# CHAPITRE 0 LOGIQUE ET ENSEMBLES

## PARTIE 0.1 : ASSERTIONS LOGIQUES

### 0.1.1 : Présentation et terminologie

**Définition 0.1**

*Une* **assertion logique** *(ou propriété) est une "phrase"* P *(en français ou en maths) qui peut être vraie ou fausse selon plusieurs critères : le moment, le lieu, l'élément ou les éléments au(x)quel(s) s'applique cette assertion. On consigne ces valeurs de vérité dans la* **table de vérité** *:*

| *P* |
|---|
| *V* |
| *F* |

.

***EXEMPLE 0.1* :**

- $P =$"53 est un nombre premier" qui était, est et restera toujours vraie.
- $P(t) =$"Jean Tigana est entraîneur de Bordeaux" qui est vraie, mais pour l'instant.
- $P(n) =$"$n$ est un multiple de 11" qui est vraie si $n = 12435687$ mais fausse si $n = 12345678$.
- $P(x, n) =$"$x^n$ est un entier" qui est vraie si $x = \sqrt[5]{3}$ et $n = 5$ mais fausse si $x = \sqrt{2}$ et $n = 3$.

⊙ Il n'y a pas (contrairement à ce qu'ont pu le croire les anciens) de vérité absolue en mathématiques : il convient de poser une base pour le calcul et le raisonnement, c'est le rôle des **axiomes**. Il existe des règles de logique qui donnent le cadre des raisonnements permis, les axiomes de Zermelo-Fraenkel (ZF) pour la théorie des ensembles (Ernst Zermelo : mathématicien allemand 1871-1953 et Abraham Adolf Halevi Fraenkel : mathématicien allemand puis israélien 1891-1965) et pour déclarer l'existence du plus indispensable d'entre eux, celui des entiers naturels : ce sont les fameux axiomes de Peano (Giuseppe Peano : mathématicien italien 1858-1932). Un bon système d'axiomes s'obtient par l'observation et l'expérimentation.

⊙ L'objectif du mathématicien est de dégager le maximum d'assertions vraies : celles qui sont importantes pour la compréhension des objets mathématiques, celles qui servent pour les autres disciplines scientifiques, celles qui ont un intérêt esthétique.
Ces assertions vraies sont appelées, selon leur beauté ou leur puissance : **théorème** (important), **proposition** (un peu moins), **lemme** (qui sert surtout pour les autres propositions), **corollaire** (une conséquence quasi-immédiate mais néanmoins intéressante d'une autre proposition).

⊙ Des personnes (souvent de grands mathématiciens) ont des intuitions qu'un certain résultat est vrai sans pouvoir encore le démontrer : cette assertion s'appelle alors une **conjecture** dont voici certaines des plus célèbres :

- Grand théorème (oups!) de Fermat (Pierre Simon de Fermat : mathématicien et juriste français 1601-1665) : si $n \geqslant 3$ l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a aucune solution avec $x, y$, et $z$ entiers à part les solutions élémentaires telles que $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ou $(1, 0, 1)$... . Cette conjecture vieille de quatre siècles, qui a mobilisé une bonne partie de la ressource mathématique mondiale, a été démontrée en 1995 par Wiles (Sir Andrew John Wiles : mathématicien anglais 1953-)).
- Conjecture de Goldbach (Christian Goldbach : mathématicien allemand 1690-1764) : tout nombre pair strictement supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers. C'est toujours une conjecture et les ordinateurs la confirment jusqu'à de grands nombres.

- Conjecture d'EULER (Leonhard EULER : mathématicien et physicien suisse 1707-1783) : dans la même veine que FERMAT, si $n \geqslant 3$, il n'existe pas d'entiers tels que $x_1^n + \cdots + x_{n-1}^n = x_n^n$. Pauvre EULER, on a trouvé en 1966 le contre-exemple : $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$, et même en 1988 : $95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$. Il n'y a actuellement aucun contre-exemple connu pour $n > 5$.
- Conjecture de WARING (Edward WARING : mathématicien anglais 1734-1798) : tout entier positif est la somme de 4 carrés, 9 cubes, 19 puissances quatrièmes, etc... . Elle a aussi été démontrée en 1985.
- Une autre conjecture démontrée en 2002, il n'existe aucune solution entière non élémentaire de l'équation $x^n = y^m + 1$ si $n$ et $m$ sont des entiers supérieurs ou égaux à 2.
- Conjecture de Syracuse énoncée en 1937 par COLLATZ (Lothar COLLATZ : mathématicien allemand 1910-1990) : si on prend un entier $p \geqslant 1$, on construit la suite $u_0 = p$ et, une fois déterminé l'élément $u_n$, on pose $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$ s'il est pair et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ s'il est impair. La conjecture est qu'il existe toujours un terme de cette suite qui est égal à 1 comme on peut le voir sur cet exemple : $u_0 = 13$, $u_1 = 40$, $u_2 = 20$, $u_3 = 10$, $u_4 = 5$, $u_5 = 16$, $u_6 = 8$, $u_7 = 4$, $u_8 = 2$, $u_9 = 1$.

