}} \rightarrow +\infty \neq 0 = f(0, 0)$

Donc f n'est pas continue en $(0, 0)$

Montrer qu'une fonction est continue en $(0, 0)$ On pose $\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$ et on calcule

$f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$.

On factorise au maximum et on simplifie aussi grâce à l'expression $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ pour trouver $f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = \rho^\alpha g(\rho, \theta)$ avec $\alpha > 0$.

On majore $|f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) - f(0, 0)|$ par une fonction $\varphi(\rho)$ (ne plus avoir de θ !) tel que $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varphi = 0$

Exemple 70 Étudier la continuité de $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Posons $\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$, pour tout $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \frac{\rho^4 \cos^4 \theta \rho |\sin \theta|}{\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^6 \sin^6 \theta} \leq \frac{\rho^4 \cos^4 \theta \rho |\sin \theta|}{\rho^4 \cos^4 \theta} \\ &\leq \rho |\sin \theta| \leq \rho \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{(0,0)} f = f(0, 0)$

Donc f est continue en $(0, 0)$

7.2 Dérivabilité

Au programme seul les applications polynômiales sont connues comme C^2 sur \mathbb{R}^2 .

Pour JUSTIFIER de la dérivabilité, vous utilisez les théorèmes généraux sur \mathbb{R} , Composée, produit, quotient de fonction C^2 sur \mathbb{R} .

Le gradient est le vecteur $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$

Règle de la chaîne : les fonctions considérées étant de classe C^1 , la fonction $g : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe C^1 et

$$g'(t) = \frac{df}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

De même $g : (u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est C^1 et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v)$$

7.3 Points critiques

Définition 41

Les points critiques d'une fonction f définie sur $U \subset \mathbb{R}^2$ sont les solutions de
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} .$$

Remarque 44 Si avant de faire l'étude d'une fonction à deux variables f , vous avez étudié une fonction à une variable g et déterminer un élément α telle que $g(\alpha) = 0$.

Alors cet élément α va intervenir dans la résolution de
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} .$$

Vous devez donc **faire apparaître** g dans ce système.

Il est aussi utile d'utiliser les expressions avec g pour la dérivée seconde en conservant g' dans l'expression (en effet g' est obligatoirement de signe strictement positif ou négatif en α).

7.4 Extrema globaux

Pour chercher un extrema, il faut se placer à un point critique.

Montrer que l'on n'a pas d'extremum global en $(0, 0)$

On étudie les fonctions $f(0, y)$, $f(x, 0)$, $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ et on montre qu'une de ces fonctions n'a pas d'extremum en $(0, 0)$.

Si cela ne fonctionne pas, on s'intéressera à $f(x, x^\alpha)$ en cherchant un bon $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Méthode des carrés pour un polynôme du second degré

Méthode 15 Vous devez regrouper tous les x ensemble et faire apparaître une forme normale d'un polynôme en x avec y en paramètre (ne pas oublier de factoriser par le coefficient devant x^2).

Une fois que le premier carré avec du x est apparu, le mettre de côté et développer et simplifier le reste (ne dépend que de y) puis refaire une forme normale avec cette expression.

Exemple 71 Soit $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 7y^2 - 12x + 4y - 1$.

Alors $f(x, y) = 3(x^2 + 2xy - 4x) + 7y^2 + 2y - 1$.

On pose $a^2 = x^2$ et $2ab = 2xy - 4x$, c'est à dire $a = x$ et $b = y - 2$.

Donc $x^2 + 2xy - 4x = (x + (y - 2))^2 - (y - 2)^2$ ($a^2 + 2ab = (a + b)^2 - b^2$).

On en déduit que

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 3((x + (y - 2))^2 - (y - 2)^2) + 7y^2 + 2y - 1 = 3(x + (y - 2))^2 - 3(y - 2)^2 + 7y^2 + 2y - 1 \\ &= 3(x + (y - 2))^2 - 3(y^2 - 4y + 4) + 7y^2 + 4y - 1 = 3(x + (y - 2))^2 + 4y^2 + 16y - 13 \\ &= 3(x + (y - 2))^2 + 4(y^2 + 4y) - 13.\end{aligned}$$

On pose $a^2 = y^2$ et $2ab = 4y$, c'est à dire $a = x$ et $b = 2$.

Donc $y^2 + 4y = (y^2 + 2)^2 - 2^2$ ($a^2 + 2ab = (a + b)^2 - b^2$).

On en déduit que $f(x, y) = 3(x + (y - 2))^2 + 4((y - 2)^2 - 4) - 13 = 3(x + (y - 2))^2 + 4(y - 2)^2 - 29$.

Comme $3(x + (y - 2))^2 + 4(y - 2)^2 \geq 0$, on a $f(x, y) \geq -29$.

-29 est un minimum global et est atteint pour $\begin{cases} x + (y - 2) = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$ c'est à dire pour le point $(0, 2)$.

Seizième partie

Analyse N°2 : Suites et séries

1 Suites récurrentes

1.1 Suites arithmétiques

Définition 42 Une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite arithmétique s'il existe une constante $r \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

La constante r de la définition s'appelle la raison de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 21 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique et r sa raison.

Alors, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, $u_n = u_k + (n - k)r$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

Proposition 22 (somme des termes d'une suite arithmétique.) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

la somme des premiers termes d'une suite arithmétique

= (nombre de termes) (la moyenne des termes extrêmes).

1.2 Suites géométriques

Définition 43 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels est dite géométrique s'il existe un réel q tel que $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La constante q de la définition s'appelle la raison de la suite (u_n) .

Proposition 23 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique et q sa raison. Alors, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, $u_n = u_k q^{n-k}$.

En particulier, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$.

Proposition 24 (somme des termes d'une suite géométrique.) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q . On suppose $q \neq 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n = \sum_{i=k}^n u_i = u_k \left(\frac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q} \right)$$

la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison q

= (premier terme) $\times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}$

1.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 44 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels est dite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a, b tel que $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique vérifiant que $\forall n \geq 0, u_{n+1} = au_n + b$, alors il est possible d'exprimer simplement u_n en fonction de n . La méthode est la suivante :

- on cherche un réel ℓ tel que $\ell = a\ell + b$;
- on vérifie que la suite définie par $\forall n \geq 0, v_n = u_n - \ell$ est géométrique par différence ;
- on en déduit une formule simple pour v_n puis pour u_n .

Exemple 72 Considérons la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2, \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique. On cherche alors un réel ℓ tel que :

$$3\ell + 2 = \ell \Leftrightarrow 2\ell = -2 \Leftrightarrow \ell = -1.$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \ell$.

On a

$$\begin{array}{r} u_{n+1} = 3u_n + 2 \\ - \ell = 3\ell + 2 \\ \hline v_{n+1} = 3v_n + 0 \end{array}$$

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3. On sait alors que : $\forall n \geq 0, v_n = v_0 3^n = (u_0 + 1)3^n = 3^n$

Et on conclut en écrivant : $\forall n \geq 0, u_n = v_n - 1 = 3^n - 1$

1.4 Suite linéaire récurrente d'ordre 2

Définition 45 On appelle suite linéaire récurrente d'ordre 2 toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant une relation de la forme $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ où a et b sont des constantes.

Avec les notations de la définition, on appelle *équation caractéristique* de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'équation :

$$x^2 - ax - b = 0$$

L'équation caractéristique est une équation du second degré, on sait la résoudre en calculant son discriminant.

Proposition 25 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à double récurrence linéaire.

- Si l'équation caractéristique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , c'est-à-dire si $\Delta > 0$, alors il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Si l'équation caractéristique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une racine double r , c'est-à-dire si $\Delta = 0$, alors il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu)r^n$$

- Si l'équation caractéristique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a deux racines complexes conjuguées r_1 et $r_2 = \overline{r_1}$, on écrit r_1 sous forme polaires $r_1 = \rho e^{i\theta}$ (alors $r_2 = \rho e^{-i\theta}$). Alors il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \rho^n \cos(n\theta) + \mu \rho^n \sin(n\theta)$$

Dans les deux premier cas, on peut déterminer e et f connaissant les deux premiers termes, c-à-d u_0 et u_1 .

Exemple 73 On définit une suite en posant : $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Son équation caractéristique est : $x^2 - 3x + 2 = 0$

Les racines de cette équation sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. D'après la proposition, il existe donc deux réels e et f tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e1^n + f2^n = e + f2^n$.

Il nous reste à déterminer e et f en appliquant la formule pour $n = 0$ et $n = 1$.

$$\begin{cases} u_0 = e + f2^0 = 0 \\ u_1 = e + f2^1 = 1 \end{cases} \iff e = -1, f = 1$$

On trouve $e = -1$ et $f = 1$, ce qui permet de conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -1 + 2^n$$

1.5 Étude générale de $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans toute la suite f désignera une fonction définie sur un intervalle I et on considère $U_{n+1} = f(U_n)$

1.5.1 Existence de tous les termes de la suite

Méthode 16 Supposons que l'intervalle I soit un intervalle stable de f (c'est-à-dire $f(I) \subset I$ que l'on peut montrer en faisant le tableau de variation de f) et que $u_0 \in I$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$

Pour le démontrer, posons l'hypothèse de récurrence suivante

$$\mathcal{H}_n : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \in I$$

- Initialisation : \mathcal{H}_0 est trivialement vrai
- Hérédité : Supposons que \mathcal{H}_n est vrai. Alors u_n existe et $u_n \in I$ donc $f(u_n)$ existe et par stabilité de I par f , $f(u_n) \in I$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ donc \mathcal{H}_{n+1} est vrai.
- Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, \mathcal{H}_n est vrai.

1.5.2 Monotonie de la suite

Si f est croissante et u_0 est explicite

Méthode 17 Supposons que f est continue sur un intervalle I stable par f et contenant u_0 . Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$.

Supposons en outre que f est croissante sur l'intervalle I .

