Corrigé du devoir 17

Exercice 1

1. La matrice S est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes). Comme S est symétrique réelle, on peut écrire $D = {}^tP\,S\,P$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On a donc $S = P\,D\,{}^tP$.

On a ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = {}^t(PX)D\,(PX) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, y_i^2$, où $Y = PX$.

Comme P est inversible, l'application $X \mapsto PX$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et par conséquent $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash \{0\} \iff Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$.

Si toutes les valeurs propres de S sont strictement positives, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, on a au moins un des y_i non nuls et donc ${}^tXSX > 0$.

Si, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, on a ${}^tXSX > 0$.

Soit λ une valeur propre et X un vecteur propre associé. Comme $SX = \lambda\, X$, on en déduit que $\lambda\, {}^tXX > 0$. Comme ${}^tXX = \|X\|^2 > 0$, car $X \neq 0$, on a $\lambda > 0$.

$$\boxed{S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.}}$$

2. **a.** La matrice ${}^tMM$ est une matrice symétrique réelle.

De plus, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$,

$${}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)\,MX = \|MX\|^2$$

Comme M est inversible et que X est non nul, on a $M\,X$ non nul. Donc $\|MX\|^2 > 0$.

Ainsi

$${}^tX{}^tMMX > 0$$

Donc

$$\boxed{{}^tMM \text{ est symétrique définie positive.}}$$

b. La matrice ${}^tMM$ est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Notons ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Il existe donc $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$${}^tP\,({}^tMM)P = D, \text{ soit } {}^tMM = PD\,{}^tP, \text{ avec } D = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Posons alors

$$\Delta = \text{diag}\,(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \text{ et } S = P\Delta\,{}^tP$$

On a

$$S^2 = P\Delta\,{}^tP\,P\Delta\,{}^tP = P\Delta^2\,{}^tP = PD\,{}^tP = {}^tMM$$

De plus S est symétrique réelle, semblable à Δ, donc ses valeurs propres sont stictement positives. Donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Il existe } S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que } {}^tMM = S^2}$$

c. On a $\det S = \det \Delta = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} > 0$. Donc

$$\boxed{S \text{ est inversible.}}$$

Posons $R = MS^{-1}$. Il vient

$${}^tRR = {}^t(S^{-1})\,{}^tMM\,S^{-1} = S^{-1}\,S^2\,S^{-1} = I_n$$

Donc

$$\boxed{R \text{ est orthogonale.}}$$

d. On a finalement obtenu $M = RS$, avec $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Si } M \in GL_n(\mathbb{R}), \text{ il existe } R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que } M = RS.}$$

3. a. La matrice Σ est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Sa trace est la somme de ses valeurs propres.

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.}$$

b. La matrice Σ est symétrique réelle, donc il existe donc $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tP\,\Sigma\,P = D$, avec D matrice diagonale. Il vient alors $Q\,\Sigma = Q\,P\,D\,{}^tP$, puis, par propriété de la trace,

$$\mathrm{Tr}\,(Q\,\Sigma) = \mathrm{Tr}\,(Q\,P\,D\,{}^tP) = \mathrm{Tr}\,({}^tP\,Q\,P\,D) = \mathrm{Tr}(Q_1\,D)$$

où la matrice $Q_1 = {}^tP\,Q\,P$ est orthogonale, car c'est le produit de trois matrices orthogonales.
En notant $Q_1 = \left(q_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, on obtient :

$$\mathrm{Tr}\,(Q\,\Sigma) = \mathrm{Tr}\,(Q_1\,D) = \sum_{i=1}^{n} q_{i,i}\,\lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n} \left|q_{i,i}\right|\lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}\,\Sigma,$$

car $\lambda_i \geq 0$, et la matrice Q_1 étant orthogonale, on a $\left|q_{i,i}\right| \leq 1$ pour tout i.

c. L'inégalité du (b) est valable pour toute $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, et on a une égalité lorsque $Q = I_n$.

