Spé PSI 1 et 2 – 2021/2022 **DS n° 4 (4h00)** Samedi 18 décembre 2021

<u>*Consignes*</u>

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Le candidat attachera la plus grande importance à la rigueur, à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si le candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet fait quatre pages, et est constitué d'un problème et de deux exercices, tous indépendants.

PROBLÈME

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul. Nous identifierons $\mathbb{C}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
On rappelle que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres complexes de A.

Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note :

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|\,,\ \ N(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) \ \text{ et } \ \rho(A) = \max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|.$$

On admet que l'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$ (c'est un résultat de cours).
Le réel positif $\rho(A)$ s'appelle le **rayon spectral** de la matrice A.

Le but du problème est de démontrer l'équivalence suivante :

$$A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \iff \rho(A) < 1.$$

Partie I. Généralités sur les normes et le rayon spectral

1. Démontrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n$. Montrer que $\|Ax\|_\infty \leqslant N(A)\cdot\|x\|_\infty$.

3. Soient $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Montrer que $N(AB) \leqslant N(A)\cdot N(B)$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- **a)** Montrer que $\rho(A) \leqslant N(A)$.
  On pourra considérer une valeur propre λ de A, un vecteur propre associé, et utiliser la question 2.
- **b)** A-t-on $N(A) \leqslant \rho(A)$?
  On justifiera la réponse par une preuve ou un contre-exemple.

5. Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer $\rho(A)$ et $\rho(B)$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ la liste, avec multiplicités, des valeurs propres de A (c'est-à-dire la liste des valeurs propres de A, chaque valeur propre étant écrite autant de fois que son ordre de multiplicité).

- **a)** Soit $k \in \mathbb{N}$. Dresser la liste, avec multiplicités, des valeurs propres de A^k.
  On justifiera la réponse.
- **b)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\rho(A^k) = \rho(A)^k$.

Partie II. Généralités sur la convergence vers 0 de la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

7. Montrer que si une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à A, alors

$$A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \iff B^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

8. On suppose $N(A) < 1$. Montrer que $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.
On pourra utiliser la question 3.

9. On suppose, dans cette question uniquement, que la matrice A est diagonalisable.
Démontrer l'équivalence :

$$A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \iff \rho(A) < 1$$

Partie III. Démonstration de l'équivalence $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \iff \rho(A) < 1$ dans le cas général

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

10. On suppose que $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Démontrer que $\rho(A) < 1$.
On pourra considérer une valeur propre λ de A, un vecteur propre x associé, et calculer $A^k x$.

11. Soit $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **triangulaire supérieure** telle que $\rho(T) < 1$.
Pour $s \in]0,1[$, on définit la matrice diagonale $D_s = \mathrm{diag}(s, s^2, \ldots, s^n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que pour tout $s \in]0,1[$, $N(D_s^{-1} T D_s) \leqslant \rho(T) + sN(T)$
On commencera par calculer les cœfficients de la matrice $D_s^{-1} T D_s$.

b) Justifier l'existence d'un réel s_0 tel que $N(D_{s_0}^{-1} T D_{s_0}) < 1$.

c) Déterminer la limite de $(D_{s_0}^{-1} T D_{s_0})^k$ quand $k \to +\infty$.

d) En déduire la limite de T^k dans $k \to +\infty$

12. On suppose que $\rho(A) < 1$. Démontrer que $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

Partie IV. Compléments sur l'application inverse

13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $N(A) < 1$. On note, pour p entier naturel, $S_p = \sum_{k=0}^{p} A^k$.

a) Démontrer que la matrice $I_n - A$ est inversible.
On pourra déterminer le noyau de $I_n - A$ en utilisant la question 2.

b) Calculer $(I_n - A)S_p$ pour tout entier naturel p.

c) En déduire que la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

d) Montrer que pour tout entier naturel non nul p, on a $N(S_p - I_n) \leqslant \dfrac{N(A)}{1 - N(A)}$.

e) En déduire que $N\left((I_n - A)^{-1} - I_n\right) \leqslant \dfrac{N(A)}{1 - N(A)}$.

14. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $N(A^{-1}B) < 1$.

a) Montrer que la matrice $A + B$ est inversible.
On pourra utiliser la question 13. a)

b) Montrer que $N\left((A + B)^{-1} - A^{-1}\right) \leqslant \dfrac{N(A^{-1}) \cdot N(A^{-1}B)}{1 - N(A^{-1}B)}$.

c) En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que l'application $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mapsto M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est continue.

d) Connaissez-vous une démonstration plus simple du fait que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ soit un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

EXERCICE 1

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la suite de fonctions $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in [0,+\infty[,\ \ f_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(1 - \mathrm{e}^{-x/n}\right)$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0,+\infty[$. On désigne par f sa somme.

2. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,+\infty[$.

Indication : minorer pour $p \geqslant 1$ le reste $R_n(x)$ par $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)$, et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} R_n(x)$.

3. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge normalement sur $[0,a]$, pour tout $a > 0$.

En déduire que f est continue sur $[0,+\infty[$.

4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et calculer $f'(0)$.

5. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x > 0$, on pose $g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{x}$.

a) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n(x)$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.

Indication : Utiliser, après l'avoir justifié, l'encadrement $0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-t} \leqslant t$, valable pour tout réel $t \geqslant 0$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

c) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a

$$0 \leqslant f(x) \leqslant x$$

d) Soit $x \in [0,+\infty[$. Montrer que pour tout entier $N \geqslant x$, on a

$$\sum_{n=N}^{+\infty} f_n'(x) \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}\,N}$$

En déduire que $f'(x) \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}(x+1)}$ et par suite que

$$\forall\, x \in [0,+\infty[,\ \ f(x) \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \ln(1+x)$$

e) Donner l'allure du graphe de la fonction f.

EXERCICE 2

On note, pour n entier naturel non nul et pour $x \in]0,+\infty[$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} - 2\,\mathrm{e}^{-2nx}$.

1. Étudier la converge simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $]0,+\infty[$.

2. Déterminer la fonction somme $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$.

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la limite de $f_n(x)$ quand $x \to 0^+$.
La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ est-elle uniformément convergente sur $]0,+\infty[$?

4. Étudier la convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur tout intervalle $[a,+\infty[$, $a > 0$.

5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$, et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

6. Montrer que la fonction S est intégrable sur $]0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,dx$.

7. Indiquer, sans calcul (mais en justifiant), la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 |f_n(x)|\,dx$.

Fin du sujet