On calcule alors explicitement $u_1 (= f(u_0))$ et on distingue les deux cas suivants

- $u_0 \leq u_1$

On va montrer par récurrence que la suite u est croissante. Posons,

$$\mathcal{H}_n : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$$

- Initialisation : \mathcal{H}_0 est trivialement vrai
- Hérédité : Supposons que \mathcal{H}_n est vrai donc $u_n \leq u_{n+1}$. Or la fonction f est croissante sur J et u_n ainsi que u_{n+1} appartiennent à J donc

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

ce qui montre que \mathcal{H}_{n+1} est vrai.

- Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, \mathcal{H}_n est vrai et la suite u est croissante

- $u_0 \geq u_1$

On va montrer par récurrence que la suite u est décroissante. Posons,

$$\mathcal{H}_n : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$$

- Initialisation : \mathcal{H}_0 est trivialement vrai
- Hérédité : Supposons que \mathcal{H}_n est vrai donc $u_n \geq u_{n+1}$. Or la fonction f est croissante sur J et u_n ainsi que u_{n+1} appartiennent à J donc

$$f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_{n+2}$$

ce qui montre que \mathcal{H}_{n+1} est vrai.

- Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, \mathcal{H}_n est vrai et la suite u est décroissante

Si f est décroissante et u_0 est explicite

Méthode 18 Supposons que f est continue sur un intervalle I stable par f et contenant u_0 . Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$.

Supposons en outre que f est décroissante sur l'intervalle I . Nous introduisons alors deux suites auxiliaires a et b définies par

$$a_n = u_{2n} \text{ et } b_n = u_{2n+1}$$

Calculons a_{n+1}

$$a_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(a_n)$$

Donc la suite a vérifie une relation de récurrence donnée par

$$a_{n+1} = (f \circ f)(a_n)$$

Par définition $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n (= u_{2n}) \in I$ qui est un intervalle stable de $f \circ f$ et la fonction $f \circ f$ est croissante sur I ! On peut donc étudier la monotonie de la suite a à l'aide de la section 17. De même, la suite b est définie par la relation

$$b_{n+1} = (f \circ f)(b_n)$$

et on procède de même que pour a .

Remarque 45 Les étapes de cette méthode sont en générale détailler dans les énoncés

$f(x) - x$ est de signe constant

Méthode 19 Supposons que f est continue sur un intervalle I stable par f et contenant u_0 .
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$

Supposons en outre que le signe de $f(x) - x \geq 0$ (resp. ≤ 0) sur I . Alors la suite u est croissante (resp. décroissante). Cela résulte du petit calcul suivant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0 \text{ (resp. } \leq 0)$$

1.5.3 Convergence

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in (a; b)$

 u est croissante

1. Si u est majorée (par exemple, si $b \neq +\infty$) alors elle converge vers un point fixe de f appartenant à $[a; b]$
2. Si u ne semble pas majorée (par exemple $b = +\infty$). On essaie de minorer u par un nombre m tel qu'il n'existe pas de point fixe pour f sur l'intervalle $[m; b]$ et on utilise le raisonnement suivant
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$. Supposons que la suite u converge vers une limite finie l . Par suite $l \geq m$ et l est un point fixe de f . Or f ne possède pas de point fixe $[m; b]$ donc la suite ne converge pas et puisqu'elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$

 u est décroissante

1. Si u est minoré (par exemple, si $a \neq -\infty$) alors elle converge vers un point fixe de f appartenant à $[a; b]$
2. Si u ne semble pas minorée (par exemple $a = -\infty$). On essaie de majorer u par un nombre M tel qu'il n'existe pas de point fixe pour f sur l'intervalle $[a; M]$ et on utilise le raisonnement suivant
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$. Supposons que la suite u converge vers une limite finie l . Par suite $l \leq M$ et l est un point fixe de f . Or f ne possède pas de point fixe $[a; M]$ donc la suite ne converge pas et puisqu'elle est croissante, elle diverge vers $-\infty$

Utilisation du IAF À partir de la relation déduite du IAF (voir section 1.5.4), nous pouvons appliquer le théorème d'encadrement :

Méthode 20 Nous avons $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$
Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$, alors d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$.

1.5.4 Application du IAF

Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq k |u_n - \alpha|$

Supposons que f soit de classe C^1 sur un intervalle stable $[a; b]$ (avec a, b deux nombres réels). Par conséquent, f possède au moins un point fixe sur le segment $[a; b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in [a; b]$.

Supposons en outre qu'il existe un nombre réel $k \in [0; 1[$ tel que

$$\forall x \in [a; b], |f'(x)| \leq k.$$

Soit α un point fixe de f appartenant à $[a; b]$. Alors la suite u converge vers ce point fixe.

Méthode 21 L'inégalité précédente nous permet d'appliquer l'inégalité des accroissements finis donc

$$\forall x, y \in [a; b], |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|.$$

Puisque $\forall n \in \mathbb{N} u_n \in [a; b]$ et $\alpha \in [a; b]$, nous remplaçons x par u_n et y par α dans l'inégalité précédente, ce qui nous donnent

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(\alpha)| \leq k |u_n - \alpha|.$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq k |u_n - \alpha|.$$

Montrer que $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$

Posons la récurrence

$$\mathcal{H}_n : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|.$$

- Initialisation : $k^0 |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha|$ donc $|u_0 - \alpha| \leq k^0 |u_0 - \alpha|$ donc \mathcal{H}_0 est vrai
- Initialisation : Supposons que \mathcal{H}_n est vrai donc

$$|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|.$$

Or on a

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq k |u_n - \alpha|.$$

donc

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq k \times k^n |u_0 - \alpha| = k^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

ce qui montre que \mathcal{H}_{n+1} est vrai

- Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, \mathcal{H}_n est vrai
- Puisque $|k| < 1$, la suite géométrique $(k^n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 et l'inégalité

$$|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|.$$

montre que la suite u converge vers α . En particulier, on constate que la fonction f ne possède alors qu'un seul point fixe

1.5.5 Programmation en Python

La programmation d'une suite récurrente est la plus CLASSIQUE. vous devez la connaître. Voici que l'intérieur du programme pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_{n_0} = \ell$.

`u=ℓ`

`n=n0`

`while TEST :`

`u=f(u)`

`n=n+1`

La valeur de **TEST** dépendant de la question posée, vous la remplacer par ce qui suit si on on demande de :

- Calculer le terme u_N : **TEST**=" n<N"

- Déterminer n tel que $u_n > M$: **TEST**=" $u < M$ "
- Déterminer une valeur de α à **EPS** après un **IAF** :
 Le IAF vous a donné : $|u_n - \alpha| \leq k^n$ dans la question précédente. Résoudre $k^n \leq \text{ESP} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(\text{EPS})}{\ln(k)}$
 Et alors **TEST**=" $n < \ln(\text{EPS}) / \ln(k)$ "

2 Les suites implicites : $f(u_n) = a_n$ ou $f_n(u_n) = 0$

2.1 Existence de u_n sur I

Pour montrer l'existence et l'unicité de u_n , il faut pour cela étudier la fonction f ou f_n sur I et utiliser le théorème de bijection pour soit $a_n \in f(I)$ soit $0 \in f_n(I)$.

Exemple 74 Soit $f_n : x \mapsto x^5 + nx + 1$

Montrer qu'il existe une unique suite $(u_n) \in [-1; 0]^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(u_n) = 0$.

f_n est C^1 sur $[-1; 0]$ et pour tout $x \in [-1; 0]$, $f'_n(x) = 5x^4 + n > 0$

Donc f_n est continue et strictement croissante sur $[-1; 0]$.

D'après le théorème de bijection, f_n est une bijection de $[-1; 0]$ dans $[-n; 1]$

Donc $\exists! u_n \in [-1; 0]$ tel que $f_n(u_n) = 0$

2.2 Monotonie

Pour $f_n(u_n) = 0$:

Méthode 22

On détermine le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

- Si $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$
 Pour $x = u_n$, nous avons $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \geq 0$.
 Or $f_n(u_n) = 0$, d'où $f_{n+1}(u_n) \geq 0$.
 Comme $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, $(f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1}))$
 Or f_{n+1} est croissante (resp. décroissante).
 Donc $u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $u_n \leq u_{n+1}$)
- Si $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$
 Pour $x = u_n$, nous avons $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \leq 0$.
 Or $f_n(u_n) = 0$, d'où $f_{n+1}(u_n) \leq 0$.
 Comme $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, $(f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1}))$
 Or f_{n+1} est croissante (resp. décroissante).
 Donc $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$)

Pour $f(u_n) = a_n$:

Méthode 23

On compare a_{n+1} et a_n .

- Si $a_{n+1} \geq a_n$
 On a alors $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$.
 Or f est croissante (resp. décroissante).
 Donc $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$)
- Si $a_{n+1} \leq a_n$
 On a alors $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$.
 Or f est croissante (resp. décroissante).
 Donc $u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $u_{n+1} \geq u_n$)

Exemple 75 Pour l'exemple précédent,

$$\forall x \in [-1; 0], f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^5 + (n+1)x + 1 - (x^5 + nx + 1) = x \leq 0$$

Ainsi pour $x = u_n$, $f_{n+1}(u_n) - 0 \leq 0$.

Or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$

Par conséquent, $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$

Or f_{n+1} est croissante sur $[-1; 0]$

Donc $u_n \leq u_{n+1}$

(u_n) est croissante.

2.3 Encadrement de la suite u_n

On veut montrer dans cette question que $a \leq u_n \leq b$.

Méthode 24 La méthode se fait en deux étapes :

1. On calcule les images par f (ou f_n) de a, u_n et b .

$$f(a) = \dots \quad ; f(u_n) = \dots \quad ; f(b) = \dots$$

2. On compare les trois résultats précédents et on utilise la monotonie de f (ou f_n)

Rédaction 6 On obtient $f(a) \leq f(u_n) \leq f(b)$ (resp. $f(b) \leq f(u_n) \leq f(a)$).

Or f est croissante (resp. décroissante) sur I et $a, b, u_n \in I$.

Alors $a \leq u_n \leq b$.