⊙ GÖDEL (Kurt GÖDEL : mathématicien et logicien austro-américain 1906-1978) a montré en 1930 son fameux théorème d'incomplétude qui mettait fin à l'espoir de voir une théorie arithmétique universelle : il a montré l'existence d'assertions qui ne peuvent pas être prouvées (ni leur contraire bien sûr) à partir des règles de logique adoptées jusqu'alors ; on dit qu'elles sont **indécidables**. On peut ignorer des assertions indécidables comme l'hypothèse du continu, soit les considérer comme axiomes comme l'axiome du choix (théorie ZFC), soit prendre leur contraire comme axiome. Une conjecture n'est pas une assertion indécidable (en général), c'est une propriété qui est vraie ou fausse mais on ne le sait pas encore.

### 0.1.2 : Connecteurs logiques

À partir d'assertions existantes, on peut en créer de nouvelles :

**Définition 0.2**

*La **négation** d'une assertion $P$ est notée $\mathrm{non}(P)$ et possède*

| P | non(P) |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

*pour table de vérité par rapport à celle de $P$. On peut aussi définir, si $P$ et $Q$ sont deux assertions, les **conjonction** et **disjonction** de $P$ et $Q$, plus simplement appelées ($P$ et $Q$) et ($P$ ou $Q$), dont le sens est classique. Il existe aussi ($P$ **ou exclusif** $Q$) qui n'est vrai que si l'une des deux assertions $P$ et $Q$ est vraie mais pas les deux en même temps. L' **implication** ($P \Longrightarrow Q$) est encore définie comme étant l'assertion ($\mathrm{non}(P)$ ou $Q$) et enfin l'**équivalence** ($P \Longleftrightarrow Q$) par (($P \Longrightarrow Q$) et ($Q \Longrightarrow P$)). Ces 5 nouvelles assertions ont les valeurs de vérité suivantes :*

| P | Q | P et Q | P ou Q | P ou exclusif Q | $P \Longrightarrow Q$ | $P \Longleftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | F | V | V |
| V | F | F | V | V | F | F |
| F | V | F | V | V | V | F |
| F | F | F | F | F | V | V |

*Quand l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on dit que "$P$ est une **condition suffisante** pour $Q$" et "$Q$ une **condition nécessaire** de $P$" ; on dit aussi que "il faut $Q$ pour $P$" ou "il suffit $P$ pour $Q$". Si maintenant c'est l'assertion $P \Longleftrightarrow Q$ qui est vraie, on dit que "$P$ est une **condition nécessaire et suffisante (CNS)** pour $Q$" (et vice-versa) ou encore que "il faut et il suffit $P$ pour $Q$" ou enfin "$P$ si et seulement si $Q$".*

*On appelle **réciproque** de l'implication $P \Longrightarrow Q$ l'implication $Q \Longrightarrow P$*

*REMARQUE 0.1 :*

- *Une théorie mathématique serait dite contradictoire s'il existait une assertion $P$ telle que $P$ et $\mathrm{non}(P)$ soient toutes les deux vraies : elle serait bien sûr sans intérêt. À l'heure actuelle, personne n'a trouvé de telle assertion $P$ dans la théorie mathématique courante : ouf !*

• *On constate que si* $\mathsf{P}$ *est fausse alors l'implication* $\mathsf{P} \Longrightarrow \mathsf{Q}$ *est vraie quelle que soit la valeur de vérité de* $\mathsf{Q}$, *ce qui rend vraies des assertions telles que : "La terre est cubique implique la terre est bleue". Ne vous inquiétez pas ! Ce qui fait la force de l'implication est la règle d'inférence qui va suivre.*

### 0.1.3 : Propriétés et conventions

Une **tautologie** est un théorème logique, c'est-à-dire une assertion portant elle-même sur des assertions et qui est vraie quelles que soient les valeurs de vérité de ces assertions ; en voici quelques exemples.

**Proposition 0.1**

**(Tautologies) Pour des assertions quelconques $\mathsf{P}$, $\mathsf{Q}$ et $\mathsf{R}$ :**

**(i)** $(\mathsf{P}$ **ou** $\mathsf{P}) \Longleftrightarrow \mathsf{P}$ **;** $(\mathsf{P}$ **et** $\mathsf{P}) \Longleftrightarrow \mathsf{P}$ **: pas la peine de se répéter.**

**(ii)** $\big(\mathsf{P}$ **ou** $\mathrm{non}(\mathsf{P})\big)$ **est vraie : principe du tiers exclu.**

**(iii)** $\mathsf{P} \Longrightarrow \mathsf{P}$ **;** $\mathsf{P} \Longleftrightarrow \mathsf{P}$ **: conséquence du précédent avec les définitions.**