On en déduit que

$$\mathrm{Tr}\,\Sigma = \max_{Q\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \mathrm{Tr}\,(Q\,\Sigma) = \sup_{Q\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \mathrm{Tr}\,(Q\,\Sigma)$$

$$\boxed{\sup_{Q\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \Big[\mathrm{Tr}\,(Q\,\Sigma)\Big] = \mathrm{Tr}(\Sigma).}$$

4. a. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{H}_2$ si, et seulement si, a, b, c et d sont dans $\{-1, 1\}$ et $ab + cd = 0$. On obtient huit cas possibles :

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

b. **i.** Soit $A \in \mathcal{H}_n$.

La matrice $A' = \dfrac{A}{\sqrt{n}}$ a ses vecteurs colonnes deux à deux orthogonaux comme A. De plus, en divisant par $\sqrt{n}$, les vecteurs colonnes de A' deviennent de norme 1.

Donc $A' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, donc ${}^t(A')\,A' = I_n$. On en déduit que

$$\boxed{{}^tA\,A = n\,I_n.}$$

ii. $\boxed{\text{Non}}$.

Par exemple, la matrice $A = \sqrt{n}\,I_n$ vérifie ${}^tAA = n\,I_n$, mais elle n'appartient pas à $\mathcal{H}_n$.

iii. Posons encore $A' = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,A$. On a ${}^t(A')\,A' = I_n$, donc $A' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, donc les vecteurs colonnes de A' sont deux à deux orthogonaux, et il en est de même de ceux de A. Ainsi

$$\boxed{A \in \mathcal{H}_n.}$$

c. **i.** $f(\mathcal{H}_n)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ car $\mathcal{H}_n$ est non vide.

Si $A \in \mathcal{H}_n$, on a ses coefficients $a_{i,j}$ dans $\{-1, 1\}$. Donc

$$|f(A)| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} 1 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1 = n^2$$

$f(\mathcal{H}_n)$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc

$$\boxed{f(\mathcal{H}_n) \text{ admet une borne supérieure.}}$$

ii. On a, en notant $(A\,T)_{i,j}$ le terme général de la matrice AT,

$$(A\,T)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\,t_{k,j} = \sum_{k=j}^{n} a_{i,k}\,t_{k,j} = \sum_{k=j}^{n} a_{i,k}$$

Donc

$$\mathrm{Tr}\,(A\,T) = \sum_{i=1}^{n} (AT)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} a_{i,k}$$

On a bien

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,(A\,T) = f(A).}$$

iii. On pose

$$A' = \frac{1}{\sqrt{n}}\,A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

On a

$$f(A) = \mathrm{Tr}\,(A\,R\,S) = \sqrt{n}\;\mathrm{Tr}\,(A'\,R\,S) \leq \sqrt{n}\;\mathrm{Tr}\,S,$$

d'après 2.b), car $A'\,R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Cette inégalité est valable pour toute $A \in \mathcal{H}_n$, donc, comme la borne supérieure est le plus petit des majorants, on a

$$\boxed{\alpha_n \leq \sqrt{n}\;\mathrm{Tr}\,S.}$$

iv. Pour $n = 2$, pour toute matrice A de $\mathcal{H}_2$, on a $f(A) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i}^{2} 1 = 3$. Donc $\alpha_2 \leq 3$.

De plus, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $f(A) = 3$. Donc

$$\boxed{\alpha_2 = 3}$$

On détermine R orthogonale et S symétrique définie positive telles que $T = R\,S$.

Ici, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'où ${}^tT\,T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de ${}^tTT$ sont $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

On a $S^2 = {}^tT\,T$, et les valeurs propres de S^2 sont les carrés des valeurs propres de S.

Comme de plus S a ses valeurs propres strictement positives, les valeurs propres de S sont donc

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, $\operatorname{Tr} S = \sqrt{5}$ et on a

$$\boxed{\sqrt{2}\ \operatorname{Tr}\,(S) = \sqrt{10}.}$$

Exercice 2

1. Comme X et Y suivent la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, on a, en notant $q = 1 - p$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = P(Y = n) = q^{n-1}\,p$$

Soit $(m, n) \in (N^*)^2$. Il s'agit de déterminer $P((U = m) \cap (V = n))$.