Exemple 76 Pour l'exemple précédent, montrer que $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq 0$

On a $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^5} < 0$, $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(0) = 1 > 0$

Ainsi $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) \leq f_n(u_n) \leq f_n(0)$

Or f_n est croissante sur $[-1; 0]$

Donc $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq 0$

2.4 Convergence

On peut le faire de deux façons suivant les questions précédentes :

- Par encadrement : Il suffit d'utiliser le théorème d'encadrement
- Par le théorème de la borne sup : On démontre la convergence de la suite vers un réel que l'on note $\ell \in I$ en montrant que (u_n) croissante et majorée (ou décroissante et minorée)

Pour calculer la limite, on part de l'expression $f_n(u_n) = 0$ ou $f(u_n) = a_n$. On s'arrange pour que rien ne puisse tendre vers $\pm\infty$ et on passe à la limite.

Exemple 77 Pour l'exemple précédent, on a montré que (u_n) est croissante et majorée par 0

Donc (u_n) converge vers $\ell \in [-1; 0]$

De plus $f_n(u_n) = u_n^5 + nu_n + 1 = 0$

Ainsi $\frac{1}{n}u_n^5 + u_n + \frac{1}{n} = 0$

En passant à la limite, $0 + \ell + 0 = 0$

Donc $\lim_{+\infty} u_n = 0$

2.5 Développement asymptotique

On cherche un développement en $+\infty$ de la suite implicite en $o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

On part de l'expression $f_n(u_n) = 0$ ou $f(u_n) = a_n$ et on isole un u_n pour obtenir $u_n = g_n(u_n)$

Comme $u_n \rightarrow \ell$, on peut écrire $u_n = \ell + o(1)$ et faire un DL de $g_n(\ell + o(1))$

Cela donne un DL d'ordre supérieur à $u_n = \ell + \dots + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

On réitère le DL de $g_n\left(\ell + \dots + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$ jusqu'à obtenir l'ordre souhaité.

Exemple 78 Pour l'exemple précédent, donner un développement asymptotique de u_n en $o\left(\frac{1}{n^{11}}\right)$.

On a $f_n(u_n) = u_n^5 + nu_n + 1 = 0$

Ainsi $u_n = -\frac{1}{n}u_n^5 + \frac{1}{n}$

Or $\lim_{+\infty} u_n = 0$, c'est-à-dire $u_n = o(1)$

Par conséquent, $u_n = -\frac{1}{n}(o(1))^5 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

On réitère $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^5 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6}(1 + o(1))^5 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$

De même

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)^5 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6}\left(1 - \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)^5 \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6}\left(1 - 5\frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + 5\frac{1}{n^{11}} + o\left(\frac{1}{n^{11}}\right) \end{aligned}$$

3 Étude générale d'une suite

3.1 Monotonie d'une suite

On étudie en générale le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Vous pouvez aussi faire le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ uniquement si vous avez prouvé que $u_n > 0$, pour tout n .

3.2 Convergence d'une suite

Cette question se passe principalement sur la question précédente de l'énoncé :

Vous avez montré déjà que la suite est monotone ou majorée ou bornée

On utilise le théorème de convergence.

Théorème 4 • (u_n) est une suite croissante en majorée par \dots , alors la suite (u_n) est convergente.

• (u_n) est une suite décroissante et minorée par \dots , alors la suite (u_n) est convergente.

Vous avez montré un encadrement de $u_n - \alpha$ dans la question précédente

Vous devez utiliser le théorème d'encadrement.

Méthode 25 On a $v_n \leq u_n - \alpha \leq w_n$.

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \ell$.

D'après le théorème d'encadrement $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n - \alpha = \ell$.

3.2.1 Déterminer un équivalent de u_n ou $n^\alpha u_n$

Vous devez vous référer à la dernière relation sur u_n ou le dernier encadrement de u_n que l'énoncé vous demande de prouver.

Le dernier élément déterminé est une relation

Méthode 26 • Vous faites apparaître $u_n = \dots$ ou $n^\alpha u_n = \dots$ à partir de cette relation.

- Vous déterminer enfin un équivalents des \dots .

Le dernier élément déterminé est un encadrement

Méthode 27 1. Faire apparaître $\dots \leq u_n \leq \dots$ ou $\dots \leq n^\alpha u_n \leq \dots$ à partir de cette encadrement.

2. Chercher un équivalent de la partie à droite et à gauche de l'encadrement et vous devez trouver le **même équivalent** v_n .

3. Calculer ensuite des encadrements du 1., un encadrement de $\frac{u_n}{v_n}$ ou $\frac{n^\alpha u_n}{v_n}$.

4. Utiliser le théorème d'encadrement

Rédaction 7 D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ (resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha u_n}{v_n} = 1$).

Donc $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ (resp. $u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{v_n}{n^\alpha}$)

4 Somme et série

4.1 Somme

Il n'y a que deux méthodes de calcul de somme que vous connaissez. Le calcul direct avec des sommes de références et l'effet domino.

4.1.1 Sommes de référence

Proposition 26 Les sommes de référence sont :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\sum_{k=p}^q 1 = q - p + 1$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ si } q \neq 1$$

$$\sum_{k=p}^n q^k = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \text{ si } q \neq 1 \quad \left| \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n \right.$$

Méthode 28 On s'intéresse à S_n , on la décompose pour faire apparaître des séries de références (**attention, les sommes de références commencent à 0**).

Vous devez développer l'expression et regrouper ce qui se ressemble ensemble (les puissances avec les puissances, les polynômes avec les polynômes, ...) et simplifier les expressions au maximum.

Deux principes principaux :

- La somme d'une somme et la somme des sommes
- Tout ce qui ne dépend pas de l'indice d'un produit de l'expression, on le sort de la somme.

Ensuite, vous devez d'abord faire apparaître l'expression des sommes de référence. Puis vous gérez les bords de votre somme.

Exemple 79 On considère la somme $S_n = \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{3^{n-k}}{2^k} - \frac{k3^{2k+1}}{9^{k-2}} \right)$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{3^{n-k}}{2^k} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k3^{2k+1}}{9^{k-2}} = \sum_{k=2}^{n-1} 3^n 3^{-k} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=2}^{n-1} k33^{2k} \frac{1}{9^k 9^{-2}} \\ &= 3^n \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{3^k 2^k} - 27 \sum_{k=2}^{n-1} k(3^2)^k \frac{1}{9^k} = 3^n \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{3^k 2^k} - 27 \sum_{k=2}^{n-1} k \\ &= 3^n \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{6} \right)^k - 27 \sum_{k=2}^{n-1} k = 3^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6} \right)^k - \frac{1}{6} - 1 \right) - 27 \left(\sum_{k=0}^{n-1} k - 1 - 0 \right) \\ &= 3^n \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{6} \right)^n}{1 - \frac{1}{6}} - \frac{7}{6} \right) - 27 \left(\frac{(n-1)n}{2} - 1 \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

4.1.2 Effet domino ou somme télescopique

On doit se trouver dans le cas $u_n = a_{n+1} - a_n$ ou $u_n = \alpha a_{n+1} + \beta a_n + \gamma a_{n-1}$ avec $\alpha + \beta + \gamma = 0$. La méthode est :

Etape 1 : remplacer u_n par son expression et séparer les sommes (somme d'une somme est la somme des sommes et tout ce qui ne dépend pas de l'indice, on le sort)

Etape 2 : Effectuer des changements d'indice pour que l'expression dans les sommes soit la même partout.

Etape 3 : Trouver les indices communs à toutes les sommes et découper les sommes pour faire apparaître ses indices communs.

Etape 4 : Il ne reste plus que ce qui n'est pas commun, le simplifier.

Cas particulier : Décomposition en facteur premier

Méthode 29 Si $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q) - 1$.

Alors on factorise $Q(n) = \prod_{i=1}^p (n - n_i)$ et alors $u_n = \sum_{i=1}^p \frac{a_i}{n - n_i}$ et on détermine a_i par identification.

Exemple 80 On veut $S_N = \sum_{k=2}^N u_k$ Soit $u_n = \frac{1}{n^2-1}$ pour $n \geq 2$.

Alors $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ et $u_n = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$.

$\frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1)+b(n-1)}{n^2-1} = \frac{(a+b)n+(a-b)}{n^2-1}$. Donc $\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 1 \end{cases}$, c'est à dire $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

Donc $u_n = \frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n+1}$

Et

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=2}^N u_k = \sum_{k=2}^N \frac{1/2}{k-1} - \frac{1/2}{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^N \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^N \frac{1}{k+1} \\ &\text{pour } j+1 = n-1, \text{ c'est-à-dire } j = n-2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-2} \frac{1}{j+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^N \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^{N-2} \frac{1}{j+1} + \frac{1}{0+1} + \frac{1}{1+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=2}^{N-2} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{N-1+1} + \frac{1}{N+1} \right) \\ S_N &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{2(N+1)} \end{aligned}$$

4.1.3 Inversion du symbole somme

Nous travaillons sur $\sum_{i=0}^n \sum_{j=a_i}^{b_i} f(i, j)$ et nous voulons l'écrire de la forme $\sum_{j=p}^q \sum_{i=\alpha_j}^{\beta_j} f(i, j)$.

- Méthode cas simple : Dans le cas où a_i et b_i sont simplement i , n ou un nombre 0, 1,

...

On crée un système formé des deux encadrements, puis on regroupe ce système en une seule expression pour le récrire en système en inversant les rôle de i et j

Exemple 81 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n f(i, j)$.

Le système des conditions des indices sont : $\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ i \leq j \leq n \end{cases}$

On peut simplifier l'expression par $1 \leq i \leq j \leq n$

En inversant les indices i et j , on obtient

$$\begin{cases} 1 \leq j \leq n & \text{plus grand intervalle possible} \\ 1 \leq i \leq j & \text{plus petit intervalle possible} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n f(i, j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j f(i, j)$$

- Méthode graphique : Sur un dessin du plan à double entrée, vous placez les points de coordonnées (i, j) donner dans la première somme. Pour cela, on trace les droites donner par les bords et on hachure la partie qui nous intéresse (c'est-à-dire entre les droites de $i = 0$ et $i = n$ horizontalement et entre les droites $j = a_i$ et $j = b_i$ verticalement). On prend ensuite les variations minimale et maximale de l'autre variable j (verticalement), et on cherche les droites encadrant la valeur hachurée (horizontalement). Si il y en a plusieurs possibilités, on découpe la somme en i suivant chaque possibilités.

