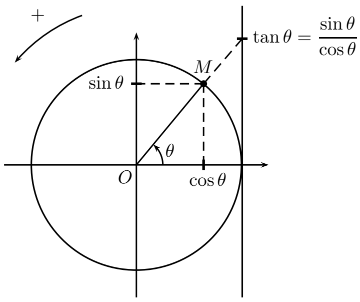
Fiche de trigonométrie circulaire



Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$$
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$
$$-1 \leq \sin\theta \leq 1$$

Pour tous $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $\tan(\theta + n\pi) = \tan\theta$.

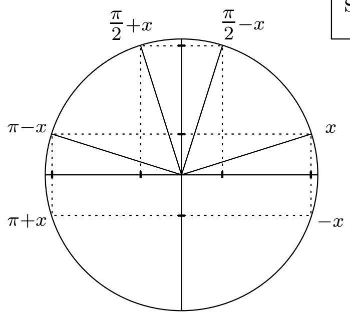
Caractérisation classique. Soient x, y et R trois réels. Alors : $x^2 + y^2 = R^2 \iff \exists\,\theta \in [0; 2\pi[,\ \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$

Symétries

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

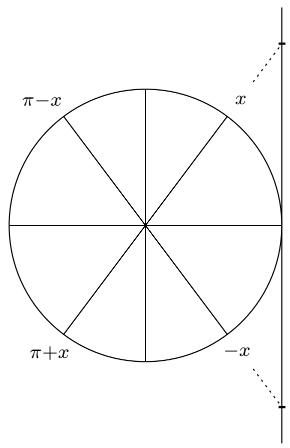
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$



$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$$



$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

Deux formules utiles : pour tous $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}\,,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$

Après n demi-tours.

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x$$
$$\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x$$
$$\tan(x + n\pi) = \tan x$$

Égalité de deux cosinus, deux sinus ou deux tangentes

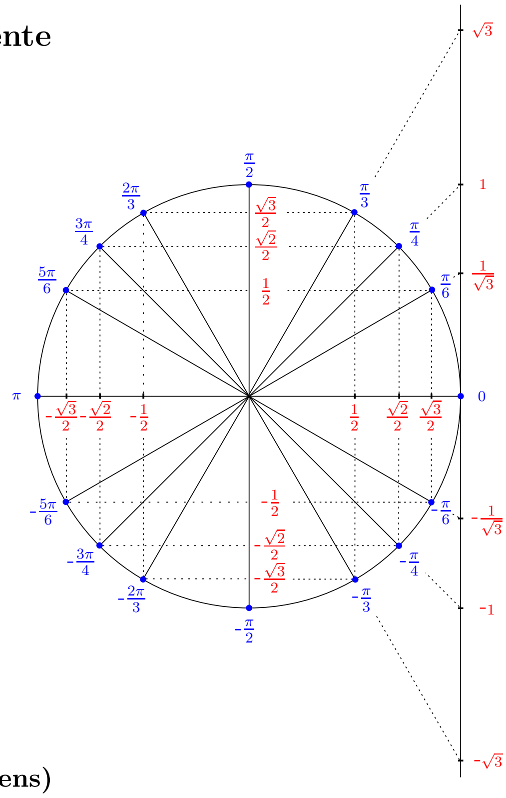
$$\cos(x) = \cos(y) \iff \text{ou} \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = y + 2k\pi \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = -y + 2k\pi \end{cases}$$

$$\sin(x) = \sin(y) \iff \text{ou} \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = y + 2k\pi \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - y + 2k\pi \end{cases}$$

$$\tan(x) = \tan(y) \iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = y + k\pi$$

Valeurs remarquables de cosinus, sinus et tangente

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X



Formules de trigonométrie
(valables dès que tous les termes de la formule ont un sens)

Relations fondamentales :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{cotan}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad 1 + \text{cotan}^2\, x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Développement de cosinus, sinus et tangente :

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$$

Formules de duplication :

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Transformation de somme en produit :

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2\cos\tfrac{p+q}{2} \cdot \cos\tfrac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2\sin\tfrac{p+q}{2} \cdot \sin\tfrac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2\sin\tfrac{p+q}{2} \cdot \cos\tfrac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2\cos\tfrac{p+q}{2} \cdot \sin\tfrac{p-q}{2} \end{aligned}$$

Transformation de produit en somme :

$$\begin{aligned} 2\cos a \cdot \cos b &= \cos(a+b) + \cos(a-b) \\ 2\sin a \cdot \sin b &= \cos(a-b) - \cos(a+b) \\ 2\sin a \cdot \cos b &= \sin(a+b) + \sin(a-b) \end{aligned}$$

Expressions en fonction de la tangente de l'angle moitié :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{où} \quad t = \tan\frac{x}{2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$