PREMIÈRE PARTIE

1) $\forall n \geq 1, \left|\frac{u_n}{n}\right| \leq |u_n|$

donc $\sum |u_n|$ CV $\Rightarrow \sum \left|\frac{u_n}{n}\right|$ CV $\Rightarrow \sum \frac{u_n}{n}$ CV

2) a) $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(S_k - S_{k-1})$ car $u_k = S_k - S_{k-1}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k-1}}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} \quad \text{(réindexation)}$$

$$= \frac{S_n}{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) S_k - u_0 \quad \text{car } S_0 = u_0$$

b) $\sum u_n$ CV $\Rightarrow (S_n)$ CV

$\Rightarrow (S_n)$ est bornée, donc $\exists M \geq 0$ tq $\forall n \geq 0, |S_n| \leq M$

D'où $\forall n \geq 1, \left|\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) S_n\right| \leq M\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ (*)

or $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, donc $\sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ CV

D'où $\sum \left|\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) S_n\right|$ CV d'après (*)

c) on a vu que $T_n = \frac{S_n}{n} - u_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) S_k}_{\beta_n}$

or 2b) $\Rightarrow (\beta_n)$ CV vers une limite l

De +, $\left|\frac{S_n}{n}\right| \leq \frac{M}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

d'où $\lim_{n \to +\infty} T_n = l - u_0$ donc (T_n) CV, c'est à dire $\sum \frac{u_n}{n}$ CV.

2ème PARTIE

3) a) $u_n = \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^\alpha} = e^{n^\alpha \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$

$n^\alpha \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim -n^{\alpha-\frac{1}{2}}$ d'où : $\begin{cases} \alpha > \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{-1} \\ \alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 \end{cases}$

b)

On en déduit que $\sum u_n$ DVG lorsque $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

→ étude lorsque $\alpha > \frac{1}{2}$:

dans ce cas, on a $u_n = e^{n^\alpha\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}$

d'où $n^2 u_n = e^{2\ln n - n^{\alpha-\frac{1}{2}} + o\left(n^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)}$

or par croissances comparées, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2\ln n - n^{\alpha-\frac{1}{2}}\right] = -\infty$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$ et donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

→ on en déduit $\sum u_n$ CV lorsque $\alpha > \frac{1}{2}$

4) a) $v_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left[2+\frac{1}{n}\right]\left[1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$

d'où $v_n = \frac{(-1)^n}{n}\left[2-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \underbrace{2\frac{(-1)^n}{n}}_{\alpha_n} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\beta_n}$

$\left.\begin{array}{l} \sum \alpha_n \text{ CV par le CSSA} \\ |\beta_n| \sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum \beta_n \text{ CVA} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum v_n \text{ CV}$

b)

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ or $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

d'où $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} + \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}}_{S} = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -1-S+S = \boxed{-1}$

$\boxed{3^{\text{ième}}\text{ PARTIE}}$

5) on fait une IPP dans $C_n = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)$

$u' = \cos x \quad v = (\cos x)^{2n-1}$

$u = \sin x \quad v' = (2n-1)(\cos x)^{2n-2}(-\sin x)$

$$C_n = \underbrace{\Big[(\sin x)(\cos x)^{2n-1}\Big]_0^{\pi/2}}_{0} + \int_0^{\pi/2} (2n-1)\sin^2 x (\cos x)^{2n-2}\,dx$$

$$\Rightarrow C_n = (2n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)(\cos x)^{2n-2}\,dx = (2n-1)(C_{n-1} - C_n)$$

6) D'où $(2n)C_n = (2n-1)C_{n-1} \Rightarrow C_n = \frac{2n-1}{2n} C_{n-1}$

on en déduit $C_n = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \frac{2n-5}{2n-4} \times \cdots \times \frac{1}{2} C_0$

$$\Rightarrow C_n = \frac{(2n)!}{\left[2\times 4\times\cdots\times(2n)\right]^2} C_0 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} C_0 \quad \text{et } C_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{C_n = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}}$$

$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ d'où $C_n \sim \frac{\sqrt{2\pi}\,(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}\,\pi}{2^{2n+1}\, 2\pi\, n^{2n+1} e^{-2n}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}\, 2\sqrt{n}}$

donc $\boxed{C_n \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$

7) $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2}\,dx = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)(\cos x)^{2n-2}\,dx = C_{n-1} - C_n \overset{\text{d'après 5)}}{=} \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$