Exemple 82 Considérons $S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i^2}{j(j+1)}$

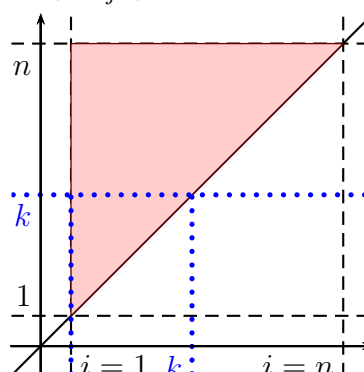
On va tracer les droites $i = 1$, $i = n$, $j = i$ et $j = n$.

On colorie (ou hachure) la partie qui nous intéresse.

On cherche les valeurs extrêmes de j ici de $j = 1$ à $j = n$

Puis celle de i entre deux droites ici de $i = 1$ à $i = j$.

On obtient



$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^j i^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{3}j + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n j + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n 1 = \frac{n(n+1)}{6} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+2)}{6} \end{aligned}$$

4.1.4 Sommation par paquets

On s'intéresse à $\sum_{j=1}^n f(i, j)$ avec $f(i, j) = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si on a une condition entre } i \text{ et } j \\ b_{i,j} & \text{sinon} \end{cases}$

Alors, on découpe la somme $\sum_{j=1}^n$ suivant la condition de $f(i, j)$ pour remplacer la fonction par son expression.

Exemple 83 Soit $f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{si } x \leq y \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$, calculer $S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(i, j)$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f(i, j) \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i f(i, j) + \sum_{j=i+1}^n f(i, j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i ij + \sum_{j=i+1}^n i^2 \right) = \sum_{i=1}^n \left(i \sum_{j=1}^i j + i^2 \sum_{j=i+1}^n 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^n \left(i \frac{i(i+1)}{2} + i^2(n-i) \right) = \sum_{i=1}^n \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) i^2 - \frac{1}{2} i^3 \right) \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)^2}{12} - \frac{n^2(n+1)^2}{8} = \dots
\end{aligned}$$

4.2 Séries de référence

Serie	Converge	Somme
$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$	Converge si $\alpha > 1$?
$\sum_{n \geq 0} q^n$	Converge si $ q < 1$	$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$
$\sum_{n \geq 0} nq^n$	Converge si $ q < 1$	$\frac{q}{(1-q)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$
$\sum_{n \geq 0} n^2 q^n$	Converge si $ q < 1$	$\frac{q(q+1)}{(1-q)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n$
$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$	Converge pour $x \in \mathbb{R}$	$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$
$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	Converge pour $x \in \mathbb{R}$	$\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	Converge pour $x \in \mathbb{R}$	$\text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	Converge pour $x \in \mathbb{R}$	$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	Converge pour $x \in \mathbb{R}$	$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$	Converge pour $x \in \mathbb{R}$	$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$
$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$	Converge pour $x \in]-1; 1[$	$\ln(1+x)$
$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$	Converge pour $x \in]-1; 1[$	$-\ln(1-x)$
$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	Converge pour $x \in \mathbb{R}$	$\text{Arctan}(x)$
$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$	Converge	$-\ln 2$

4.3 Convergence d'une série

4.3.1 En étudiant une suite

On peut étudier la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ en étudiant la suite $(S_N = \sum_{k=0}^N u_k)$ comme dans la section 3.

4.3.2 Critère de Riemann

On peut le résumer à ceci :

- Si $n^\alpha u_n \xrightarrow{\infty} 0$ avec $\alpha > 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $n^\alpha u_n \not\xrightarrow{\infty} 0$ avec $\alpha \leq 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Remarque 46 Dans la pratique, on regarde ce qui impose sa limite.

- Si on pense que la série converge (n^β , avec $\beta > 1$ ou type exponentiel qui impose la limite)
 - Si n^β impose sa limite, on choisit $\alpha = \frac{1+\beta}{2}$
 - Sinon, prendre $\alpha = 2$.
- Si on pense que la série diverge, prendre $\alpha = 1$.

, puis $\alpha = 3/2$ pour la convergence et si cela ne marche pas alors on teste pour $\alpha = 1$ pour la divergence.

Rédaction 8

Convergence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0$, alors $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Ainsi par critère de comparaison des série à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} u_n$ est absolument

convergente.

Donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Divergence :

— $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = +\infty$, alors $\exists N \geq 0, \forall n \geq N, u_n \geq \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Ainsi par critère de comparaison des série à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

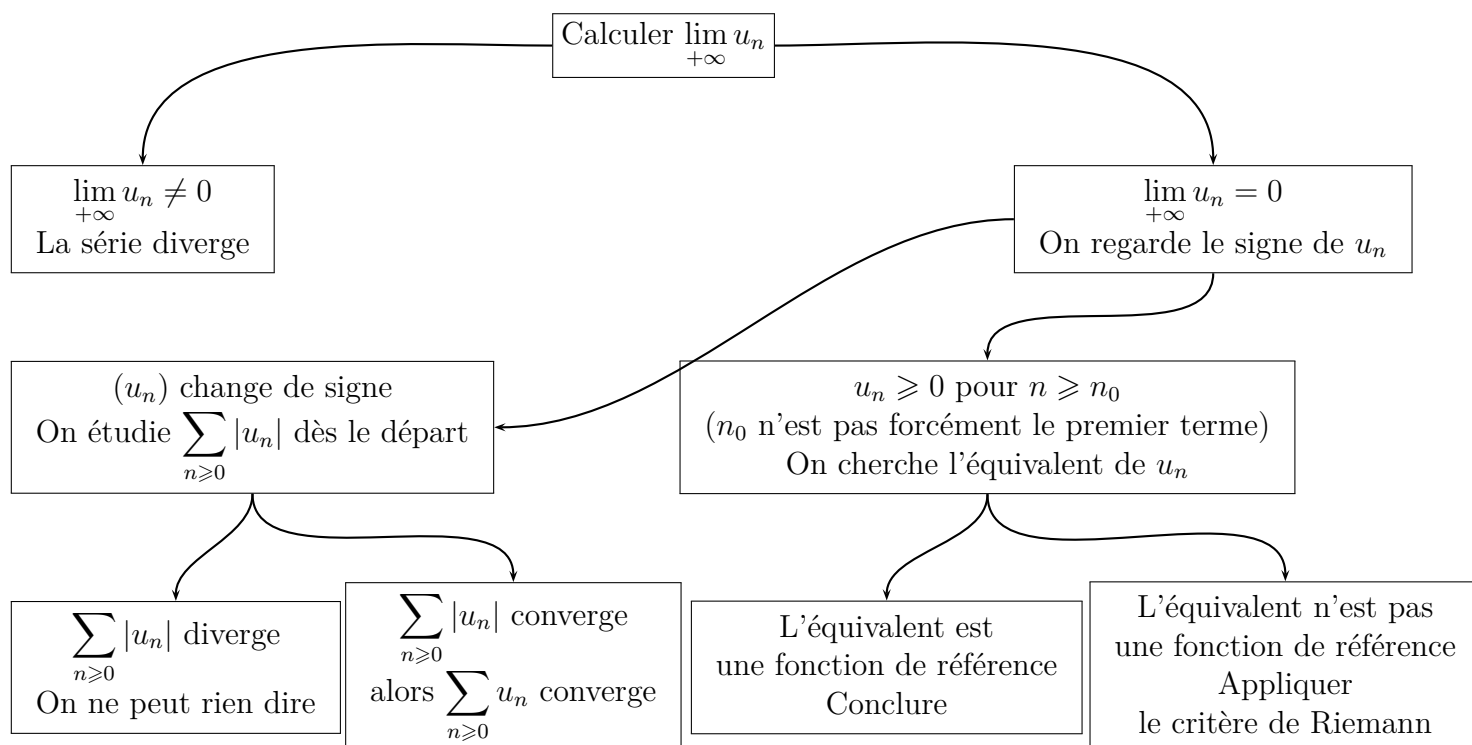
Exemple 84 Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln^{10}(n)}{n^2}$

On a $n^{3/2} \frac{\ln^{10}(n)}{n^2} = \frac{\ln^{10}(n)}{n^{1/2}} \rightarrow 0$

alors $\frac{\ln^{10}(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

Ainsi par critère de comparaison des série à termes positifs, $\frac{\ln^{10}(n)}{n^2}$ est convergente.

4.4 Étude pratique de la convergence d'une série



4.4.1 Critère de d'Alembert

Un autre critère est très utilisé en deuxième année pour les séries entières

Pour cela, on calcul $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell \in \mathbb{R} \cup +\infty$

Il y a trois cas :

- Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.
- Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Ce critère est moins précis que le critère de Riemann mais il est plus pratique si u_n n'est formé que de produit, de puissance et de factoriel.

4.4.2 Utilisation particulière de la convergence de série

On peut montrer la convergence de suite (u_n) en utilisant les outils de convergences des séries.

Pour cela on considère la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$.

La somme partiel de cette série est $\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$. Donc si la série converge alors $(u_n - u_0)$ aussi et donc (u_n) converge.

Exemple 85 Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$

Posons $u_n = \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

On a

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \left(\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \\
 &= \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \sim \frac{1}{2n^2}
 \end{aligned}$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2}$ converge.

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge

$$\text{Or } \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_1$$

Donc (u_n) converge.

Alors $\exists \gamma$ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$

4.5 Calcul d'une série

4.5.1 Choix de la méthode

On considérant v_n l'équivalent de u_n .

- Si un factoriel impose sa limite dans v_n , on fera un calcul direct en faisant apparaître des séries de type exponentiel (*exp*, *cos*, *sin*, *ch*, *sh*)
- Si un q^n impose sa limite dans v_n , on fera un calcul direct en faisant apparaître des séries géométrique et dérivées (voire des séries de type logarithmique (*Arctan*, *ln*) si on a des fractions rationnelles).
- Si un $\frac{1}{n^\alpha}$ impose sa limite dans v_n , on fera une somme télescopique à partir de la somme partielle.

