

## Mines-Ponts PSI 2006

On désignera dans tout le problème par :

- $\mathcal{M}_{n,p}$  l'espace des matrices réelles à  $n$  lignes et  $p$  colonnes. On note  $0_{n,p}$  la matrice nulle.
- $\mathcal{M}_n$  l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre  $n$ . On note  $0_n$  la matrice nulle.
- ${}^tM$  la transposée d'une matrice  $M$ .
- $\mathcal{S}_n$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_n$  constitué des matrices symétriques d'ordre  $n$ , c'est à dire les matrices  $A$  qui satisfont  ${}^tA = A$ .
- $I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$ .
- $(X|Y) = {}^tX Y$  le produit scalaire canonique de deux matrices colonnes.

On rappelle que pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{n,p}$  et tout couple de matrices colonnes  $(X, Y)$  où  $X \in \mathcal{M}_{n,1}$  et  $Y \in \mathcal{M}_{p,1}$ , l'identité suivante est satisfaite :

$$(AX|Y) = (X|{}^tAY)$$

**Définition 1.** Une matrice  $A \in \mathcal{S}_n$  est dite positive lorsque pour tout  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1}$ ,  $(AX|X) \geq 0$ . Une matrice  $A \in \mathcal{S}_n$  est dite définie positive lorsque pour tout  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1} \setminus \{0_{n,1}\}$ ,  $(AX|X) > 0$ .

**Définition 2.** Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $\mathcal{S}_n$ , on dit que  $A$  est plus petite que  $B$  pour l'ordre de Löwner, et on note  $A \preceq B$ , si la matrice  $B - A$  est positive. On notera  $A \prec B$  si  $B - A$  est définie positive.

**On suppose dorénavant que  $A$  est une matrice symétrique réelle d'ordre  $n$ .**

### I. Matrices positives

1. Montrer que si  $A$  est positive, alors pour toute matrice réelle  $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ , la matrice  ${}^tMAM$  est symétrique positive.
2. Montrer que toutes les puissances entières d'une matrice symétrique positive  $A$  sont positives.
3. Montrer que  $A \in \mathcal{S}_n$  est positive, respectivement définie positive, si et seulement si les valeurs propres de  $A$  sont toutes positives, respectivement strictement positives.
4. Si  $A$  est définie positive, montrer qu'il existe une matrice  $C$ , symétrique définie positive telle que  $C^2 = A$ .
5. Si  $A$  et  $C$  sont symétriques définies positives et  $C^2 = A$ , montrer que, pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$ , on a :

$$\text{Ker}(A - \lambda I_n) = \text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_n)$$

6. En déduire que si  $A$  est définie positive, il existe une unique matrice symétrique définie positive  $C$  telle que  $C^2 = A$  et que dans toute base orthonormale de vecteurs propres de  $A$ , la matrice  $C$  est diagonale.

On notera désormais  $C = A^{1/2}$ .

7. On suppose  $A$  définie positive. Montrer que  $A$  est inversible et qu'il existe une unique matrice, notée  $A^{-1/2}$ , symétrique définie positive telle que  $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$ .
8. Prouver que  $(A^{1/2})^{-1} = A^{-1/2}$ .

## II. Ordre de Löwner.

9. Montrer que l'ordre de Löwner est une relation d'ordre sur  $\mathcal{S}_n$ .
10. Soit  $B \in \mathcal{S}_n$  avec  $A \preceq B$ . Montrer que pour toute matrice réelle  $C \in \mathcal{M}_{n,p}$ , la relation  ${}^tCAC \preceq {}^tCBC$  est vérifiée.
11. Montrer que si  $I_n \preceq A$  alors  $A$  est inversible et  $A^{-1} \preceq I_n$ .
12. En déduire que si  $0_n \prec A \preceq B$  alors  $B$  est inversible et  $B^{-1} \preceq A^{-1}$ .
13. Donner un système de conditions nécessaires et suffisantes portant sur les réels  $a, b$  et  $c$  pour que la matrice  $D = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  soit positive.
14. On considère les deux matrices suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe des réels  $a$  et  $b$  de sorte que  $0_n \preceq D \preceq B$  mais que  $D^2 \not\preceq B^2$ .

## III. Fonctions matriciellement croissantes.

Soit  $n$  un entier non nul et  $M$  une matrice diagonalisable à valeurs propres positives. Il existe donc une matrice diagonale  $\Delta$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $M = P\Delta P^{-1}$ . Notons  $(\lambda_i, i = 1, \dots, n)$  les valeurs propres de  $M$  répétées suivant leur multiplicité, qui sont les coefficients diagonaux de  $\Delta$ .

**Définition 3.** Si  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\Delta$  une matrice diagonale positive, on note  $f(\Delta)$  la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont donnés par  $f(\Delta)_{i,i} = f(\lambda_i)$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

15. On considère  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  et l'on note  $R = Pf(\Delta)P^{-1}$ . Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}$  et  $\lambda$  un réel positif tels que  $MX = \lambda X$ . Calculer  $RX$ .
16. Montrer que, pour toutes matrices  $P$  et  $Q$  inversibles et toutes matrices diagonales  $\Delta_P$  et  $\Delta_Q$  de  $\mathcal{M}_n$  telles que  $M = P\Delta_P P^{-1} = Q\Delta_Q Q^{-1}$ , on a :

$$Pf(\Delta_P)P^{-1} = Qf(\Delta_Q)Q^{-1}$$

Désormais, si  $M$  est une matrice diagonalisable à valeurs propres positives et  $M = P\Delta P^{-1}$  est une diagonalisation de  $M$ , on définit  $f(M)$  par

$$f(M) = Pf(\Delta)P^{-1}$$

**Définition 4.** Une fonction  $f$  est dite matriciellement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  si pour tout  $n \geq 1$  et tout couple  $(A, B)$  de matrices symétriques, l'implication suivante est satisfaite :

$$0 \preceq A \preceq B \Rightarrow f(A) \preceq f(B)$$

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions  $\varphi$  continues sur  $]0, +\infty[$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , telles que  $(s \mapsto s\varphi(s))$  soit intégrable sur  $[0, 1]$  et  $\varphi$  soit intégrable sur  $[1, +\infty[$ . On définit une fonction  $L_\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  par :

$$L_\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{st}{1+st} \varphi(s) \, ds$$

17. Pour  $r \in \mathbb{R}$ , on pose  $\varphi_r(s) = s^{-r-1}$ . Pour quelles valeurs de  $r$  a-t-on  $\varphi_r \in E$ ? Exprimer alors, pour tout  $t > 0$ ,  $L_{\varphi_r}(t)$  en fonction de  $L_{\varphi_r}(1)$ .
18. Soit  $s \geq 0$ . On pose pour tout  $t \geq 0$ ,  $f_s(t) = 1 - \frac{1}{1+st}$ . Exprimer  $f_s(A)$  lorsque  $A$  est une matrice symétrique positive.
19. Montrer que  $f_s$  est matriciellement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .
20. Pour toute matrice  $A \in \mathcal{S}_n$  positive et toute matrice colonne  $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ , établir l'identité :
 
$$(L_\varphi(A)X|X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)(f_s(A)X|X) \, ds$$
21. Montrer que, pour toute  $\varphi \in E$ , l'application  $L_\varphi$  est matriciellement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .
22. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques telles que  $0 \preceq A \preceq B$ . Compte-tenu des questions précédentes, pour quelles valeurs du réel positif  $r$  pouvez-vous montrer que  $A^r \preceq B^r$  ?

Fin du problème