**(iv)** $\mathrm{non}\big(\mathrm{non}(\mathsf{P})\big) \Longleftrightarrow \mathsf{P}$ **: la négation est involutive.**

**(v)** $(\mathsf{P} \Longrightarrow \mathsf{Q}) \Longleftrightarrow \big(\mathrm{non}(\mathsf{P}) \text{ ou } \mathsf{Q}\big)$ **: c'est la définition de l'implication.**

**(vi)** $(\mathsf{P} \Longrightarrow \mathsf{Q}) \Longleftrightarrow \big((\mathrm{non}(\mathsf{Q}) \Longrightarrow \mathrm{non}(\mathsf{P})\big)$ **: principe de contre-apposition.**

**(vii)** $\begin{cases} (\mathsf{P} \text{ ou } \mathsf{Q}) & \Longleftrightarrow & (\mathsf{Q} \text{ ou } \mathsf{P}) \\ (\mathsf{P} \text{ et } \mathsf{Q}) & \Longleftrightarrow & (\mathsf{Q} \text{ et } \mathsf{P}) \\ (\mathsf{P} \Longleftrightarrow \mathsf{Q}) & \Longleftrightarrow & (\mathsf{Q} \Longleftrightarrow \mathsf{P}) \end{cases}$ **: commutativité de 'ou', de 'et', de '$\Longleftrightarrow$'.**

**(viii)** $\mathrm{non}(\mathsf{P}$ **ou** $\mathsf{Q}) \Longleftrightarrow \big(\mathrm{non}(\mathsf{P})$ **et** $\mathrm{non}(\mathsf{Q})\big)$ **;** $\mathrm{non}(\mathsf{P}$ **et** $\mathsf{Q}) \Longleftrightarrow \big(\mathrm{non}(\mathsf{P})$ **ou** $\mathrm{non}(\mathsf{Q})\big)$ **: ce sont les lois de** De Morgan **(Auguste** De Morgan **: mathématicien britannique** 1806**-**1871**).**

**(ix)** $\mathrm{non}(\mathsf{P} \Longrightarrow \mathsf{Q}) \Longleftrightarrow \big(\mathsf{P}$ **et** $\mathrm{non}(\mathsf{Q})\big)$ **: conséquence de ce qui précède.**

**(x)** $\begin{cases} \big((\mathsf{P} \text{ ou } \mathsf{Q}) \text{ ou } \mathsf{R}\big) & \Longleftrightarrow & \big(\mathsf{P} \text{ ou } (\mathsf{Q} \text{ ou } \mathsf{R})\big) \\ \big((\mathsf{P} \text{ et } \mathsf{Q}) \text{ et } \mathsf{R}\big) & \Longleftrightarrow & \big(\mathsf{P} \text{ et } (\mathsf{Q} \text{ et } \mathsf{R})\big) \end{cases}$ **: associativité de 'ou' et 'et'.**

**(xi)** $\begin{cases} \big((\mathsf{P} \text{ ou } \mathsf{Q}) \text{ et } \mathsf{R}\big) & \Longleftrightarrow & \big((\mathsf{P} \text{ et } \mathsf{R}) \text{ ou } (\mathsf{Q} \text{ et } \mathsf{R})\big) \\ \big((\mathsf{P} \text{ et } \mathsf{Q}) \text{ ou } \mathsf{R}\big) & \Longleftrightarrow & \big((\mathsf{P} \text{ ou } \mathsf{R}) \text{ et } (\mathsf{Q} \text{ ou } \mathsf{R})\big) \end{cases}$ **: distributivité de 'et'/'ou', de 'ou'/'et'.**

**(xii)** $\begin{cases} \big((\mathsf{P} \Longrightarrow \mathsf{Q}) \text{ et } (\mathsf{Q} \Longrightarrow \mathsf{R})\big) & \Longrightarrow & (\mathsf{P} \Longrightarrow \mathsf{R}) \\ \big((\mathsf{P} \Longleftrightarrow \mathsf{Q}) \text{ et } (\mathsf{Q} \Longleftrightarrow \mathsf{R})\big) & \Longrightarrow & (\mathsf{P} \Longleftrightarrow \mathsf{R}) \end{cases}$ **: transitivité de '$\Longrightarrow$' et '$\Longleftrightarrow$'.**

<u>Démonstration</u> : Il suffit d'écrire les tables de vérité pour s'en convaincre. Par exemple pour le principe de contre-apposition :

| P | Q | $\mathrm{non}(\mathsf{Q})$ | $\mathrm{non}(\mathsf{P})$ | $\mathrm{non}(\mathsf{Q}) \Longrightarrow \mathrm{non}(\mathsf{P})$ | $\mathsf{P} \Longrightarrow \mathsf{Q}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | V |
| V | F | V | F | F | F |
| F | V | F | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V |

*<u>REMARQUE 0.2</u> : Tout ceci amène aussi le principe de non contradiction :* $\big(\mathsf{P}$ *et* $\mathrm{non}(\mathsf{P})\big)$ *est fausse.*