4.5.2 Calcul direct

Méthode 30 On s'intéresse à S_n , on la décompose pour faire apparaître des séries de références (**attention, les séries de références commencent à 0**) puis on passe à la limite.

Exemple 86 On considère la série $\sum_{n \geq 2} 3 \frac{1}{2^n} - \frac{n3^n}{5^n}$.

Soit $S_n = \sum_{k=2}^n 3 \frac{1}{2^k} - \frac{k3^k}{5^k}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n 3 \frac{1}{2^k} - \frac{k3^k}{5^k} = 3 \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=2}^n k \left(\frac{3}{5}\right)^k \\ &= 3 \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^0 \right] - \left[\sum_{k=0}^n k \left(\frac{3}{5}\right)^k - 1 \left(\frac{3}{5}\right)^1 - 0 \left(\frac{3}{5}\right)^0 \right] \end{aligned}$$

Comme $|3/5| < 1$ et $|1/2| < 1$, alors $\sum_{k=0}^n k \left(\frac{3}{5}\right)^k$ et $\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$ convergent.

Donc $\sum_{n \geq 2} 3 \frac{1}{2^n} - \frac{n3^n}{5^n}$ converge et vaut, par passage à la limite :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 3 \frac{1}{2^n} - \frac{n3^n}{5^n} = 3 \left[\frac{1}{1-1/2} - \frac{1}{2} - 1 \right] - \left[\frac{3/5}{(1-3/5)^2} - 3/5 - 0 \right] = \dots$$

Remarque 47 Cette méthode est très utiliser dans le calcul de variance ou d'espérance de variable aléatoire discrète.

4.5.3 Somme télescopique ou effet domino

On doit se trouver dans le cas $u_n = a_{n+1} - a_n$.

Rédaction 9 On a $u_n = a_{n+1} - a_n$. Donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n a_{k+1} - \sum_{k=0}^n a_k \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1}) - (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) \\ &= a_{n+1} - a_0 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à calculer la limite de a_n pour trouver la convergence et la somme de $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Cas particulier : Décomposition en éléments simples

Méthode 31 Si $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q) - 1$.

Alors on factorise $Q(n) = \prod_{i=1}^p (n - n_i)$ et alors $u_n = \sum_{i=1}^p \frac{a_i}{n - n_i}$ et on détermine a_i par identification.

Exemple 87 Soit $u_n = \frac{1}{n^2-1}$ pour $n \geq 2$.

Alors $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ et $u_n = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$.

$$\frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1)+b(n-1)}{n^2-1} = \frac{(a+b)n+(a-b)}{n^2-1}. \text{ Donc } \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases}, \text{ c'est à dire } a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2}.$$

Donc $u_n = \frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n+1}$

Et

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=2}^N u_k = \left(\sum_{k=2}^N \frac{1/2}{k-1} \right) - \left(\sum_{k=2}^N \frac{1/2}{k+1} \right) \text{ pour } j-1 = k+1 \\ &= \left(\sum_{k=2}^N \frac{1/2}{k-1} \right) - \left(\sum_{j=4}^{N+2} \frac{1/2}{j-1} \right) \\ &= \left(\frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} + \sum_{k=4}^N \frac{1/2}{k-1} \right) - \left(\sum_{j=4}^N \frac{1/2}{j-1} + \frac{1/2}{N} + \frac{1/2}{N+1} \right) \\ &= \left(\frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} \right) - \left(\frac{1/2}{N} + \frac{1/2}{N+1} \right) \end{aligned}$$

Dix-septième partie

Analyse N°3 : Intégration

1 Équation différentielle d'ordre 1

Définition 46

- Soient a, b et f des applications continues de I dans \mathbb{K} , on appelle équation différentielles linéaire du premier ordre toute équation du type

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x), \quad x \in I. \quad (E)$$

- On appelle équation homogène associée à (E) , ou équation sans second membre, l'équation différentielle linéaire du premier ordre définie par

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0, \quad x \in I. \quad (E_0)$$

1.1 Équation homogène :

Rédaction type :

Sur I (intervalle où a ne s'annule pas), la fonction $x \mapsto -\frac{b(x)}{a(x)}$ est continue et admet pour primitive $x \mapsto A(x)$.

Les solutions sur I de l'équation homogène associée à (E) sont de la forme $x \mapsto \lambda \exp(A(x))$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque 48

1. **Ne pas oublier** le $-$ dans la fonction $x \mapsto -\frac{b(x)}{a(x)}$

Pour cela, il vous suffit de calculer à partir de (E_0) la formule $\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}$.

2. Il faut que I soit un intervalle et non une union d'intervalles (\mathbb{R}^* , par exemple, n'est pas valable)
3. Le calcul de primitive se fait comme dans le chapitre 00 en testant les conseils suivant dans l'ordre :

- D'abord essayer de trouver une forme classique de dérivée en particulier $\frac{u'}{u}$
- Si $-\frac{b(x)}{a(x)}$ est le quotient de deux polynômes, appliquer une décomposition en éléments simples.
- Si $-\frac{b(x)}{a(x)}$ possède des polynômes avec du \ln ou de l'exponentiel, faire une IPP.

Pour rappel : on dérive les \ln et on primitive les exp .

1.2 Détermination de solutions particulières

Pour rechercher une solution particulière, vous devez tester les méthodes suivantes dans l'ordre :

1.2.1 Solutions évidentes

Considérons l'EDL :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x), \quad x \in I$$

Rechercher une solution évidente n'est pas quelque chose de si simple contrairement à son nom. Il y a deux cas :

- La recherche d'une solution constante.
Pour cela on pose $y' = 0$ et on résout l'EDL comme une équation en y , si on obtient une constante pour y alors la fonction constante correspondant est la solution évidente.
- La recherche de solution polynômiale **Uniquement** dans le cas où a, b et f sont des fonctions polynômiales.
On cherche alors un polynôme de degré $\deg(f)$ ou $\deg(f) + 1$.
On pose $y(x) = a_n x^{\deg(f)+1} + \dots + a_0$ et on injecte ensuite dans l'EDL. Puis par identification, on trouve un système en a_i que l'on résoud.

Exemple 88 $ty' - 2y = t + 1$

On pose $\forall t \in \mathbb{R}, y_p(t) = at^2 + bt + c, a, b, c \in \mathbb{R}$

y_p est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}, y_p'(t) = 2at + b$

Dans l'équation différentielle, on a $t(2at + b) - 2(at^2 + bt + c) = t + 1 \Leftrightarrow -bt + 2c = t + 1$

Ainsi, on a $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$, on peut prendre $a = 0$.

Une solution particulière est $\forall t \in \mathbb{R}, y_p(t) = -t + \frac{1}{2}$

1.2.2 Solution particulière pour des EDL à coefficients constants

Cette technique ne s'applique que dans le cas où a et b sont des **fonctions constantes** et f s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x)e^{\alpha_i x}, \text{ où } P_i \text{ est un polynôme.}$$

La méthode est de chercher une solution particulière y_{p_i} pour chaque $x \mapsto P_i(x)e^{\alpha_i x}$.

La solution particulière globale est $y_p = \sum_{i=1}^n y_{p_i}$

Remarque 49 Si vous avez un élément de la forme $P_i(x)e^{\alpha_i x} \cos(\beta_i x)$ ou $P_i(x)e^{\alpha_i x} \sin(\beta_i x)$, alors on va passer en complexe et chercher une solution particulière y_c pour $P_i(x)e^{(\alpha_i + i\beta_i)x}$ puis prendre $y_p = \operatorname{Re}(y_c)$ (pour le cos) ou $y_p = \operatorname{Im}(y_c)$ (pour le sin).

Résolution de $ay' + by = P_i(x)e^{\alpha_i x}$

On considère l'équation caractéristique de cette EDL qui est $ar + b = 0$

- Si α_i est solution des $ar + b = 0$, on pose $y_p(x) = xQ(x)e^{\alpha_i x}$ avec $\deg(Q) = \deg(P_i)$
- Sinon, on pose $y_p(x) = Q(x)e^{\alpha_i x}$ avec $\deg(Q) = \deg(P_i)$

Exemple 89 On cherche un solution particulière de $y' + y = e^{-t} + t \sin(t)$

- Considérons $y' + y = e^{-t}$

L'équation caractéristique est $r + 1 = 0$ et -1 est racine.

On pose $\forall t \in \mathbb{R}, y_{p_1}(t) = tae^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

y_{p_1} est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}, y_{p_1}'(t) = (a - at)e^{-t}$

Dans l'équation différentielle, on trouve $(a - at)e^{-t} + tae^{-t} = e^{-t}$

Ainsi $a = 1$, une solution particulière est $\forall t \in \mathbb{R}, y_{p_1}(t) = te^{-t}$

- Considérons $y' + y = t \sin(t)$
 On passe en complexe et on cherche une solution de $y' + y = te^{it}$
 L'équation caractéristique est $r + 1 = 0$ et i n'est pas racine.
 On pose $\forall t \in \mathbb{R}, y_c(t) = (at + b)e^{it}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.
 y_c est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}, y'_c(t) = (a + ait + bi)e^{it}$
 Dans l'équation différentielle, on trouve $(a + iat + ib)e^{-t} + (at + b)e^{-t} = te^{it}$
 $(a(1 + i)t + (a + (1 + i)b))e^{it} = te^{it}$
 Par identification, $a(1 + i) = 1$ et $a + (1 + i)b = 0$
 Donc $a = \frac{1}{2}(1 - i)$ et $b = -\frac{1}{2}i$
 On obtient $\forall t \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} y_c(t) &= \left(\frac{1}{2}(1 - i)t - \frac{1}{2}i \right) e^{it} = \left(\frac{1}{2}(1 - i)t - \frac{1}{2}i \right) (\cos t + i \sin t) \\ &= \frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{2}t \sin t + \frac{1}{2} \sin t + i \left(-\frac{1}{2}t \cos t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2}t \sin t \right) \end{aligned}$$

On a $y_{p2} = \text{Im}(y_c)$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}, y_{p2}(x) = -\frac{1}{2}t \cos t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2}t \sin t$

On en conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}, y_p(x) = te^{-t} - \frac{1}{2}t \cos t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2}t \sin t$

1.2.3 Variation de la constante

Pour effectuer la méthode de la variation de la constante, il est nécessaire de connaître la forme de la solution de l'équation différentielle homogène associée $x \mapsto \lambda f_0(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

La méthode est la suivante :

Etape 1 : On rédige de la manière suivante :

Posons $\forall x \in I, y_p(x) = \lambda(x)f_0(x)$, avec $\lambda \in C^1$ sur I .

y_p est dérivable sur I comme produit de fonction dérivable sur I

$\forall x \in I, y'_p(x) = \dots$

En injectant dans l'équation différentielle

Etape 2 : Calculer $ay' + by = f$ en remplaçant y' et y par les expressions de y_p ci-dessus.

