Corrigé du devoir 16 : Mines-Ponts PSI 2006

I. Matrices positives

1. Soit A une matrice positive. $B = {}^tMAM$ est symétrique car ${}^tB = {}^tM\,{}^tA\,M = {}^tM\,A\,M = B$.

   De plus, si $X \in \mathfrak{M}_{p,1}$, on a $(BX|X) = (AMX|MX) = (AY|Y)$ avec $Y = MX$. Cette quantité est positive par hypothèse sur A. Donc

$$\boxed{{}^tMAM \text{ est donc symétrique positive.}}$$

2. On suppose A symétrique positive. On montre par récurrence que la proposition "A^k est positive" est vraie pour tout entier k.

   - $A^0 = I_n$ est symétrique et, si $X \in \mathfrak{M}_{p,1}$, $(A^0X|X) = (X|X) \geq 0$. La propriété est vraie pour $k = 0$.

     Elle est aussi vraie au rang 1 par hypothèse sur A.

   - Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $k \geq 1$. On a alors

$$A^{k+1} = A\,A^{k-1}\,A = {}^tA\,A^{k-1}\,A$$

     et l'hypothèse au rang $k-1$ ainsi que la question précédente donnent A^{k+1} symétrique positive.

3. Cours.

4. D'après le théorème spectral, on peut écrire $A = {}^tPDP$ avec P orthogonale et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, avec, pour tout i, $\lambda_i > 0$.

$$\boxed{\text{On pose } \Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \text{ et } C = {}^tP\,\Delta\,P.}$$

   La matrice C est symétrique et ses valeurs propres sont les $\sqrt{\lambda_i} > 0$, car C est semblable à Δ puisque $P^{-1} = {}^tP$.

   Ainsi C est symétrique définie positive, et vérifie $C^2 = A$.

5. La matrice C est symétrique définie positive, elle est donc semblable à $D = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$, avec, pour tout i, $\mu_i > 0$.

   Comme $A = C^2$, la matrice A est semblable à la matrice D^2. Le spectre de A est donc l'ensemble des μ_i^2.

Soit X un vecteur propre de C associé à la valeur propre μ_i.

On a

$$C\,X = \mu_i\,X$$

On en déduit que

$$A\,X = C^2\,X = \mu_i^2\,X$$

Donc

$$\text{Ker}\,(C - \mu_i\,I_n) \subset \text{Ker}\,(A - \mu_i^2\,I_n).$$

D'autre part le rang de $(C - \mu_i\,I_n)$ est égal au rang de $(D - \mu_i\,I_n)$ (car $(C - \mu_i\,I_n)$ est semblable à $(D - \mu_i\,I_n)$).

De même le rang de $(A - \mu_i^2\,I_n)$ est égal au rang de $(D^2 - \mu_i^2\,I_n)$.

Comme les tous les μ_i sont positifs, le rang de $(D - \mu_i\,I_n)$ est égal au rang de $(D^2 - \mu_i^2\,I_n)$ (c'est le nombre d'éléments diagonaux non nuls sur la diagonale de $(D - \mu_i\,I_n)$ ou de $(D^2 - \mu_i^2\,I_n)$).

Donc le rang de $(C - \mu_i\,I_n)$ est égal au rang de $(A^2 - \mu_i^2\,I_n)$, et, par le théorème du rang on en déduit que

$$\boxed{\text{Ker}\,(C - \mu_i\,I_n) = \text{Ker}\,(A - \mu_i^2\,I_n).}$$

Ceci est vrai pour toutes les μ_i^2, soit pour toutes les valeurs propre de A.

6. Notons λ_i les valeurs propres de A et E_{λ_i} les sous-espaces propres associés.

   Notons C_1 et C_2 deux matrices définies positives vérifiant $C_1^2 = C_2^2 = A$.