*Quelques conventions d'écriture des assertions ; il faut bien se comprendre :*

- *On utilise souvent, au cours des démonstrations, la transitivité de l'implication de manière automatique en écrivant* $\mathsf{P} \Longrightarrow \mathsf{Q} \Longrightarrow \mathsf{R}$ *au lieu de* $(\mathsf{P} \Longrightarrow \mathsf{Q})$ *et* $(\mathsf{Q} \Longrightarrow \mathsf{R})$ *et on en tirera bien sûr que* $\mathsf{P} \Longrightarrow \mathsf{R}$. *On fait bien sûr de même avec l'équivalence qui est aussi transitive.*
- *On peut même, si on enchaîne plusieurs assertions sur plusieurs lignes, disposer les différentes implications comme suit :* $\begin{cases} \mathsf{P}_1 & \Longrightarrow & \mathsf{P}_2 \\ \mathsf{P}_2 & \Longrightarrow & \mathsf{P}_3 \\ \cdots & & \cdots \\ \mathsf{P}_{n-1} & \Longrightarrow & \mathsf{P}_n \end{cases}$ *et en déduire* $\mathsf{P}_1 \Longrightarrow \mathsf{P}_n$. *Idem pour l'équivalence.*
- *Comme vous le faites depuis déjà quelques temps, on écrit quelquefois* $\begin{cases} \mathsf{P} \\ \mathsf{Q} \end{cases}$ *à la place de* $(\mathsf{P}$ *et* $\mathsf{Q})$.

# PARTIE 0.2 : MODÈLES DE RAISONNEMENT

## 0.2.1 : Implication, contre-apposée et syllogisme

*REMARQUE 0.3 : Pour montrer qu'une implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on voit encore une fois sur le tableau qu'il suffit de montrer que si $P$ est vraie, alors $Q$ l'est aussi : en effet, la seule possibilité pour que $P \Longrightarrow Q$ soit fausse, c'est que $P$ soit vraie et $Q$ soit fausse.*
*D'après le principe de contre-apposition, il est peut-être plus commode de montrer $\text{non}(Q) \Longrightarrow \text{non}(P)$ ; c'est-à-dire que si $Q$ est fausse, alors $P$ l'est aussi.*

**Méthode**

**Si on veut montrer que $P \Longrightarrow Q$ alors on a le choix :**
**On suppose $P$ vraie, ....., donc $Q$ est vraie : conclusion $P \Longrightarrow Q$.**
**On suppose $Q$ fausse, ....., donc $P$ est fausse : conclusion $P \Longrightarrow Q$.**
**On utilise des assertions intermédiaires en se servant de la transitivité de l'implication.**

***EXEMPLE 0.2 :*** On s'intéresse ici aux nombres de MERSENNE (Marin MERSENNE : religieux, érudit, mathématicien et philosophe français 1588-1648) qui sont les entiers $2^n - 1$ pour $n \geqslant 1$. On veux montrer que l'assertion "$(2^n - 1$ premier$) \Longrightarrow (n$ premier$)$" est vraie.

**Proposition 0.2**

**Règle d'inférence (ou principe de syllogisme) : soit deux assertions $P$ et $Q$ et que $P \Longrightarrow Q$ et $P$ sont vraies simultanément, alors on peut en déduire que $Q$ est vraie.**

DÉMONSTRATION : Il suffit de regarder la définition de l'implication pour voir qu'il n'y a que la première ligne du tableau qui correspond à ce cas et qu'il contient la valeur de vérité $V$ pour $Q$.

⊙ C'est ce principe qui a donné son nom au symbole $\Longrightarrow$ : $P$ vraie "implique" (sens usuel) $Q$ vraie.
**Attention** : même si $P \Longrightarrow Q$ est vraie pour $P$ fausse, ceci n'a aucun intérêt car on ne pourra pas en déduire que $Q$ est vraie.

***EXEMPLE 0.3 :*** On dispose d'un corollaire du petit théorème de FERMAT qui annonce que pour un entier $p \geqslant 1$ : ($p$ premier impair) $\Longrightarrow$ ($p$ divise $2^{p-1} - 1$). Ainsi, comme 11 est premier et impair, il vient $2^{10} - 1 = 1023$ est un multiple de 11. Mais l'implication précédente n'est pas un équivalent car $341 = 11 \times 31$ et pourtant 341 divise $2^{340} - 1$.

## 0.2.2 : Raisonnement par l'absurde

C'est presque la contre-apposition mais présentée autrement :

**Proposition 0.3**

**Si, pour deux assertions $P$ et $Q$, on a la vérité des 2 assertions $Q$ et $\text{non}(P) \Longrightarrow \text{non}(Q)$, alors on peut en déduire que $P$ est vraie.**

DÉMONSTRATION : D'après la contre-apposée, on a aussi $Q \Longrightarrow P$ et comme $Q$ est vraie, la règle d'inférence prouve alors bien que $P$ est vraie.