Les termes en $\lambda(x)$ doivent disparaître (sinon vous avez fait une erreur).

Vous obtenez $\lambda'(x) = \dots$

Etape 3 : Déterminer $\lambda(x)$ par les méthode classique de primitive :

- D'abord essayer de trouver une forme classique de dérivée en particulier $\frac{u'}{u}$
- Si $-\frac{b(x)}{a(x)}$ est le quotient de deux polynômes, appliquer une décomposition en éléments simples.
- Si $-\frac{b(x)}{a(x)}$ possède des polynômes avec du \ln ou de l'exponentiel, faire une IPP.

Pour rappel : on dérive les \ln et on primitive les exp .

Etape 4 : Bien reprendre l'expression de $y_p(x) = \lambda(x)f_0(x)$ pour obtenir la solution particulière.

1.3 Extension des équations différentielles

1.3.1 Problème de Cauchy

Un problème de Cauchy correspond à une EDL (E) et d'une condition "initiale" $y(x_0) = y_0$.
La méthode :

Etape 1 : Résoudre l'EDL en choisissant l'intervalle I tel que $x_0 \in I$.

Etape 2 : Déterminer le paramètre λ de l'EDLH à l'aide de la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

1.3.2 Recollement

Un problème de recollement correspond à résoudre une EDL (E) sur un intervalle I tel que la fonction a s'annule en $x_0 \in I$.

La méthode est la suivante :

Etape 1 : Résoudre l'EDL sur les deux intervalles de $I - \{x_0\}$ à l'aide de paramètres différents sur chaque intervalle.

Etape 2 : Déterminer $\lim_{x \rightarrow x_0^-} y(x)$ à l'aide de son paramètre et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y(x)$ aussi.

Il faut que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} y(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Cela donne des conditions sur les paramètres.

On pose alors $y(x_0) = \ell$.

Etape 3 : Déterminer $\lim_{x \rightarrow x_0^-} y'(x)$ à l'aide de son paramètre et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y'(x)$ aussi.

Il faut que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} y'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} y'(x) \in \mathbb{R}$.

Nouvelles conditions sur les paramètres.

Etape 4 : Regrouper les conditions et déterminer les paramètres.

2 Equation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 47

- On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre 2* tout équation différentielle du type

$$ay'' + by' + cy = f \quad (E)$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ avec $a \neq 0$. Et f est une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- On appelle *équation homogène associée à (E)*, ou *équation sans second membre*, l'équation différentielle linéaire du second ordre définie par

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (E_H)$$

2.1 Equation homogène :

Définition 48 On appelle *équation caractéristique associée à (E)*, l'équation du second degré

$$ar^2 + br + c = 0.$$

2.1.1 Résolution dans \mathbb{C}

Proposition 27 Soit $S_0(\mathbb{C})$ l'ensemble des solutions à valeurs complexes de (E_H) .

- Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1, r_2 , alors

$$S_0 = \left\{ y : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

- Si l'équation caractéristique admet une racine double r , alors

$$S_0 = \left\{ y : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx} \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

2.1.2 Résolution dans \mathbb{R}

Proposition 28 Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $S_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des solutions à valeurs réelles de (E_H) .

- Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1, r_2 , alors

$$S_0 = \left\{ y : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- Si l'équation caractéristique admet une racine double r (nécessairement réelle), alors

$$S_0 = \left\{ y : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx} \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, alors

$$S_0 = \left\{ y : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))e^{\alpha x} \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Remarque 50 On peut retrouver les deux générateurs de la formule avec des racines complexes en partant des solutions sur \mathbb{R}

En effet, $e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$

Ainsi, on remarque que les deux générateurs sont simplement les parties réelles et imaginaires des solutions complexes.

2.2 Résolution de l'équation avec second membre

2.2.1 Résolution dans \mathbb{C}

On se restreint à des seconds membres sous la forme $f(t) = \sum_k e^{\alpha_k t} P_k(t)$, avec $\alpha_k \in \mathbb{C}$ et $P_k \in \mathbb{C}[X]$.

On utilise le principe de superposition pour obtenir une solution particulière de (E) sous la forme $y_p = \sum_k y_k$ où y_k est solution particulière de l'équation (E) avec second membre $f_k(t) = e^{\alpha_k t} P_k(t)$.

Méthode de recherche de solution particulière y_k :

- Si α_k n'est pas racine de l'équation caractéristique, $y_k(t) = Q_k(t)e^{\alpha_k t}$ où $\deg Q_k = \deg P_k$.

- Si α_k est racine simple de l'équation caractéristique, $y_k(t) = t.Q_k(t)e^{\alpha_k t}$ où $\deg Q_k = \deg P_k$.
- Si α_k est racine double de l'équation caractéristique, $y_k(t) = t^2.Q_k(t)e^{\alpha_k t}$ où $\deg Q_k = \deg P_k$.
- Cette méthode est aussi valable pour la recherche de solution particulière d'équation différentielle linéaire à coefficients constant d'ordre 1 $ay' + by = f$. la racine est $-\frac{b}{a}$ et elle ne peut pas être double.
- Dans le cadre d'une racine double α , on peut utiliser la méthode de variation de la constante en posant $y_p = \lambda(t)e^{\alpha t}$ et chercher λ .

2.2.2 Résolution dans \mathbb{R}

Si $f = \sum f_k$, on utilise de même le principe de superposition.

1. Si $f_k(t) = e^{\alpha_k t} P_k(t)$ avec $\alpha_k \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, on utilise la même méthode que dans \mathbb{C} .
2. Si $f_k(t) = e^{\beta_k t} \cos(\alpha_k t) P_k(t)$ ou $f_k(t) = e^{\beta_k t} \sin(\alpha_k t) P_k(t)$ avec $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
On transforme le f_k en complexe par $F_k = e^{(\beta_k + i\alpha_k)t} P_k(t)$ et on applique les méthodes complexes pour trouver Y_p .

Puis on revient en réelle en écrivant pour \cos : $y_p(t) = \operatorname{Re}(Y_p(t)) = \frac{Y_p(t) + \overline{Y_p(t)}}{2}$ et pour

$$\sin : y_p(t) = \operatorname{Im}(Y_p(t)) = \frac{Y_p(t) - \overline{Y_p(t)}}{2i}$$

(n'oubliez pas d'écrire $e^{(\beta_k + i\alpha_k)t} = e^{\beta_k t} \cos(\alpha_k t) + ie^{\beta_k t} \sin(\alpha_k t)$ pour trouver les formes imaginaires ou réelles).

2.2.3 Méthode de la variation de la constante

Dans le cas où l'équation caractéristique admet une seule racine r , la solution homogène est $y_0(x) = (ax + b)e^{rx}$

Pour chercher une solution particulière, on peut poser $y_p(x) = \lambda(x)e^{rx}$ avec une fonction $\lambda \in C^2$ sur l'intervalle d'étude.

2.3 Changement de variable dans une équation différentielle

Si l'énoncé demande de changer de variable ($t = \varphi(x)$) pour une équation différentielle $a(x)y'' + b(x)y' + c(x) = d(x)$, il est nécessaire de changer aussi le nom de la fonction, c'est-à-dire, on pose $y(x) = z(t) = z(\varphi(x))$

On dérive les expressions à l'aide de $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$ puis on injecte dans l'équation différentielle.

Exemple 90 Soit l'EDL $x^2 y'' + xy' + y = 0$

Résoudre l'EDL sur \mathbb{R}_+^* à l'aide du changement de variable $t = \ln x$

Posons $g(t) = y(x)$

On a $\forall x > 0, y(x) = g(\ln x)$

y est C^2 sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x > 0$,

$$y'(x) = \frac{1}{x} g'(\ln x) \text{ et } y''(x) = -\frac{1}{x^2} g'(\ln x) + \frac{1}{x^2} g''(\ln x)$$

En injectant dans l'équation différentielle,

$$x^2 \left(-\frac{1}{x^2} g'(\ln x) + \frac{1}{x^2} g''(\ln x) \right) + x \left(\frac{1}{x} g'(\ln x) \right) + g(\ln x) = 0$$

Soit $g'' + g = 0$

3 Calcul d'intégrales

3.1 Méthode directe

Pour calculer une intégrale $\int_a^b f(t)dt$, il suffit de calculer une primitive de f en utilisant les tables de référence

Primitive des fonctions de référence

Fonction $x \mapsto f(x)$	Intervalle	Primitive
$x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	\mathbb{R}_+	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}_+ ou \mathbb{R}_-	$\ln x $
$\exp(\alpha x) \quad \alpha \in \mathbb{C}^*$	\mathbb{R}	$\frac{\exp(\alpha x)}{\alpha}$
$\ln x $	\mathbb{R}_+ ou \mathbb{R}_-	$x \ln x - x$
$\cos(ax) \quad a \in \mathbb{R}^*$	\mathbb{R}	$-\frac{1}{a} \sin(ax)$
$\sin(ax) \quad a \in \mathbb{R}^*$	\mathbb{R}	$\frac{1}{a} \cos(ax)$
$\tan(ax) \quad a \in \mathbb{R}^*$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$	$-\frac{1}{a} \ln \cos(ax) $

Opération sur les primitives

composée	dérivée
$u^n u', n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$u^\alpha u', \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
$u' \times f'(u)$	$f(u)$

Pour reconnaître la dernière formule qui généralise toutes les formules. Vous devez regrouper ce qui se ressemble ensemble (les formes en x^α , les formes en $\ln x$, les formes en e^x, \dots). Déterminer la forme la plus compliquée et voir si il existe un lien avec une forme $f(u)$ où l'autre partie est u' .