   D'après la question précédente, on a

   $$\text{Ker}\,(C_1 - \sqrt{\lambda_i}\,I_n) = \text{Ker}\,(C_1 - \sqrt{\lambda_i}\,I_n) = E_{\lambda_i}.$$

   Autrement dit, on a, pour tout vecteurs X de E_{λ_i},

   $$C_1\,X = C_2\,X = \sqrt{\lambda_i}\,X$$

   Comme C_1 et C_2 prennent les mêmes valeurs sur E_{λ_i}, et que $\mathbb{R}^n$ est somme directe de ces sous-espaces propres, on a $C_1 = C_2$.

   $$\boxed{\text{Si } A \text{ est définie positive, il existe une unique matrice } C \text{ symétrique définie positive telle que } C^2 = A.}$$

   Toujours en utilisant le résultat précédent, en utilisant une base orthonormale de vecteurs propres de A, les matrice A et C sont semblables à une matrice diagonale.

7. La matrice A est symétrique définie positive, donc semblable à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A. Ces valeurs propres de A sont strictement positives. Le déterminant de A est donc strictement positif, donc non nul.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est inversible.}}$$

On a $A = {}^tPDP$ avec P orthogonale et D diagonale avec sur la diagonale les valeurs propres de A qui sont strictement positives.

On en déduit que $A^{-1} = {}^tPD^{-1}P$. Sur la diagonale de D^{-1} on a les inverses des valeurs propres de A, qui sont aussi strictement positifs. On en déduit que la matrice A^{-1} est symétrique définie positive.

D'après la question précédente, on en déduit

$$\boxed{\text{l'existence et l'unicité de la matrice } A^{-1/2} \text{ qui vérifie } A^{-1/2}\,A^{-1/2} = A^{-1}.}$$

8. On a

$$A^{-1} = A^{-1/2}\,A^{-1/2}$$

On en déduit que

$$A = \left(A^{-1/2}\right)^{-1}\,\left(A^{-1/2}\right)^{-1}$$

Comme la matrice $A^{-1/2}$ est symétrique définie positive, il en est de même pour son inverse $\left(A^{-1/2}\right)^{-1}$.

Par unicité de la matrice $A^{1/2}$ définie ci-dessus, on a $\left(A^{-1/2}\right)^{-1} = A^{1/2}$. Donc

$$\boxed{A^{-1/2} = \left(A^{1/2}\right)^{-1}}$$

II. Ordre de Löwner.

9. On a trois propriétés à vérifier.

   i) $A - A = 0_n$ et 0_n est symétrique positive. Donc $A \preceq A$. La relation $\preceq$ est $\boxed{\text{réflexive.}}$

   ii) Si $A \preceq B$ et $B \preceq A$ alors $M = B - A$ et $-M$ sont positives. Les valeurs propres de $-M$ sont les opposées de celles de M. On en déduit que les valeurs propres de M sont positives et négatives, donc nuls.
   Or M est diagonalisable car A et B le sont, donc $M = 0$. La relation $\preceq$ est $\boxed{\text{antisymétrique.}}$

   iii) Si $A \preceq B$ et $B \preceq C$ alors $B - A$ et $C - B$ sont positives. La somme de deux matrices positives étant positive $\big($on a $(\,(M+N)X|X\,) = (MX|X) + (NX|X)\big)$, $C - A$ est positive et $A \preceq C$. La relation $\preceq$ est $\boxed{\text{transitive.}}$

10. Si $B - A$ est positive alors ${}^tC(B-A)C$ l'est aussi (question 1) et donc

$$\boxed{{}^tCAC \preceq {}^tCBC.}$$

11. En écrivant que A est semblable à une matrice diagonale D, on constate que $A - I_n$ est semblable à la matrice diagonale $D - I_n$.

On en déduit que, si Sp(A) = $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, alors Sp($A - I_n$) = $\{\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_r - 1\}$.

