Spé PSI 1 et 2 – 2021/2022 **DS n° 5 (4h00)** Samedi 22 janvier 2022

<u>*Consignes*</u>

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Le candidat attachera la plus grande importance à la rigueur, à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si le candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet fait quatre pages, et est constitué d'un problème et d'un exercice, indépendants.
Le sujet étant relativement long, l'objectif n'est pas de traiter l'intégralité du sujet.

PROBLÈME

La fonction « polylog » est définie, pour tous les réels x et α pour lesquels la série suivante converge, par :

$$\operatorname{polylog}(\alpha, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} = f_\alpha(x)$$

L'objectif du problème est l'étude de diverses propriétés de ces fonctions.

Partie A : étude de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$ pour $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série entière vaut 1 pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

On va faire l'étude de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$ sur le cercle d'incertitude, c'est-à-dire pour $|z| = 1$.

2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge-t-elle ?

Montrer que pour ces valeurs de α, on a convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$ pour z de module 1.

3. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$ pour $|z| = 1$ lorsque $\alpha \leqslant 0$.

On prend pour la suite de cette partie <u>$\alpha \in]0, 1]$</u>.

4. On fixe $\theta \in]0, \pi]$. On va étudier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$ pour $z = \mathrm{e}^{i\theta}$.

a) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\mathrm{e}^{i\theta})^n}{n^\alpha}$ est-elle absolument convergente ?

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\mathrm{e}^{i\theta})^k$. Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(\mathrm{e}^{i\theta})^k}{k^\alpha}$.

En remarquant que pour tout $k \geqslant 2$, $(\mathrm{e}^{i\theta})^k = A_k - A_{k-1}$, montrer que pour $n \geqslant 2$ on a :

$$S_n = \frac{A_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$$

d) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} A_n \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$ converge. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$ converge pour $z = \mathrm{e}^{i\theta}$.

5. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$ pour $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, 0[$ (et toujours $\alpha \in]0,1]$).

6. On fixe ici $\underline{\alpha = 1}$ et on veut calculer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{i\theta})^n}{n}$.

Pour cela, on prend $\theta \in]0, \pi]$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\mathrm{e}^{i\theta})^k}{k}$.

a) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{1 - t\,\mathrm{e}^{i\theta}}$ est bornée sur $[0, 1]$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1 - t\,\mathrm{e}^{i\theta}}\, dt$. Justifier que I_n existe et démontrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

c) En remarquant que pour tout $k \geqslant 1$, $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\, dt$, démontrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{1 - t\,\mathrm{e}^{i\theta}}\, dt$.

d) Retrouver alors le fait que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\mathrm{e}^{i\theta})^n}{n}$ converge et montrer que sa somme vaut $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - t}{t^2 - 2t\cos\theta + 1}\, dt$. Calculer les parties réelle et imaginaire de I.

e) Donner les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ et, pour tout $\theta \in]-\pi, 0[$, de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{i\theta})^n}{n}$.

Partie B : étude générale des fonctions f_α pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

On rappelle que f_α est définie par $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$ pour x réel convenable et qu'on prend dans cette partie à nouveau $\alpha \in \mathbb{R}$.

7. Déterminer selon les valeurs de α l'ensemble de définition de f_α.

8. Pour $x \in]-1, 1[$, exprimer $f_0(x)$ et $f_1(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

9. a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α est croissante sur $[0, 1[$.

b) Justifier que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f_\alpha(x) + f_\alpha(-x) = 2^{1-\alpha} f_\alpha(x^2)$$

c) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a :

$$x f_\alpha'(x) = f_{\alpha-1}(x)$$

d) Pour $x \in]-1, 1[$, exprimer $f_{-1}(x)$ et $f_{-2}(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

10. a) Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = -1$. Démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

b) Pour $x \in]-1, 1[$, exprimer $f_2(x)$ à l'aide de φ.

11. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.

a) Soit h_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $h_n(t) = \mathrm{e}^{-nt}\, t^{\alpha-1}$. Montrer que h_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer $\int_0^{+\infty} h_n(t)\, dt$ à l'aide de n, α et de l'intégrale $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt = \int_0^{+\infty} h_1(t)\, dt$.

b) Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} x^n h_n(t)$ de fonctions de la variable réelle t est intégrable terme à terme sur $]0,+\infty[$.

En déduire que pour tout $\alpha > 1$ et pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$f_\alpha(x) = \frac{x}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^t - x}\, dt$$

Partie C : étude de f_α au voisinage (à gauche) de 1.

12. Pour $\alpha \leqslant 1$, montrer que f_α n'est pas majorée sur $[0,1[$ (on pourra raisonner par l'absurde). En déduire que $\lim\limits_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$.

13. Montrer que pour $\alpha > 1$, f_α est continue en 1 à gauche et étudier pour $\alpha > 1$, la dérivabilité à gauche de f_α en 1.

On admet que pour la suite du problème la **propriété** suivante :
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1 et de somme notée f. On suppose que pour tout n, $a_n > 0$ et que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$. On se donne également une autre série entière $\sum b_n x^n$ de somme notée g et on suppose que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$.

$$\text{Alors } f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} g(x)$$

14. a) Déterminer un équivalent simple de $f_\alpha(x)$ lorsque $x \to 1^-$ lorsque $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ et $\alpha = -2$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. En remarquant que $n^p \underset{n\to+\infty}{\sim} n(n-1)\cdots(n-p+1)$, déterminer un équivalent simple de $f_{-p}(x)$ lorsque $x \to 1^-$.

15. Soit γ un nombre réel, $\gamma < 0$. Développer la fonction $x \mapsto (1-x)^\gamma$ en série entière au voisinage de 0 sous la forme :

$$(1-x)^\gamma = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On précisera le rayon de convergence de cette série entière, l'intervalle de validité de ce développement et la valeur de a_n. Montrer en particulier que pour tout n, $a_n > 0$.

16. Soit $\delta \in \mathbb{R}$. On pose pour tout n, $v_n = \dfrac{a_n}{n^\delta}$ et $u_n = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ où a_n a été défini à la question précédente.

a) Étudier selon les valeurs de δ, la nature de la série de terme général u_n.

b) En déduire qu'il existe deux nombres réels $\beta > 0$ et δ tels que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta n^\delta$. On précisera la valeur de δ en fonction de γ.

17. Déduire de ce qui précède que pour tout nombre réel $\alpha < 1$, il existe un nombre réel $\lambda(\alpha) > 0$ tel que

$$f_\alpha(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \lambda(\alpha)(1-x)^{\alpha-1}$$

et préciser la valeur de $\lambda(-p)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

EXERCICE

On considère une suite indéfinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par R_n l'évènement : « Pile apparaît au n-ème lancer » et par S_n l'évènement : « Face apparaît au n-ème lancer ».

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n l'évènement : « un Face, précédé de deux Piles, apparaît pour la première fois au n-ème lancer », et Y_∞ l'évènement : « il n'apparaît jamais de Face précédé de deux Piles ».

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On pose $c_1 = c_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $c_n = \mathbb{P}(Y_n)$. On note également

$$\forall\, n \geqslant 3,\ \ B_n = R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n \ \text{ et } \ U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i$$

On pose enfin $u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = \mathbb{P}(U_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone et convergente.

2. **a)** Pour tout $n \geqslant 3$, calculer $\mathbb{P}(B_n)$.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, les évènements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

c) Calculer les valeurs de u_3, u_4 et u_5.

3. Dans cette question, on suppose que $n \geqslant 5$.

a) Comparer les évènements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Préciser leurs probabilités respectives.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

d) Calculer $\mathbb{P}(Y_\infty)$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Trouver $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3}$.

b) Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Fin du sujet