Exemple 91

- $f(t) = 2t \ln(t^2 + 1)$

L'expression est déjà regroupée, et le facteur le plus compliqué est $\ln(t^2 + 1)$. L'autre facteur $2t$ est la dérivée de $t^2 + 1$

On est de la forme $u' \ln(u)$

Une primitive est $t \rightarrow (t^2 + 1) \ln(t^2 + 1) - (t^2 + 1)$

- $f(t) = \frac{2t \ln(t^2 + 1)}{t^2 + 1}$

On regroupe, et on obtient $f(t) = \frac{2t}{t^2 + 1} \times \ln(t^2 + 1)$

La forme la plus compliquée est $\ln(t^2 + 1)$ et $\frac{2t}{t^2 + 1}$ est sa dérivée. On est de la forme $u'u$

Une primitive est $t \rightarrow \frac{1}{2} (\ln(t^2 + 1))^2$

- Soit $f(t) = \frac{2t+1}{(t^2+t+1)^5}$
L'expression est déjà regroupé par fonction, l'élément le plus compliqué est la puissance du dénominateur. On pense alors à la formule $u'u^\alpha$
Ansi on a $f(t) = (2t+1)(t^2+t+1)^{-5}$, c'est la bonne forme.
Une primitive est $t \rightarrow -\frac{1}{4}(t^2+t+1)^{-4}$

Cas Particulier : Décomposition en éléments simples

On décompose la fraction rationnelle comme pour les séries :

Méthode 32 Si $f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$, avec P et Q des polynômes.

Alors on factorise sur \mathbb{R} , $Q(t) = \prod_{i=1}^p (t - t_i)^{n_i} \prod_{j=1}^q (t^2 + a_j t + b_j)$ et alors

$$f(t) = R(t) + \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\alpha_{i,k}}{(t - t_i)^k} + \sum_{j=1}^q \frac{\beta_j t + \gamma_j}{t^2 + a_j t + b_j}$$

avec $R(t) = 0$ si $\deg(P) < \deg(Q)$ ou $\deg(R) = \deg(P) - \deg(Q)$.

Il reste à déterminer les $\alpha_{i,k}$, β_j et γ_j . Les différentes méthodes sont l'identification, la multiplication par un facteur et remplacer t par un racine du facteur, les équivalents, le choix de certaines valeurs de t ,...

A vous de choisir la plus efficace.

Pour calculer une primitive de f , on calcul une primitive de

$$R(t) + \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\alpha_{i,k}}{(t - t_i)^k} + \sum_{j=1}^q \frac{\beta_j t + \gamma_j}{t^2 + a_j t + b_j}$$

- Pour $R(t)$, on applique les primitives des polynômes.
- Pour $\frac{\alpha_{i,1}}{(t - t_i)}$, la primitive est $\alpha_{i,1} \ln |t - t_i|$ (Ne pas oublier la valeur absolue).
- Pour $\frac{\alpha_{i,k}}{(t - t_i)^k}$, $k \geq 2$, la primitive est $\alpha_{i,k} \frac{1}{-k+1} (t - t_i)^{-k+1}$.
- Pour $\frac{\beta_j t + \gamma_j}{t^2 + a_j t + b_j}$, on pose $u(t) = t^2 + a_j t + b_j$ et déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\beta_j t + \gamma_j = a u'(t) + b$$

Alors $\frac{\beta_j t + \gamma_j}{t^2 + a_j t + b_j} = a \frac{u'(t)}{u(t)} + b \frac{1}{u(t)}$. On connaît la primitive de $\frac{u'(t)}{u(t)}$, reste à calculer celle de $\frac{1}{u(t)}$

- Pour $\frac{1}{t^2 + a_j t + b_j}$ de discriminant négatif.

Mettre $t^2 + a_j t + b_j$ sous forme canonique $(t + \delta)^2 + \omega^2$, puis factoriser le dénominateur de la fraction par ω^2 .

On obtient $\frac{1}{\omega^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{t + \delta}{\omega}\right)^2}$ de primitive $\frac{1}{\omega} \text{Arctan} \left(\frac{t + \delta}{\omega} \right)$.

3.2 Intégration par partie (IPP)

Formulation :

Théorème 5 Soient u et v deux fonctions C^1 sur $[a; b]$ alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

On pourra retenir la formule d'intégration par parties sous la forme abrégée :

$$\int uv' = [uv] - \int u'v$$

Ainsi, l'intégration par partie ramène l'intégration de uv' à celle de $u'v$.

Application : On utilise souvent cette méthode quand l'expression sous l'intégrale est de la forme $f(t) \times g(t)$ où f et g sont de nature différente (polynôme, exponentielle, logarithme). un des deux f ou g peuvent disparaître par dérivation (le logarithme en priorité, les polynômes en dérivant plusieurs fois et en dernier l'exponentielle), Supposons que ce soit f , alors le g sera à peu près v' , il sera peut-être prendre un morceau de f si on a $g(t) = h'(w)$ et qu'il manque l'expression de w' pour avoir la primitive. Le reste sera le u de l'expression.

Exemple 92

$\int_0^1 t^3 e^{t^2} dt$: On ne peut pas faire disparaître l'exponentielle par dérivation, mais il me manque $2t$ pour faire la primitive de e^{t^2}

Dans ce cas on pose :

$$\begin{aligned} u &= \frac{t^3}{2t} = \frac{1}{2}t^2 & u' &= t \\ v &= e^{t^2} & v' &= 2te^{t^2} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \int_0^1 t^3 e^{t^2} dt = \left[\frac{1}{2}t^2 e^{t^2} \right]_0^1 - \int_0^1 te^{t^2} dt = \frac{1}{2}e - \left[\frac{1}{2}e^{t^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$\int_a^b P(t)e^{at} dt$: avec P un polynôme et a une constante.

Dans ce cas on pose :

$$\begin{aligned} u &= P(t) & u' &= P'(t) \\ v &= \frac{1}{a}e^{at} & v' &= e^{at} \end{aligned}$$

Remarque 51 On effectue autant d'IPP nécessaire que le degré de P

$\int_a^b P(t) \ln(Q(t)) dt$: avec P et Q sont des polynômes.

Dans ce cas on pose :

$$\begin{aligned} u &= \ln(Q(t)) & u' &= \frac{Q'(t)}{Q(t)} \\ v &= \dots & v' &= P(t) \end{aligned}$$

Après avoir fait cette IPP, on effectue une décomposition en éléments simples.

3.3 Changement de variable

Théorème 6 Soient f une fonction intégrable sur $[a; b]$ et u une fonction C^1 sur $[a; b]$ telle que $u([\alpha; \beta]) \subset [a; b]$ alors on a

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)dt$$

Méthode 33 En pratique, quand on fait un changement de variable pour calculer une intégrale du type $\int_a^b f(t)dt$ il existe deux cas suivant le changement de variable que l'on vous donne :

- Le changement de variable est donné par $t = g(u)$ (l'ancienne variable est donnée en fonction de la nouvelle).
 - On dérive l'expression à gauche par t et à droite par u , $1dt = g'(u)du$
 - On résoud $g(u) = a$ pour trouver UNE solution $u = \alpha$ (on n'a pas besoin de toutes les solutions).
 - On résoud $g(u) = b$ pour trouver UNE solution $u = \beta$.

$$\text{Alors } \int_a^b f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(u))g'(u)du$$

- Le changement de variable est donné par $u = g(t)$ (la nouvelle variable est donnée en fonction de l'ancienne).

— On dérive l'expression à gauche par u et à droite par t , $1du = g'(t)dt$

— On calcule $\alpha = g(a)$ et $\beta = g(b)$.

— Dans $\int_a^b f(t)dt$, on fait apparaître $g'(t)dt$, l'expression $\frac{f(t)}{g'(t)}$ se simplifiant bien pour faire apparaître un $F(g(t))$ (une expression en $g(t)$).

$$\text{Alors } \int_a^b f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} F(u)du$$

Ou on peut aussi résoudre $t = g(u)$ pour trouver $t = G(u)$ et se ramener au cas précédent.

3.4 Les changement de variables classiques

Voici quelques changements de variables classiques, les connaître n'est pas obligatoire.

- Pour calculer une primitive d'une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$:

$$I(x) = \int R(\cos x, \sin x)dx$$

- Si R est un polynôme, linéariser ou faire apparaître des termes en $\cos \sin^\alpha$ ou $\sin \cos^\alpha$ (forme en $u'u^\alpha$).

Pour un monôme, $\sin^m(x) \cos^n(x)$

— Si m est impaire, $m = 2k + 1$, alors $\sin^m(x) \cos^n(x) = \sin(x)(1 - \cos^2(x))^k \cos(x)$.

Reste à développer et primitiver les formes $u'u^\alpha$

— Si n est impaire, $n = 2\ell + 1$, alors $\sin^m(x) \cos^n(x) = \sin^m(x)(1 - \sin^2(x))^\ell \cos(x)$.

Reste à développer et primitiver les formes $u'u^\alpha$

— Si n et m sont paire.

On fait d'abord apparaître $\sin(a) \cos(a)$ pour le remplacer par $\frac{1}{2} \sin(2a)$ et pour ce qui reste, on utilise une des formules : $\sin^2(a) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$ ou $\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$, on développe et on recommence.

Exemple 93

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) \cos^4(x) &= \sin^2(x) \cos^2(x) \cos^2(x) = \frac{1}{4} \sin^2(2x) \times \frac{1}{2} (1 + \cos(2x)) \\
&= \frac{1}{8} \sin^2(2x) + \frac{1}{8} \cos(2x) \sin^2(2x) \\
&= \frac{1}{8} \frac{1}{2} (1 - \cos(4x)) + \frac{1}{8} \cos(2x) \sin^2(2x) \\
&= \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cos(4x) + \frac{1}{8} \cos(2x) \sin^2(2x)
\end{aligned}$$

Maintenant on peut primitiver l'expression...