Si $I_n \preceq A$ alors les valeurs propres de $A - I_n$ sont positives, donc celle de A sont plus grandes que 1. En particulier 0 n'est pas valeur propre et

$$\boxed{A \text{ est inversible.}}$$

De plus, les valeurs propres de A^{-1} sont inverses de celles de A, donc sont dans $]0, 1]$. Ainsi celles de $I_n - A^{-1}$ sont positives. On en déduit que

$$\boxed{A^{-1} \preceq I_n.}$$

12. On suppose $0_n \prec A \preceq B$. On a alors A qui est définie positive et qui s'écrit donc $A = A^{1/2}A^{1/2}$.

La matrice $A^{1/2}$ est inversible d'inverse $A^{-1/2}$. Cette matrice est symétrique et la question 10 donne

$$A^{-1/2}\,A\,A^{-1/2} \preceq A^{-1/2}\,B\,A^{-1/2}$$

On utilise la question 8. On a

$$A^{-1/2}\,A\,A^{-1/2} = A^{-1/2}\,A^{1/2}\,A^{1/2}\;\,A^{-1/2} = I_n$$

Ainsi

$$0_n \prec I_n \preceq A^{-1/2}\,B\,A^{-1/2},$$

et la question précédente indique alors que $A^{-1/2}\,B\,A^{-1/2}$ est inversible.

La matrice $A^{-1/2}$ l'étant aussi, B est donc inversible, et on a

$$\left(A^{-1/2}\,B\,A^{-1/2}\right)^{-1} = A^{1/2}\,B^{-1}\,A^{1/2}$$

La question précédente indique aussi que

$$A^{1/2}\,B^{-1}\,A^{1/2} \preceq I_n$$

En utilisant la question 10 avec $C = A^{-1/2}$, on a finalement

$$\boxed{B^{-1} \preceq A^{-1}.}$$

13. La matrice symétrique D est positive si, et seulement si, ses valeurs propres λ_1 et λ_2 sont positives. On vérifie sans difficulté que

$$(\lambda_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 \geq 0) \iff (\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1\,\lambda_2 \geq 0)$$

Les valeurs propres de D sont les racines de $X^2 - (a+c)X + (ac - b^2)$. La somme des valeurs propres est $a + c$ et le produit $ac - b^2$.

$$\boxed{D \text{ est positive} \iff \begin{cases} a + c \geq 0 \\ ac - b^2 \geq 0 \end{cases}.}$$

14. On a

$$0_n \preceq D \iff (a+1 \geq 0 \text{ et } a \geq b^2) \iff a \geq b^2$$

On a $D \preceq B \iff B - D$ positive. Comme $B - D = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$D \preceq B \iff \big(a+1 \geq 0 \text{ et } a \geq b^2\big)$$

On a donc $0_n \preceq D \preceq B \iff a \geq b^2$.

On a $D^2 \preceq B^2 \iff B^2 - D^2$ positive. Et

$$B^2 - D^2 = \begin{pmatrix} 3\,a^2 - b^2 & -a\,b - b \\ -\,a\,b - b & 3 - b^2 \end{pmatrix}$$

On va donc choisir a et b tels que

$$3\,a^2 - 2\,b^2 + 3 < 0 \quad \text{ou} \quad (3\,a^2 - b^2)\,(3 - b^2) - (a\,b + b)^2 < 0$$

Cherchons a et b tels que $a = b^2$.

Dans ce cas, on a $3\,a^2 - 2\,b^2 + 3 = 3\,b^4 - 2\,b^2 + 3 > 0$ pour tout b.

Et $(3\,a^2 - b^2)\,(3 - b^2) - (a\,b + b)^2 = -4\,b^2\,(b^2 - 1)^2$. On peut donc choisir par exemple $b = 2$ et $a = 4$.

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

III. Fonctions matriciellement croissantes.

15. On a $MX = \lambda X$, donc $P\,\Delta\,P^{-1} = \lambda\,X$, soit

$$\Delta P^{-1} X = \lambda P^{-1} X$$

Posons $Y = P^{-1}X = (y_1, \ldots, y_n)$. On a donc

$$\Delta\,Y = \lambda\,Y$$

Ce qui peut s'écrire

$$\forall i,\ (\lambda_i - \lambda)\,y_i = 0$$

Ainsi, ou $y_i = 0$ ou $\lambda_i = \lambda$.