*REMARQUE 0.4 : Voici comment se présente traditionnellement un raisonnement par l'absurde : on suppose que $P$ est fausse, on cherche alors une assertion $Q$ qu'on sait être vraie et telle qu'on ait l'implication $\text{non}(P) \Longrightarrow \text{non}(Q)$ : ceci revient à dire que si $P$ est fausse, on a à la fois $Q$ vraie et fausse. On dit qu'on est parvenu à une contradiction et on marque simplement "absurde" ou "contradiction".*

**Méthode**

**On veut montrer que $P$ est vraie : on fait l'hypothèse que $P$ est fausse, ....., donc $Q$ est fausse ($Q$ est une assertion qu'on ne connaît pas au début du raisonnement mais qu'on sait être vraie) : contradiction. Conclusion : $P$ est vraie.**

***EXEMPLE 0.4 :*** Voici deux exemples célèbres :

• Démonstration d'EUCLIDE (EUCLIDE : mathématicien grec auteur des "Éléments" -325- -265) du fait qu'il existe une infinité de nombres premiers. Supposons la finitude du nombre $n$ de nombres premiers de sorte qu'on peut énumérer $p_1, p_2, \cdots, p_n$ ces nombres premiers. Définissons alors l'entier naturel $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ pour parvenir à une contradiction.

• Soit à prouver que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Supposons donc qu'il soit rationnel et écrivons-le $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p$ et $q$ deux entiers naturels qui n'ont aucun facteur commun.

### 0.2.3 : Récurrence

Ceci est un raisonnement extrêmement utile et qui découle directement des propriétés des entiers naturels que nous étudierons plus en détails plus tard.
Il en existe d'ailleurs plusieurs formes ; mais toutes se ramènent à celle qui est exposée ci-dessous.

**Théorème 0.1**

**Soit, pour un entier naturel $n$, une assertion $\mathcal{P}_n$ (suite d'assertions).**
**On suppose que $\mathcal{P}_0$ est vraie et que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a : $\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$.**
**La conclusion est alors que pour tout entier naturel $n$ l'assertion $\mathcal{P}_n$ est vraie.**

DÉMONSTRATION : Ceci sera vu dans un prochain chapitre mais cette preuve repose en fin de compte sur une propriété axiomatique (PEANO) de l'ensemble des entiers naturels.

**Méthode**

**On s'est donné des assertions $\mathcal{P}_n$ pour tout entier $n \geqslant n_0$ :**
**Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie.**
**Hérédité : soit $p \geqslant n_0$, on suppose que $\mathcal{P}_p$ est vraie, ...., alors $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.**
**Conclusion : d'après le principe de récurrence : pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.**

***EXEMPLE 0.5 :*** On sait que, pour un entier naturel $n$, $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ qu'on peut démontrer autrement que par récurrence ; mais qu'en est-il de $u_n = 0+1+4+9+16+\cdots+n^2$ ?
Montrons que $\mathcal{P}_n =$ "$u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$" est vraie pour tout entier $n$.

### 0.2.4 : Disjonction des cas

On l'utilise souvent sans y penser en distinguant tous les cas possibles pour une variable.

**Proposition 0.4**

**Si on a, pour un entier $n \geqslant 1$, des assertions $P_1$, $P_2$, ... $P_n$ et une assertion $Q$ telles que ($P_1$ ou $P_2$ ou ... ou $P_n$) est vraie ainsi que $P_k \Longrightarrow Q$ pour tout entier $k$ entre 1 et $n$. Alors la conclusion est que $Q$ est vraie.**

DÉMONSTRATION : Il existe au moins une des assertions $P_i$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) qui est vraie, soit $P_k$ une des ces assertions vraies ; alors comme $P_k \Longrightarrow Q$ est aussi vraie, le principe de syllogisme donne enfin $Q$ vraie.

***EXEMPLE 0.6 :*** Le fait est qu'il n'est pas nécessaire de savoir laquelle des assertions de la proposition est vraie pour en conclure à la vérité de $Q$ comme on le constate dans cet exemple bizarre : soit les assertions $P_1 =$"$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est un nombre rationnel", $P_2 =$"$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est un nombre irrationnel" et aussi $Q =$"il existe au moins un réel irrationnel strictement positif $x$ tel que $x^{\sqrt{2}}$ est rationnel".

# PARTIE 0.3 : ENSEMBLES

## 0.3.1 : Introduction aux ensembles

⊙ Un ensemble est une collection d'objets mais toutes les collections d'objets ne sont pas des ensembles : cette distinction entre collection et ensemble n'est vraiment intéressante que si on plonge profondément dans la théorie des ensembles, ce que nous ne ferons pas ici. Pour nous, tous les "groupements" d'objets seront des ensembles même si on pourra voir le paradoxe de RUSSELL (Bertrand Arthur William RUSSELL : mathématicien, logicien, philosophe, épistémologue, homme politique et moraliste britannique 1872-1970) : "il n'existe pas d'ensemble ayant pour éléments tous les ensembles".

