Spé PSI 2024-2025	**Devoir surveillé n° 2**	le 14 octobre 2024

4 heures *Les calculatrices ne sont pas autorisées .*

Le premier problème est commun à toute la classe. Vous choisirez ensuite un deuxième problème parmi le problème 2 , plus difficile, et le problème 3 , plus facile..

PROBLÈME 1 (Pb commun)

Dans tout le problème, α est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J(\alpha)=\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x.$$

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q1 Démontrer que $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

Q2 Démontrer que $J(\alpha)=I(1-\alpha)$.

Q3 Pour tout $x \in]0,1[$, on pose :

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{k+\alpha-1}.$$

À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que : $I(\alpha)=\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x.$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q4 En déduire que :

$$I(\alpha)+J(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}.$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\alpha x)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(+1)^n\frac{2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2-n^2}\right).$$

Q5 Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt,$$

et

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}\, dt.$$

Q6 Démontrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Q7 Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Q8 Démontrer que f_α est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

Q9 Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$.

Q10 Démontrer que $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$.

Partie III - Vers la formule des compléments

Q11. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}.$$

Q12 Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

En déduire que $\forall x \in]0,+\infty[,\ f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

Q13 En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

Q14 Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Q15 En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

FIN du problème 1

PROBLÈME 2 (plus difficile)

I Exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \text{ et } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

1. Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?

2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$, prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n, la relation :

$$R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (u\, e^{-u})^n \, du.$$

Soit y un réel strictement positif. On pose

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!} y^n.$$

3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n$.

En déduire, lorsque $y < e^{-1}$, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

4. On suppose dans cette question que $x \in]0,1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto u\, e^{-u}$ admet, sur $[0,x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$R_n(x) = o(e^{nx})$ puis donner un équivalent simple de $T_n(x)$.

5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt$ pour tout n entier naturel.

6. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer l'identité suivante :

$$T_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (u\, e^{-u})^n \, du.$$

7. En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On pourra d'abord établir que $(ue^{-u})^n \leq (xe^{-x})^{n-1}\, u\, e^{-u}$ *pour* $u \geq x$.

II Méthode de Laplace

On admettra la formule de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

Soit $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

H1 : $f(0) = 1$

H2 : $f''(0) = -1$

H3 : Pour tout $x \in]-1,1[\backslash\{0\}$ $\quad 0 < f(x) < 1$

H4 : les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0,1[$.

Pour $x \in]-1,1[\backslash\{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\big(f(x)\big).$$

8 Montrer que $f'(0) = 0$ puis, à l'aide d'un développement limité, déterminer $k = \lim_{x\to 0}\varphi(x)$.

On prolonge φ en posant $\varphi(0) = k$.

9 Montrer que la fonction φ, sur $]-1,1[$, est minorée par un réel strictement positif. En déduire l'existence d'un réel a strictement positif tel que pour tout $x \in [-1,1]$, on ait

$$f(x) \leq e^{-ax^2}.$$

Indication : on pourra distinguer les cas où $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls des cas où l'un des deux au moins est nul.

Pour tout n entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ par

$$g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

10. Montrer que chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, et que la suite de fonctions $(g_n,\, n \geq 1)$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers la fonction g telle que pour tout $u \in \mathbf{R}$,

$$g(u) = e^{-u^2/2}.$$

11. En déduire que

$$\int_{-1}^{1} \left(f(x)\right)^n \, \mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

On en déduit de la même manière que

$$\int_{0}^{1} \left(f(x)\right)^n \, \mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \tag{1}$$

III Formule de Stirling

Avertissement : même si elle fait partie du programme, on (re)démontre dans cette partie la formule de Stirling.

12. Pour tout entier $n \geq 1$, déduire de la question 5 que

$$n! = n^{n+1} \, e^{-n} \, (I_n + J_n),$$

avec

$$I_n = \int_{-1}^{1} (x+1)^n e^{-nx} \, \mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_{1}^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx} \, \mathrm{d}x.$$

13. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $x + 1 \leq 2^x$. En déduire une majoration de J_n de la forme $J_n \leq \dfrac{C}{n}$.