Les coordonnées de $Z = f(\Delta)\,Y$ valent $z_i = f(\lambda_i)\,y_i$.

Comme $y_i = 0$ ou $\lambda_i = \lambda$, on a toujours $f(\lambda_i)\,y_i = f(\lambda)\,y_i$, soit $z_i = f(\lambda)\,y_i$. Donc

$$Z = f(\lambda)\,Y$$

Ainsi,

$$R\,X = P\,f(\Delta)\,P^{-1}\,X = P\,f(\Delta)\,Y = P\,Z = f(\lambda)\,P\,Y = f(\lambda)\,X$$

$$\boxed{R\,X = f(\lambda)\,X.}$$

16. Notons $R_P = P\,f(\Delta_P)\,P^{-1}$ et $R_Q = Q\,f(\Delta_Q)\,Q^{-1}$.

    Soit X un vecteur propre de M et λ la valeur propre associée.

    Comme $M\,X = \lambda\,X$, la question précédente montre que

$$R_p\,X = f(\lambda)\,X = R_Q\,X$$

    Ainsi R_p et R_Q prennent les mêmes valeurs pour tous les vecteurs propres de M.

    Comme il existe une base de $\mathbb{R}^n$ de tels vecteurs propres, on a donc $R_P = R_Q$.

$$\boxed{P\,f(\Delta_P)\,P^{-1} = Q\,f(\Delta_Q)\,Q^{-1}.}$$

17. *Remarque : si $\varphi \in E$ alors pour tout $t \geq 0$, $s \mapsto \dfrac{st}{1+st}\,\varphi(s)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, équivalente à $s \mapsto t\,s\,\varphi(s)$ en 0 et à φ en l'infini. C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et L_φ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$. Elle est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.*

    La fonction φ_r est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs positives.

    En l'infini, φ_r est intégrable si et seulement si $r > 0$.

    En 0, $s\,\varphi_r(s) = s^{-r}$ est intégrable si et seulement $r < 1$.

$$\boxed{\varphi_r \in E \iff r \in]0,1[.}$$

    Dans ce cas, on effectue la changement de variable $u = s\,t$.

    Pour tout $t > 0$, l'application $s \mapsto s\,t$ est une bijection strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. On obtient :

$$\boxed{\forall t > 0,\ L_{\varphi_r}(t) = t^r L_{\varphi_r}(1).}$$

18. A est une matrice symétrique réelle. Donc il existe donc une matrice orthogonale P telle que $A = P\,D\,P^{-1}$ où D est diagonale. On a alors

$$f_s(A) = P\,f_s(D)\,P^{-1}$$

    Notons d_i les coefficients diagonaux de D. On remarque que, en notant diag$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ une matrice diagonale,

$$f_s(D) = I_n - \text{diag}\left((1+s\,d_i)^{-1}\right) = I_n - (\text{diag}(1+s\,d_i))^{-1} = I_n - (I_n + sD)^{-1}$$

    Ainsi, on a

$$f_s(A) = I_n - P\,(I_n+sD)^{-1}\,P^{-1} = I_n - (I_n + s\,P\,D\,P^{-1})^{-1} = I_n - (I_n+sA)^{-1}$$

$$\boxed{f_s(A) = I_n - (I_n + sA)^{-1}.}$$

19. Soient A et B des matrices symétriques telles que $0 \preceq A \preceq B$ et soit $s \geq 0$.

La matrice $B - A$ étant positive, la matrice $s(B - A)$ l'est aussi (les valeurs propres sont multipliées par s). Donc $(I_n + sB) - (I_n + sA)$ est positive. Donc

$$I_n + sA \preceq I_n + sB$$

En outre les valeurs propres de $I_n + sA$ sont supérieures à 1, donc $I_n + sA$ est définie positive.