⊙ On peut définir des ensembles de deux manières différentes :

- Définition en **extension** : on se donne l'ensemble par la liste exhaustive de ses éléments mis entre accolades (il peut y avoir des pointillés s'ils ne sont pas ambigus).
- Définition en **compréhension** : on se donne, parmi les éléments d'un ensemble déjà défini, le nouvel ensemble par la propriété que doit vérifier un élément pour lui appartenir.

***EXEMPLE 0.7* :**
- $E = \{a, b, c\}$, $[\![1;9]\!] = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 9\}$, $\mathcal{P} = \{2, 3, \cdots, p_n, \cdots\}$ (nombres premiers).
- $F = \{x \in E \mid P(x)\}$, $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $[\![1;9]\!] = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 9\}$ et plus généralement $[\![a;b]\!] = \{n \in \mathbb{N} \mid a \leqslant n \leqslant b\}$, $\mathcal{P} = \{n \geqslant 1 \mid n$ n'a que deux diviseurs positifs $\}$.

**Définition 0.3**

- *Soit* $E$ *un ensemble et* $x$ *un de ses éléments : on écrira alors* $x \in E$ *et on dira que* $x$ **appartient** *à* $E$ *; la négation de cette assertion est* $x \notin E$.
- *Il existe un unique ensemble n'ayant aucun élément : on l'appelle* **ensemble vide** *et on le note* $\emptyset$.
- *Soit deux ensembles* $A$ *et* $B$, *on dit que* $A$ *est* **inclus** *dans* $B$, *ou que* $B$ *contient* $A$, *ou que* $A$ *est une* **partie** *de* $B$, *qu'on note* $A \subset B$ *ou* $B \supset A$, *si l'assertion* $\big((x \in A) \Longrightarrow (x \in B)\big)$ *est vraie ; sa négation est notée* $A \not\subset B$.
- *Ces deux ensembles* $A$ *et* $B$ *seront dits* **égaux**, *noté* $A = B$, *si on a simultanément* $A \subset B$ *et* $B \subset A$ *de sorte que :* $(x \in A) \Longleftrightarrow (x \in B)$.
- *Un ensemble ne contenant qu'un seul élément* $x$ *est appelé un* **singleton** *et noté* $\{x\}$ *bien sûr.*

***EXEMPLE 0.8* :**
- $3 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$, $\dfrac{3}{4} \notin \mathbb{N}$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\{4, 7\} \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{R}_+$, $\mathbb{C} \not\subset \mathbb{R}$.
- $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$ (quel que soit l'ensemble $E$); si $x \in E$ alors $\{x\} \subset E$.

## 0.3.2 : Procédés de construction

On se propose maintenant de construire de nouveaux ensembles à partir de ceux dont on dispose : l'existence de ce qui va suivre est axiomatique et relève de la théorie des ensembles.

**Définition 0.4**

*On se donne deux ensembles* $A$ *et* $B$ *alors on peut définir :*

- $A \cap B$ *: (*$A$ *inter* $B$*) l'* **intersection** *de* $A$ *et* $B$ *qui contient les éléments qui sont dans* $A$ *et dans* $B$.
- $A \cup B$ *: (*$A$ *union* $B$*)* **réunion** *de* $A$ *et* $B$ *qui contient les éléments qui sont dans* $A$ *ou dans* $B$.
- $A \Delta B$ *: (*$A$ *delta* $B$*)* **différence symétrique** *de* $A$ *et* $B$ *qui contient les éléments qui sont dans* $A$ *et pas dans* $B$ *ou qui sont dans* $B$ *et pas dans* $A$ *(c'est un ou exclusif).*
- *on dit que* $A$ *et* $B$ *sont* **disjoints** *si* $A \cap B = \emptyset$.
- $A \setminus B$ *:* $A$ **moins** $B$ *qui contient les éléments de* $A$ *qui ne sont pas dans* $B$ *:* $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.
- *Si* $A$ *contient* $B$ *seulement,* $C_A B$ *:* **complémentaire** *de* $B$ *dans* $A$ *qui contient les éléments de* $A$ *qui ne sont pas dans* $B$.
- $\mathcal{P}(A)$ *:* **ensemble des parties** *de* $A$ *:* $\mathcal{P}(A) = \{\, B \mid B \subset A \,\}$.

*REMARQUE 0.5 : Pourquoi a-t-on eu besoin de deux définitions pour le moins et le complémentaire alors qu'elles se ressemblent fortement ? La seule différence est l'inclusion de* $B$ *dans* $A$ *pour la seconde. En effet, si* $B \subset A$ *on a* $A \setminus B = \complement_A B$ *; mais si* $B \not\subset A$ *seul* $A \setminus B$ *a un sens et* $\complement_A B$ *n'est pas défini.*

$\odot$ S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble $A$ dans lequel se trouve $B$ (donc dans celui où l'on prend le complémentaire), on préférera écrire $B^c$ à la place de $\complement_A B$.

