Fiche : comparaisons et équivalents usuels

Notation de Hardy. Au lieu de $f = o(g)$ (notation de Landau), on note parfois $f \ll g$ (notation de Hardy).

Parce que $f = o(g) \Leftrightarrow |f| = o(|g|)$, on aura toujours intérêt, pour chercher à négliger une quantité, à passer à la valeur absolue ou au module, afin de simplifier un peu les calculs et travailler avec des quantités réelles positives.

Principe (équivalents vs développements limités).
Un calcul d'équivalent est en général plus facile et plus rapide qu'un calcul de développement limité. On privilégiera donc au maximum l'utilisation des équivalents, et on ne recourra aux développements limités que quand les calculs d'équivalents n'aboutiront pas ou ne suffiront pas.

Comparaisons élémentaires.

Au voisinage de $+\infty$. Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha < \beta$: $(\ln x)^\alpha \ll (\ln x)^\beta$, $x^\alpha \ll x^\beta$, $e^{\alpha x} \ll e^{\beta x}$

Si $0 < a < b$: $a^x \ll b^x$ *(pour les suites : $a^n \ll b^n$ si $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $|a| < |b|$)*

Au voisinage de 0^+. Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha < \beta$: $x^\beta \ll x^\alpha$

Théorèmes de croissance comparée.

Au voisinage de $+\infty$. Si $\alpha, \beta, \gamma > 0$: $(\ln x)^\beta \ll x^\alpha \ll e^{\gamma x}$

$(\ln n)^\beta \ll n^\alpha \ll e^{\gamma n} \ll n! \ll n^n$ *(résultat plus complet pour les suites)*

Au voisinage de 0^+. Si $\alpha, \beta > 0$: $|\ln x|^\beta \ll \dfrac{1}{x^\alpha}$

On notera que si $a > 1$, $a^x = e^{x \ln a} = e^{\gamma x}$ avec $\gamma = \ln a > 0$

Équivalents usuels. Ci-dessous $\alpha \in \mathbb{R}$ est une constante

Équivalents classiques au voisinage de 0.

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \sin x \underset{0}{\sim} x \qquad \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{0}{\sim} x \qquad \operatorname{ch} x - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \qquad \operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} x$$

$$\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x}{2} \qquad \arcsin x \underset{0}{\sim} x$$

$$\arctan x \underset{0}{\sim} x$$

Un polynôme est équivalent, en 0, à son terme de plus bas degré.

Équivalents classiques au voisinage de 1.

$$\ln x \underset{1}{\sim} x - 1 \qquad x^\alpha - 1 \underset{1}{\sim} \alpha(x-1) \qquad \sqrt{x} - 1 \underset{1}{\sim} \frac{x-1}{2}$$

Équivalents classiques au voisinage de $\pm\infty$.

Un polynôme est équivalent, en $\pm\infty$, à son terme de plus haut degré.

Fiche : développements limités usuels

Développements limités usuels au voisinage de 0 à connaître par cœur.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

[*attention, ce développement n'est valable que si α est une constante*]

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^4)$$

Développements limités au voisinage de 0 à savoir retrouver rapidement.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2\times 4} x^2 + \frac{1\times 3}{2\times 4\times 6} x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \times \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)} x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{1\times 3}{2\times 4} x^2 - \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6} x^3 + \cdots + (-1)^n \times \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)} x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

[*ce DL(0) s'obtient par primitivation du développement en 0 de* $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$]

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1\times 3}{2\times 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\cdot\frac{x^7}{7} - \cdots - \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

[*ce DL(0) s'obtient par primitivation du développement en 0 de* $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$]