On a donc

$$0 \prec I_n + sA \preceq I_n + sB$$

La question 12 donne alors

$$(I_n + sB)^{-1} \preceq (I_n + sA)^{-1}$$

Or

$$f_s(B) - f_s(A) = (I_n + sA)^{-1} - (I_n + sB)^{-1}$$

Donc $f_s(B) - f_s(A)$ est positive. C'est à dire

$$f_s(A) \preceq f_s(B)$$

$$\boxed{f_s \text{ est matriciellement croissante sur } \mathbb{R}^+.}$$

20. Soient P une matrice orthogonale et $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ telles que $A = P^{-1}DP = {}^tPDP$.

Par définition, on a

$$(L_\varphi(A)\, X|X) = ({}^tP\, L_\varphi(D)\, P\, X|X) = (L_\varphi(D)\, P\, X|P\, X)$$

Notons $Y = P\, X = (y_1, \dots, y_n)$.

On a :

$$(L_\varphi(A)\, X|X) = (L_\varphi(D)\, Y|Y) = \sum_{i=1}^{n} L_\varphi(d_i)\, y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{+\infty} \frac{sd_i}{1 + sd_i}\, y_i^2\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s$$

Remarquons que

$$\frac{st}{1 + st} = 1 - \frac{1}{1 + st} = f_s(t)$$

On a alors

$$(L_\varphi(A)\, X|X) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{+\infty} f_s(d_i)\, y_i^2\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s$$

On permute somme et intégrale par linéarité de l'intégrale (la somme est finie), et on utilise la relation $(f_s(D)Y|Y) = \sum_{i=1}^{n} f_s(d_i)\, y_i^2$.

$$(L_\varphi(A)\, X|X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)\, (f_s(D)Y|Y)\, \mathrm{d}s$$

Comme

$$f_s(D) = P\, f_s(A)\, {}^tP \quad \text{et} \quad Y = P\, X,$$

on a :

$$(L_\varphi(A)\, X|X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)\, (P\, f_s(A)\, X|P\, X)\, \mathrm{d}s$$

et en utilisant une nouvelle fois le caractère orthogonal de P,

$$\boxed{(L_\varphi(A)\, X|X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)\, (f_s(A)\, X|X)\, \mathrm{d}s}$$

21. On a donc (linéarité du produit scalaire et de l'intégrale)

$$((L_\varphi(A) - L_\varphi(B))X|X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)\, ((f_s(B) - f_s(A))X|X)\, \mathrm{d}s$$

Si $0 \prec A \preceq B$ alors, d'après la question 19, on a

$$\forall s \geq 0,\ ((f_s(B) - f_s(A))X|X) \geq 0$$

Comme $\varphi(s) \geq 0$ et comme l'intégrale est croissante,

$$((L_\varphi(A) - L_\varphi(B))X|X) \geq 0$$

Ainsi, $L_\varphi(A) \preceq L_\varphi(B)$ et

$$\boxed{L_\varphi \text{ est matriciellement croissante sur } \mathbb{R}^+.}$$

22. Si $r \in]0, 1[$, en utilisant $\varphi_r : s \mapsto s^{-r-1}$, on a L_{φ_r} matriciellement croissante.

Soit A symétrique réelle. Ecrivons $A = P\, \Delta\, P^{-1}$, avec Δ diagonale.

En utilisant les définitions et les résultats précédents (en particulier : $\forall t \geq 0,\ L_{\varphi_r}(t) = t^r\, L_{\varphi_r}(1)$), on a :

$$L_{\varphi_r}(A) = P\, L_{\varphi_r}(\Delta)\, P^{-1} = P\, \left(L_{\varphi_r}(1)\, \Delta^r\right)\, P^{-1} = L_{\varphi_r}(1)\, P\, \Delta^r\, P^{-1} = L_{\varphi_r}(1)\, A^r$$

On a donc

$$\forall r \in]0, 1[,\ 0 \prec A \preceq B \ \Rightarrow\ L_{\varphi_{r}(1)} A^r \preceq L_{\varphi_{r}(1)} B^r$$

Comme $L_{\varphi_{r}(1)} > 0$, on en déduit aisément que :

$$\boxed{\text{pour } r \in]0, 1[,\ x \mapsto x^r \text{ est matriciellement croissante sur } \mathbb{R}^+.}$$