***EXEMPLE 0.9 :***

- $[0;2[\cap]1;2] = ]1;2[$, $[0;2[\cup]1;2] = [0;2]$, $\mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}^*$, $[\![a;b]\!] = [a;b] \cap \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{R}_-^* = \mathbb{N}$, $\complement_{\mathbb{Z}} \mathbb{N} = \mathbb{Z}_-^*$.
- $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$ (quel que soit l'ensemble $E$) ; $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.
- $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ et $\{4,7\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Si $A \in \mathcal{P}(E)$, $E \cap A = A \cap E = A$ et $\emptyset \cup A = A \cup \emptyset = A$ (on dit que $E$ et $\emptyset$ sont neutres pour $\cap$ et $\cup$ respectivement dans $\mathcal{P}(E)$).

### 0.3.3 : Propriétés

$\odot$ Afin de ne pas se répéter, nous pouvons développer une analogie entre logique et ensembles : soit $E$ un ensemble et $A$, $B$, $C$ des parties de $E$, associons-leur $\mathcal{A} = "x \in A"$ (à $B$ on associe $\mathcal{B} = "x \in B"$, etc...).

Grâce à ceci, les connecteurs logiques trouvent une interprétation en termes d'opérateurs sur les ensembles :

$$\begin{array}{ccc} A & \longleftrightarrow & \mathcal{A} \\ A^c & \longleftrightarrow & \mathrm{non}(\mathcal{A}) \\ A \subset B & \longleftrightarrow & \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} \\ A \cap B & \longleftrightarrow & \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B} \\ A \Delta B & \longleftrightarrow & \mathcal{A} \text{ ou exclusif } \mathcal{B} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B & \longleftrightarrow & \mathcal{B} \\ B^c & \longleftrightarrow & \mathrm{non}(\mathcal{B}) \\ A = B & \longleftrightarrow & \mathcal{A} \iff \mathcal{B} \\ A \cup B & \longleftrightarrow & \mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B} \end{array}$$

Les règles de logique (tautologies) vues précédemment nous permettent d'affirmer grâce à cette analogie :

**Proposition 0.5**

**Pour trois ensembles $A$, $B$ et $C$ contenus dans $E$ :**

| | | |
|---|---|---|
| $A \cap A^c = \emptyset$ | $\longleftrightarrow$ | **principe de non contradiction** |
| $A \cup A^c = E$ | $\longleftrightarrow$ | **principe du tiers exclu** |
| $A \cap A = A$ | $\longleftrightarrow$ | $(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{A}) \iff \mathcal{A}$ |
| $A \cup A = A$ | $\longleftrightarrow$ | $(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{A}) \iff \mathcal{A}$ |
| $(A^c)^c = A$ | $\longleftrightarrow$ | $\mathrm{non}(\mathrm{non}(\mathcal{A})) \iff \mathcal{A}$ |
| $(A \subset B) \iff (B^c \subset A^c)$ | $\longleftrightarrow$ | **contre-apposée** |
| $A \cap B = B \cap A$ | $\longleftrightarrow$ | **commutativité de "et"** |
| $A \cup B = B \cup A$ | $\longleftrightarrow$ | **commutativité de "ou"** |
| $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | $\longleftrightarrow$ | **associativité de "et"** |
| $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | $\longleftrightarrow$ | **associativité de "ou"** |
| $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ | $\longleftrightarrow$ | **distributivité de "ou" par rapport à "et"** |
| $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ | $\longleftrightarrow$ | **distributivité de "et" par rapport à "ou"** |
| $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ | $\longleftrightarrow$ | Loi de De Morgan |
| $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ | $\longleftrightarrow$ | Loi de De Morgan |

*REMARQUE 0.6 :*

- *L'associativité de la réunion et celle de l'intersection nous permettent d'éliminer les parenthèses : on notera par exemple* $A \cap B \cap C$ *à la place de* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- *On peut aussi noter la compatibilité de la réunion et de l'intersection avec l'inclusion, soit pour des ensembles* $A$, $B$, $C$, $D$ *:* $(A \subset B \text{ et } C \subset D) \Longrightarrow (A \cap C \subset B \cap D \text{ et } A \cup C \subset B \cup D)$. *On a de plus les équivalences simples suivantes, pour deux ensembles* $A$ *et* $B$ *:* $A \cap B = A \iff A \subset B$ *et* $A \cup B = A \iff B \subset A$.

### 0.3.4 : Partitions et produit cartésien

**Définition 0.5**

*Soit* $A$ *et* $B$ *deux ensembles, on appelle "***couple** *x,y" un assemblage formel* $(x, y)$ *pour lequel* $x \in A$ *et* $y \in B$ *et pour lequel l'égalité est définie par :*

$$(x, y) = (x', y') \iff (x = x' \text{ et } y = y').$$

*L'ensemble* $A \times B$ *de tous les couples ainsi construits est appelé le* **produit cartésien** *de* $A$ *et de* $B$.