- Supposons $m < n$.
  Comme $\operatorname{Max}(X, Y) \geqslant \operatorname{Min}(X, Y)$, on a $P((U = m) \cap (V = n)) = 0$.
- Supposons $m = n$.
  Alors $\operatorname{Max}(X, Y) = \operatorname{Min}(X, Y)$ implique que $X = n$ et $Y = n$.
  On a donc, puisque les variables X et Y sont indépendantes,
  $$P((U = n) \cap (V = n)) = P((X = n) \cap (Y = n)) = P(X = n) \times P(Y = n) = p^2\,q^{2n-2}$$
- Supposons $m > n$.
  On a alors deux possibilités : ($X = m$ et $Y = n$) ou ($X = n$ et $Y = m$).
  Comme les deux événements sont incompatibles, on a :
  $$\begin{aligned} P((U = m) \cap (V = n)) &= P((X = m) \cap (Y = n)) + P((X = n) \cap (Y = m)) \\ &= P(X = m) \times P(Y = n) + P(X = n) \times P(Y = m) \\ &= 2\,p^2\,q^{m+n-2} \end{aligned}$$

2. Comme les événements $(V = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ forment un système complet d'événements, on a

$$P(U = m) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((U = m) \cap (V = n))$$

Soit, avec les résultats ci-dessus,

$$\begin{aligned}
P(U=m) &= \sum_{n=1}^{m} P((U=m)\cap(V=n)) \\
&= P((U=m)\cap(V=m)) + \sum_{n=1}^{m-1} P((U=m)\cap(V=n)) \\
&= p^2\, q^{2m-2} + \sum_{n=1}^{m-1} 2\,p^2\, q^{m+n-2} \\
&= p^2\, q^{2m-2} + 2\,p^2\, q^{m-1} \sum_{n=1}^{m-1} q^{n-1} \\
&= p^2\, q^{2m-2} + 2\,p^2\, q^{m-1} \sum_{n=0}^{m-2} q^{n} \\
&= p^2\, q^{2m-2} + 2\,p^2\, q^{m-1}\, \frac{1-q^{m-1}}{1-q} \\
&= p^2\, q^{2m-2} + 2\,p\, q^{m-1}\,(1-q^{m-1})
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(U=m) = p^2\, q^{2m-2} + 2\,p\, q^{m-1}\,(1-q^{m-1})}$$

Comme les événements $(U=m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ forment un système complet d'événements, on a

$$P(V=n) = \sum_{m=1}^{+\infty} P((U=m)\cap(V=n))$$

Soit, avec les résultats ci-dessus,

$$\begin{aligned}
P(V=n) &= \sum_{m=n}^{+\infty} P((U=m)\cap(V=n)) \\
&= P((U=n)\cap(V=n)) + \sum_{m=n+1}^{+\infty} P((U=m)\cap(V=n)) \\
&= p^2\, q^{2n-2} + \sum_{m=n+1}^{+\infty} 2\,p^2\, q^{m+n-2} \\
&= p^2\, q^{2n-2} + 2\,p^2\, q^{n-2} \sum_{m=n+1}^{+\infty} q^{m} \\
&= p^2\, q^{2n-2} + 2\,p^2\, q^{n-2}\, q^{n+1} \sum_{m=0}^{+\infty} q^{m} \\
&= p^2\, q^{2n-2} + 2\,p^2\, q^{n-2}\, q^{n+1}\, \frac{1}{1-q} \\
&= p^2\, q^{2n-2} + 2\,p\, q^{2n-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(V=n) = p^2\, q^{2n-2} + 2\,p\, q^{2n-1}}$$

3. On a $P((U=1)\cap(V=2)) = 0$, or $P(U=1)\times P(V=2)\neq 0$, donc les variables ne sont pas indépendantes.

4. On a $Z(\Omega) = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

On peut remarquer qu'on a toujours $\mathrm{Max}(X,Y) + \mathrm{Min}(X,Y) = X+Y$.