- Sinon, appliquer les règles de Bioche, suivantes.

On forme $\omega(x) = R(\cos x, \sin x) dx$. **Ne pas oublier le dx dans $\omega(x)$.**

- Si, pour tout x , $\omega(-x) = \omega(x)$, on peut faire le changement de variable

$$t = \cos x.$$

- Si, pour tout x , $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, on peut faire le changement de variable

$$t = \sin x.$$

- Si, pour tout x , $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, on peut faire le changement de variable

$$t = \tan x.$$

- Sinon, faire le changement de variable

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

(connaître les formules de $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$)

- Pour calculer une primitive d'une fraction rationnelle en $\operatorname{ch}x$ et $\operatorname{sh}x$:

$$I(x) = \int R(\operatorname{ch}x, \operatorname{sh}x) dx$$

- Si R est un polynôme, utiliser la définition des fonctions hyperboliques ($\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$) puis développer.

- Sinon, appliquer les règles de Bioche, adaptées aux fonctions hyperboliques, suivantes.

Considérer $\omega(x) = R(\operatorname{ch}x, \operatorname{sh}x) dx$, obtenu en remplaçant $\operatorname{ch}x$ par $\cos x$, et $\operatorname{sh}x$ par $\sin x$ dans l'énoncé. **Ne pas oublier le dx dans $\omega(x)$.**

- Si, pour tout x , $\omega(-x) = \omega(x)$, on peut faire le changement de variable

$$t = \operatorname{ch}x.$$

- Si, pour tout x , $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, on peut faire le changement de variable

$$t = \operatorname{sh}x.$$

- Sinon, faire le changement de variable $u = e^x$.
- Pour calculer une primitive d'une fonction rationnelle en x et en $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$:

$$I(x) = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

Faire le changement de variable $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, qui permet de se ramener au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en t .

- Pour calculer une primitive d'une fonction rationnelle en x et en $\sqrt{ax^2+bx+c}$:

$$I(x) = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

Mettre le trinôme sous forme canonique, pour se ramener, sous le radical, par un changement de variable affine, à l'une des trois formes :

$$1+t^2, 1-t^2, t^2-1.$$

- Pour calculer $\int S\left(t, \sqrt{1+t^2}\right) dt$, faire le changement de variable

$$t = \operatorname{sh}(u)$$

qui permet de se ramener au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en chu et shu .

- Pour calculer $\int S\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) dt$, faire le changement de variable

$$t = \sin(u)$$

qui permet de se ramener au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en $\cos u$ et $\sin u$.

- Pour calculer $\int S\left(t, \sqrt{t^2-1}\right) dt$, faire le changement de variable

$$t = \varepsilon \operatorname{ch}(u)$$

où $\varepsilon = \operatorname{signe}(t)$, qui permet de se ramener au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en chu et shu .

3.5 Relation de Chasles

Proposition 29 (Relation de Chasles) Soit f une fonction intégrable sur un segment $[\alpha; \beta]$ et soit a, b, c trois éléments de $[\alpha; \beta]$ alors on a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Par conséquent $\int_a^a f(t) dt = 0$ et $\int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt$

Méthode 34 La relation de Chasles s'utilise dans deux cas :

- Si l'expression est donnée par des valeurs absolues, alors on découpe l'intégrale en ajoutant les points où la valeurs absolues s'annulent.

Sur chaque intervalle, on remplace la valeur absolue $|f(t)|$ par $-f(t)$ si $f(t) \leq 0$ ou $f(t)$ si $f(t) \geq 0$.

- Si l'expression de f change sur l'intervalle, c-à-d $f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{si } t \leq c \\ f_2(t) & \text{si } t > c \end{cases}$.

On ajoute le point c à l'aide de la relation de Chasles et on remplace $f(t)$ par $f_1(t)$ ou $f_2(t)$ suivant l'intervalle.

4 Suites I_n définies par une intégrale

$$I_n = \int_a^b f_n(t) dt$$

4.1 Monotonie

Méthode 35 On cherche le signe de $f_{n+1}(t) - f_n(t)$ sur l'intervalle $[a; b]$.

Puis on applique la propriété : Si $a < b$ et $f(t) \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

4.2 Relation entre I_{n+1} et I_n

Méthode 36 Ces relations se trouve en effectuant une **intégration par partie** voir section 3.2

4.3 Encadrement d'une intégrale

Nous avons plusieurs cas :

$\int_{a_n}^{b_n} f(t) dt$: On effectue le tableau de variation de f sur l'intervalle $[a_n; b_n]$ (en générale la fonction est monotone et par exemple dans le cas f croissante, $f(a_n) \leq f(t) \leq f(b_n)$).

Après avoir encadré $f(t)$, on passe à l'intégrale sur $[a_n; b_n]$.

$\int_a^b f_n(t)g(t)dt$: Si dans l'encadrement les expressions en n à droite et à gauche des inégalités apparaissent dans $f_n(t)$ alors on encadre $f_n(t)$ sur $[a; b]$ à l'aide d'un tableau de variation, sinon on encadre $g(t)$ sur $[a; b]$.

5 Fonctions définies par une intégrale

5.1 Domaine de définition

On considère $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ avec D l'ensemble de définition de f .

Pour que f soit définie, il faut que tous les éléments de l'intervalle $[u(x); v(x)]$ soit dans D , c'est à dire $[u(x); v(x)] \subset D$.

Exemple 94 $F(x) = \int_5^x \frac{1}{t} dt$, l'ensemble de définition de $t \rightarrow \frac{1}{t}$ est \mathbb{R}^* . Pour que $[5; x] \subset \mathbb{R}^*$, il faut que $0 \notin [5; x]$, c'est à dire $x > 0$.

5.2 signe de $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$

On cherche le signe de f sur l'intervalle $[u(x); v(x)]$. Dans le cas $f \geq 0$:

- Pour x tel que $u(x) \leq v(x)$, on a $F(x) \geq 0$.
- Pour x tel que $u(x) \geq v(x)$, on a $F(x) \leq 0$.

5.3 Parité

Pour déterminer la parité de $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$, on effectue un changement de variable $u = -t$ (voir 3.3)

5.4 Dérivabilité

Méthode 37 Pour faire cela, on **introduit** une primitive H de la fonction f sur D_F (sans calculer H) et on exprime F à l'aide de H .

Puis on dérive.

Exemple 95 Déterminer la dérivée de $F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} dt$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$ est continue sur \mathbb{R} . Elle admet une primitive $H \in C^1$ sur \mathbb{R}

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = [H(t)]_x^{x^2} = H(x^2) - H(x)$

On en déduit que F est C^1 sur \mathbb{R} comme composée de fonctions C^1 .

Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2xH'(x^2) - H'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^8 + x^4 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$

5.5 Encadrement

$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$, on effectue le tableau de variation de f sur l'intervalle $[u(x); v(x)]$ (en générale la fonction est monotone) puis on passe à l'intégrale.

6 Approximation

6.1 Somme de Riemann

Théorème 7 Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et a_1, \dots, a_n une subdivision de $[a, b]$, alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f.$$

Méthode 38 Pour reconnaître une somme de Riemann S_n , vous devez pouvoir réécrire la somme de la forme $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right)$ ou $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$

Pour cela, cibler l'indice de la somme (ici k) est faire apparaître artificiellement $\frac{k}{n}$ par $k = n \frac{k}{n}$, l'expression devrait se simplifier et faire sortir un terme en $\frac{1}{n}$

Il ne reste plus qu'à conclure en rédigeant : "Soit $g : x \rightarrow \dots$, g est continue sur $[0; 1]$. S_n est une somme de Riemann de g sur $[0; 1]$."

Nous avons donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 g(t) dt.$ "

Remarque 52 On peut utiliser cette méthode pour trouver la limite de somme ou l'équivalent de série simple divergente

Exemple 96 Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n k^\alpha$

Pour tout $n > 0$,

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha n^\alpha = n^{\alpha+1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$$

Or $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$ est la somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ sur $[0; 1]$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha = \int_0^1 x^\alpha dx = \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$

Ainsi $\sum_{k=1}^n k^\alpha \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1}$

6.2 Comparaison série-intégrale

On veut comparer $\sum_{n=n_1}^{n_2} f(n)$ et $\int_a^b f(t) dt.$

Pour cela on encadre la fonction f sur l'intervalle $[k; k+1]$ avec la méthode 4.3, puis on passe à la somme (bien choisir les valeurs du début et de la fin de la somme ($n_1 = a$ et $n_2 + 1 = b$)).

Il faut noter que $\int_0^n f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt$ (relation de Chasles).

Remarque 53 Cette méthode permet de déterminer un équivalent des sommes partielles des série divergente ou de majorer une série.

Exemple 97 Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Pour tout $k \geq 1$, $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k; k+1]$

Donc $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

En passant à l'intégrale, $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$

Or $\int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k} \int_k^{k+1} dt = \frac{1}{k}(k+1-k) = \frac{1}{k}$

Ainsi $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$

Par conséquent, $\forall k \geq 2$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$

Remarque : Cette étape est la plus difficile à suivre, on sépare l'encadrement précédent en un

système $\begin{cases} \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \\ \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \end{cases}$ et sur la première ligne on fait le changement d'indice $k+1 \rightarrow k$

et comme $k \geq 1$, $k+1 \geq 2$ et après le changement d'indice, $k \geq 2$

Ce qui donne comme système : $\begin{cases} \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt \\ \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \end{cases}$

Il reste juste à passer à la somme (à partir de 2) :

$$\sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$$

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \text{ par Chasles}$$

$$\ln(n+1) - \ln 2 + \frac{1}{1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{1} + \ln(n) - \ln(1)$$

$$\frac{\ln(n+1) - \ln 2 + 1}{\ln(n)} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1$$

Or $\frac{\ln(n+1) - \ln 2 + 1}{\ln(n)} \underset{\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\ln n} = 1$

Par encadrement, $\lim_{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} = 1$

Donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{\infty}{\sim} \ln n$