14. En appliquant la méthode de Laplace, donner un équivalent de I_n.

15. En déduire que

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

*** FIN ***

PROBLÈME 3

Dans tout ce problème, on désigne par α un nombre réel *positif*, et on se propose d'étudier la fonction f définie par l'intégrale suivante lorsque celle-ci est convergente :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt.$$

On se propose d'approfondir dans la partie I l'absolue convergence, puis la convergence de l'intégrale $f(\alpha)$, ce qui permet d'obtenir le domaine de définition de f. Puis on étudie dans les parties II et III le comportement de f au voisinage de 0 et 2. Enfin, dans la partie IV (qui est indépendante des précédentes), on calcule l'intégrale $f(1)$.

■ PARTIE I : Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$

Dans cette partie, on étudie la convergence de $f(\alpha)$ à l'aide des deux intégrales suivantes :

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt \quad ; \quad J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$$

1°) *Etude de la convergence de l'intégrale $I(\alpha)$*

a) Donner un équivalent de la fonction $t \longrightarrow \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ quand t tend vers 0.

b) En déduire pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.

2°) *Etude de l'absolue convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*

a) Démontrer que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$.

b) Vérifier que la fonction $t \longrightarrow |\sin(t)|$ est π-périodique, et en déduire, pour tout entier k, la valeur de l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\,dt$.

c) Démontrer l'encadrement suivant pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,dt \leq \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}.$$

En déduire pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$ que :

$$\frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,dt \leq \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}.$$

d) Préciser pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente.

3°) *Etude de la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*

a) Etudier la convergence de l'intégrale $J(0)$.

b) Démontrer la relation suivante pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $x \geq \pi$:

$$\int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha\int_\pi^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt.$$

c) Calculer (en justifiant son existence) l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$ pour $\alpha > 0$.

En déduire l'absolue convergence de l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$ pour $\alpha > 0$.

d) En déduire la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

4°) *Domaine de définition de la fonction f*

Préciser les domaines de convergence et d'absolue convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.
En déduire le domaine de définition de la fonction f introduite dans le préambule.
Dans toute la suite, on suppose que le paramètre α appartient à ce domaine de définition.

■ PARTIE II : Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 0

On se propose dans cette partie d'étudier $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0, et on écrit à cet effet :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

5°) *Limite de l'intégrale* $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

a) Justifier l'inégalité $0 \leq \sin(t) \leq t$ pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

b) En déduire à l'aide du théorème de convergence dominée (dont on précisera l'énoncé et dont on vérifiera les hypothèses) la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t\,.$$

6°) *Limite de l'intégrale* $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

a) A l'aide d'une double intégration par parties, justifier l'égalité suivante :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t.$$

b) Calculer l'expression $\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+2}}$, puis déterminer sa limite quand α tend vers 0.

En déduire la limite de $\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t$, puis de $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, quand α tend vers 0.

c) Déduire de cette question et de la précédente la limite de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Peut-on obtenir cette limite par application directe du théorème de convergence dominée à l'intégrale $f(\alpha)$?

■ Partie III : Calcul de l'intégrale $f(1)$

9°) *Calcul d'intégrales auxiliaires*

a) Justifier pour tout entier naturel n l'existence de l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$

b) Préciser la valeur de I_0, et prouver qu'on a $I_n - I_{n-1} = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.
En déduire la valeur de l'intégrale I_n.

c) On considère la fonction auxiliaire ψ définie pour $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ par $\psi(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$.
Quelle est la limite L de $\psi(t)$ lorsque t tend vers 0?
On posera désormais $\psi(0) = L$, de sorte que ψ est ainsi définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) Démontrer l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$\int_0^{\pi/2} \psi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

10°) *Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe* C^1

On considère une fonction g de classe C^1 du segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.

A tout entier naturel n, on associe l'intégrale suivante : $u_n = \int_0^{\pi/2} g(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t.$

a) Démontrer que :

$$u_n = \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} g'(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t.$$

b) A l'aide d'une majoration convenable de cette dernière intégrale, en déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

c) En admettant, ce que l'on ne demande pas de vérifier ici, que la fonction continue ψ introduite à la question 9.c) est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, en déduire la valeur de $f(1)$.