8) on fait une IPP dans $C_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2n}\,dx$ $\begin{cases} u' = 1 & u = x \\ v = (\cos x)^{2n} & v' = -2n(\cos x)^{2n-1}(\sin x)\end{cases}$

d'où $C_n = \Big[x(\cos x)^{2n}\Big]_0^{\pi/2} + 2n\int_0^{\pi/2} x(\sin x)(\cos x)^{2n-1}\,dx$

$\Rightarrow C_n = 2n\int_0^{\pi/2} x \sin x (\cos x)^{2n-1}\,dx$ nouvelle IPP $\begin{cases} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = (\sin x)(\cos x)^{2n-1} \\ v' = (\cos x)^{2n} - \sin^2 x (2n-1)(\cos x)^{2n-2}\end{cases}$

d'où $C_n = n\Big[x^2 \sin x(\cos x)^{2n-1}\Big]_0^{\pi/2} - 2n\int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{2}(\cos x)^{2n}\,dx + 2n(2n-1)\int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{2}\underbrace{(\sin x)^2}_{1-\cos^2 x}(\cos x)^{2n-2}\,dx$

$\Rightarrow C_n = -\cancel{n}\int_0^{\pi/2} x^2 (\cos x)^{2n}\,dx + n(2n-1)(D_{n-1} - D_n)$

$\Rightarrow C_n = -\cancel{n} D_n + n(2n-1)D_{n-1} + n(1-2n)D_n$ donc $\boxed{C_n = n(2n-1)D_{n-1} - 2n^2 D_n}$

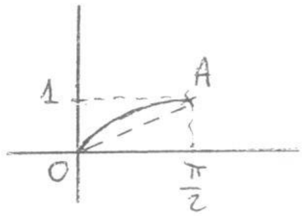
9) on en déduit $1 = (2n-1)n\dfrac{D_{n-1}}{C_n} - 2n^2\dfrac{D_n}{C_n}$ or $\dfrac{2n-1}{C_n} = \dfrac{2n}{C_{n-1}}$

d'où $1 = 2n^2\dfrac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - 2n^2\dfrac{D_n}{C_n}$ donc $\underline{\dfrac{1}{n^2} = 2\left(\dfrac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \dfrac{D_n}{C_n}\right)}$

(a) $\sin''(x) = -\sin x \leq 0$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

→ la fonction sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc son graphe est situé au-dessus de toutes ses tangentes, et au-dessus de ses "cordes"

→ l'arc $\widehat{OA}$ est situé au-dessus de la corde $[OA]$



d'équat° $y = \sin x$ d'équat° $y = \frac{2}{\pi}x$

d'où $\underline{\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \sin x \geq \frac{2}{\pi}x}$

(b) on en déduit que $D_n \leq \dfrac{\pi^2}{4}\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n}\,dx \overset{\text{d'après 7)}}{=} \dfrac{\pi^2}{4} \times \dfrac{C_n}{2n+2}$

10) on a $0 \leq \dfrac{D_n}{C_n} \leq \dfrac{\pi^2}{4(2n+2)}$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{D_n}{C_n} = 0$

or, d'après la question 9) :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{n^2} &= 2\left(\frac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \frac{D_n}{C_n}\right) \\ \frac{1}{(n-1)^2} &= 2\left(\frac{D_{n-2}}{C_{n-2}} - \frac{D_{n-1}}{C_{n-1}}\right) \\ &\ \vdots \\ \frac{1}{1^2} &= 2\left(\frac{D_0}{C_0} - \frac{D_1}{C_1}\right) \end{aligned}\right\}$$

on somme ces égalités

$\Downarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2\underbrace{\left(\frac{D_0}{C_0} - \frac{D_n}{C_n}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2D_0}{C_0}}$$

d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{2D_0}{C_0} = 2 \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{\pi} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$

Si on pose $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $W = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

alors $S = T + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = T + \frac{1}{4}S$ d'où $\boxed{T = \frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8}}$

puis $S + W = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{k^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ donc $S + W = \frac{1}{2}S \Rightarrow \boxed{W = -\frac{1}{2}S = \frac{-\pi^2}{12}}$

les termes [illegible]

4ème PARTIE

11) Soit λ tel que $\sum u_n(\lambda)$ converge, et soit $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $\mu \neq \lambda$. Or

$$u_n(\mu) = u_n(\lambda) + \frac{\mu - \lambda}{n}$$

et $\sum \frac{\mu-\lambda}{n}$ diverge ; comme somme d'une série convergente et d'une série divergente, $\sum u_n(\mu)$ diverge.

