Spé PSI 2023-2024	**DS n° 1**	le 25 septembre 2023

Le problème comporte quatre parties largement indépendantes entre elles.

PREMIERE PARTIE

Le but de cette partie est de montrer que si une série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum \frac{u_n}{n}$ converge .

1) Démontrer ce résultat lorsque la série $\sum u_n$ est absolument convergente .

2) On suppose maintenant que la série $\sum u_n$ converge , sans être absolument convergente .

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$.

a) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \frac{S_n}{n} - u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) S_k$.

b) Prouver que la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) S_n$ est convergente .

c) En déduire que la série $\sum \frac{u_n}{n}$ converge .

DEUXIEME PARTIE

Cette partie s'intéresse aux séries de terme général $u_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^\alpha}$ et $v_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

3) a) Déterminer, suivant les valeurs du réel α , la limite $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

b) Déterminer, suivant les valeurs du réel α , la nature de la série $\sum u_n$.

4) a) Démontrer la convergence de la série de terme général v_n .

b) Calculer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

TROISIEME PARTIE

L'objectif de cette partie est de calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

5) On pose, pour tout entier naturel n, $C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n} \, \mathrm{d}x$ et $D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos x)^{2n} \, \mathrm{d}x$.

Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n-1)(C_{n-1} - C_n)$.

6) Déterminer la valeur exacte de C_n , que l'on exprimera à l'aide de factorielles.

En déduire, à l'aide de la formule de Stirling, un équivalent très simple de C_n .

7) Établir, pour tout entier naturel n non nul, les égalités :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2} = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$$

8) Établir pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $C_n = (2n-1)\,n\,D_{n-1} - 2n^2 D_n$.

9) En déduire, pour tout entier n non nul, l'égalité : $\dfrac{1}{n^2} = 2\left(\dfrac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \dfrac{D_n}{C_n}\right)$.

(a) Etablir pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la minoration : $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi} x$.

(b) En déduire, pour tout entier naturel n, la majoration : $D_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4} \dfrac{C_n}{2n+2}$.

10) Etablir que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, puis en déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

QUATRIEME PARTIE

Soit d un entier, $d \geqslant 2$. Soit $\omega = (\omega_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de complexes, périodique de période d, c'est-à-dire telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \omega_{n+d} = \omega_n.$$

Dans cette partie, on s'intéresse à la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n(\lambda)$ de terme général

$$\forall n \geqslant 1 \qquad u_n(\lambda) = \frac{\omega_n + \lambda}{n}$$

où λ est un complexe. On note plus simplement $u_n = u_n(0)$ pour tout $n \geqslant 1$.

11). Supposons, dans cette question uniquement, qu'il existe un complexe λ tel que $\sum u_n(\lambda)$ converge. Montrer que, pour toute valeur $\mu \neq \lambda$, la série $\sum u_n(\mu)$ diverge.

12) Dans cette question, on choisit $\lambda = 0$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n la somme partielle associée à la série $\sum u_n$, c'est-à-dire $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{k}$.

a) Pour tout entier naturel m, exprimer $\displaystyle\frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md-k}$ en fonction de $\Omega = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \omega_k$.

b) Déterminer un réel α tel que

$$\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md} = \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} + \frac{\alpha}{m^2} + \underset{m\to\infty}{o}\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur Ω pour que la série $\sum \left(\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md}\right)$ converge.

d) Montrer très *soigneusement* que la condition obtenue à la question précédente est une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ converge.

13) Montrer qu'il existe une unique valeur $\lambda \in \mathbf{C}$ telle que la série $\sum u_n(\lambda)$ converge.

14) . **Une généralisation** Dans cette question, on se donne une suite croissante $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels, telle que $a_1 > 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. On suppose que $\Omega = 0$. On pose, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{\omega_n}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k.$$

Par souci de commodité, on note également $\mathrm{T}_0 = 0$.

a) Montrer que la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{T}_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) + \frac{\mathrm{T}_n}{a_{n+1}}.$$

c) Montrer que la série $\sum \mathrm{T}_k \left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$ converge.

d) Montrer que la série $\sum u_k$ converge.