Soit n dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Pour i fixé, les événements $((X=k)\cap(Y=n-k))_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont incompatibles deux à deux, et leur réunion est l'événement $(X+Y=n)$. On a donc, compte-tenu que les variables X et Y sont indépendantes, :

$$\begin{aligned}
P(Z=n) &= P(U+V=n) \\
&= P(X+Y=n) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P((X=k)\cap(Y=n-k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P(X=k)\times P(Y=n-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} p\,q^{k-1}\,p\,q^{n-k-1} \\
&= (n-1)\,p^2\,q^{n-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad P(U+V=n)=(n-1)\,p^2\,q^{n-2}}$$

Exercice 3

1. On a

$$\boxed{\forall m\in\mathbb{N},\ P((X=m))=\frac{a^m}{m!}\,e^{-a},\quad E(X)=a,\quad V(X)=a}$$

2. Pour chaque client, le fait d'être volé ou pas correspond à une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
De plus on considére que le fait pour deux clients d'être volés sont deux événements indépendants.
Donc, pour un jour donné, et si $k\leqslant n$, l'événement que k clients soient volés sachant qu'ils sont n dans le magasin suit une loi binomiale de paramètre n et p. On a

$$\boxed{P((Y=k)|(X=n))=\begin{cases}\binom{n}{k}\,p^k\,(1-p)^{n-k} & \text{si } k\leqslant n\\ 0 & \text{si } k>n\end{cases}}$$

3. On a $Y(\Omega)=\mathbb{N}$.
La suite d'événements $(X=n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités

totales :

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((Y=k)|(X=n))\ P(X=n) \\
&= 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} P((Y=k)|(X=n))\ P(X=n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k} \times \frac{a^n}{n!}\, e^{-a} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k\, q^{n-k} \times \frac{a^n}{n!}\, e^{-a} \\
&= \left(\frac{p}{q}\right)^k e^{-a}\, \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(a\,q)^n}{(n-k)!} \\
&= \left(\frac{p}{q}\right)^k e^{-a}\, \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a\,q)^{n+k}}{n!} \\
&= \left(\frac{p}{q}\right)^k e^{-a}\, (a\,q)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a\,q)^n}{n!} \\
&= \left(\frac{p}{q}\right)^k e^{-a}\, (a\,q)^k \frac{1}{k!}\, e^{a\,q}
\end{aligned}$$

Finalement

$$P(Y=k) = \frac{(a\,p)^k}{k!}\, e^{-a\,p}$$

Donc la variable aléatoire Y suit une loi de Poisson : $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(a\,p)$.

4. La variable aléatoire Z suit la même loi de probabilité que Y, en remplaçant p par $q = 1-p$.

5. On a, pour tout (j,k) de $\mathbb{N}^2$,

$$P(Y=j) \times P(Z=k) = \frac{(a\,p)^j\, e^{-a\,p}}{j!} \times \frac{(a\,q)^k\, e^{-a\,q}}{k!} = \frac{a^{j+k}\, p^j\, q^k}{j!\,k!}\, e^{-a}$$

Comme $Y + Z = X$, on a

$$\begin{aligned}
P((Y=j)\cap(Z=k)) &= P((Y=j)\cap(X-Y=k)) \\
&= P((Y=j)\cap(X=k+Y)) \\
&= P((Y=j)\cap(X=k+j)) \\
&= P((Y=j)|(X=k+j)) \times P(X=k+j) \\
&= \binom{k+j}{j} p^j\, (1-p)^{k+j-j} \times \frac{a^{k+j}}{(k+j)!}\, e^{-a} \\
&= \frac{(k+j)!}{k!\,j!}\, p^j\, q^k \times \frac{a^{k+j}}{(k+j)!}\, e^{-a} \\
&= \frac{a^{j+k}\, p^j\, q^k}{j!\,k!}\, e^{-a}
\end{aligned}$$

On a bien $P((Y=j)\cap(Z=k)) = P(Y=j) \times P(Z=k)$, et les deux variables Y et Z sont indépendantes.