$\boxed{\text{S'il existe une valeur } \lambda \in \mathbf{C} \text{ telle que } \sum u_n(\lambda) \text{ converge, alors celle-ci est unique.}}$

12)

a) Par périodicité, on a

$$\frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} = \frac{\omega_1 + \cdots + \omega_d}{md+1}$$

ou encore

$$\boxed{\frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} = \frac{\Omega}{md+1}.}$$

b) Écrivons, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md} - \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d}\omega_{md+k} &= \sum_{k=1}^{d} \frac{\omega_k}{md+k} - \sum_{k=1}^{d}\frac{\omega_k}{md+1} \\
&= \sum_{k=1}^{d} \omega_k \left[\frac{1}{md+k} - \frac{1}{md+1}\right] \\
&= \frac{1}{md}\sum_{k=1}^{d} \omega_k \left[\frac{1}{1+\frac{k}{md}} - \frac{1}{1+\frac{1}{md}}\right] \\
&= \frac{1}{md}\sum_{k=1}^{d} \omega_k \left[1 - \frac{k}{md} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{m}\right) - 1 + \frac{1}{md} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{m}\right)\right] \\
&= \frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{d^2}\sum_{k=1}^{d}(1-k)\omega_k.
\end{aligned}$$

Posons $\boxed{\alpha = \frac{1}{d^2}\sum_{k=1}^{d}(1-k)\omega_k,}$

alors

$$\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md} = \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d}\omega_{md+k} + \frac{\alpha}{m^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

c) Puisque

$$\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md} = \frac{\Omega}{md+1} + \frac{\alpha}{m^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

que la série $\sum \frac{\alpha}{m^2}$ converge et que la série $\sum \mathrm{o}(1/m^2)$ converge absolument, on en déduit que la série $\sum \left(\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md}\right)$ a même nature que la série $\sum_m \frac{\Omega}{md+1}$:

$\boxed{\text{La série } \sum \left(\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md}\right) \text{ converge si et seulement si } \Omega = 0.}$

d) La suite des sommes partielles associée à la série précédente est la sous-suite $(\mathrm{S}_{md})_m$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$. Notamment, si cette sous-suite diverge, la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ diverge également.

Réciproquement, supposons que la série $\sum \left(\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md}\right)$ converge, c'est-à-dire que la suite $(\mathrm{S}_{md})_m$ converge. On note ℓ sa limite. Alors, pour tout $i \in [\![1\,;d-1]\!]$, la sous-suite $(\mathrm{S}_{md+i})_m$ converge également, puisque

$$\mathrm{S}_{md+i} = \mathrm{S}_m d + \sum_{k=1}^{i} \underbrace{\frac{\omega_{md+k}}{md+k}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.$$

On en déduit que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \Omega = 0.}$

13) Si l'on note $\Omega(\lambda) = \sum_{k=1}^{d}(\omega_k + \lambda) = \Omega + d\lambda$, l'étude qui précède montre que la série $\sum u_n(\lambda)$ converge si et seulement si $\Omega(\lambda) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda = -\Omega/d$.

$$\boxed{\lambda = -\Omega/d \text{ est l'unique valeur telle que la série } \sum u_n(\lambda) \text{ converge.}}$$

14)

a) $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ est périodique, donc

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1} \text{ est bornée.}}$$

b) Écrivons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{a_k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{T}_k - \mathrm{T}_{k-1}}{a_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{T}_k}{a_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{T}_{k-1}}{a_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{T}_k}{a_k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{T}_k}{a_{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{T}_k}{a_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{T}_k}{a_{k+1}} && \mathrm{T}_0 = 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{T}_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) + \frac{\mathrm{T}_n}{a_{n+1}}.
\end{aligned}$$

c) On note M un majorant de la suite $\big(|\mathrm{T}_n|\big)_{n\geqslant 1}$. Le terme général de la série étudiée vérifie

$$\left|\mathrm{T}_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)\right| \leqslant \mathrm{M}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

or la série $\sum \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$ converge (elle est télescopique et $1/a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Ainsi

$$\boxed{\sum \mathrm{T}_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \text{ converge absolument, donc converge.}}$$

d) S'en déduit immédiatement.