*REMARQUE 0.7 :* • *Si* $A = B$ *on écrit plutôt* $A^2$ *à la place de* $A \times A$.

• *Le couple* $(x, y)$ *et l'ensemble* $\{x, y\}$ *n'ont rien à voir : si* $x \neq y$, $(x, y) \neq (y, x)$ *mais* $\{x, y\} = \{y, x\}$.

• *On peut généraliser le procédé à plusieurs ensembles et construire ainsi* $A_1 \times \cdots \times A_n$ *; là encore on note* $A^n$ *à la place de* $A_1 \times \cdots \times A_n$ *si* $A_1 = \cdots = A_n$.

***EXEMPLE 0.10 :*** $\{0, 1\} \times \{a, b, c\} = \{\, (0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c) \,\}$ ; $(\sqrt{11}, 6) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

**Définition 0.6**

*Soit* $E$ *un ensemble, on appelle* **partition** *de* $E$ *une partie* $\mathcal{A}$ *de* $\mathcal{P}(E)$ *telle que :*

- *pour tout* $x \in E$, *il existe* $A \in \mathcal{A}$ *tel que* $x \in A$.
- *pour tout* $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \emptyset$.
- *pour tout couple* $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, $A \cap B = \emptyset$ *si* $A \neq B$.

***EXEMPLE 0.11 :***

- On peut partitionner les jours de l'année par les jours de la semaine ($\mathcal{A}$ a 7 éléments), etc...
- On peut créer une partition des entiers naturels en les pairs et les impairs, etc...

## PARTIE 0.4 : QUANTIFICATEURS

### 0.4.1 : Définitions et négations

**Définition 0.7**

*On se donne un ensemble* $E$ *et* $P(x)$ *une assertion portant sur les éléments de l'ensemble* $E$, *on considère alors la partie* $F$ *de* $E$ *définie par* $F = \{x \in E \mid P(x) \text{ vraie }\}$.

- *on notera* $(\forall x \in E,\ P(x))$ *l'assertion* $F = E$ *: pour tout élément* $x$ *de* $E$, *on a* $P(x)$ *vraie (*$\forall$ *est appelé le* **quantificateur universel***).*
- *on notera* $(\exists x \in E,\ P(x))$ *l'assertion* $F \neq \emptyset$ *: il existe au moins un élément* $x$ *de* $E$ *tel que* $P(x)$ *soit vraie (*$\exists$ *est appelé le* **quantificateur existentiel***).*
- *on notera aussi* $(\exists! x \in E,\ P(x))$ *l'assertion* $F$ *est un singleton : il existe un unique élément* $x$ *de* $E$ *tel que* $P(x)$ *soit vraie.*

*REMARQUE 0.8 :* • *Si* $E$ *est un ensemble non vide, on a bien sûr :* $(\forall x \in E,\ P(x)) \Longrightarrow (\exists x \in E,\ P(x))$.

• *On doit se rendre compte que si* $A \subset B$ *alors* $(\forall x \in B,\ P(x)) \Longrightarrow (\forall x \in A,\ P(x))$ *(la réciproque étant fausse en général) et que* $(\exists x \in A,\ P(x)) \Longrightarrow (\exists x \in B,\ P(x))$ *(idem pour la réciproque).*

**Théorème 0.2**

**Avec ces notations, les négations des deux quantificateurs sont :**

- $\text{non}(\forall x \in E,\ P(x)) \iff (\exists x \in E,\ \text{non}(P(x)))$.
- $\text{non}(\exists x \in E,\ P(x)) \iff (\forall x \in E,\ \text{non}(P(x)))$.

**Méthode**

**Pour montrer $(\forall x \in E,\ P(x))$, on commence par : "Soit $x \in E$, $\cdots$, donc $P(x)$ vraie".**
**Pour montrer $(\exists x \in E,\ P(x))$, on exhibe un élément $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie.**
**Pour nier les quantificateurs, il faut inverser $\exists$ et $\forall$ et prendre la négation de la propriété.**

### 0.4.2 : Succession de quantificateurs

On se donne maintenant deux ensembles $E$ et $F$ non vides et une assertion $P(x, y)$ portant sur les couples $(x, y) \in E \times F$. On peut alors former les six assertions suivantes :

$P_1$ : "$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y)$" $\quad$ $P_2$ : "$\forall y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y)$"
$P_3$ : "$\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y)$" $\quad$ $P_4$ : "$\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y)$"
$P_5$ : "$\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y)$" $\quad$ $P_6$ : "$\exists y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y)$"

⊙ Dans ces assertions, par exemple, $P_1$ signifie $\forall x \in E,\ (\forall y \in F,\ P(x,y))$ et $P(x,y)$ vraie est sous-entendu.

**Proposition 0.6**

**On dispose des règles :** $P_1 \Longleftrightarrow P_2 \quad P_1 \Longrightarrow P_4 \quad P_4 \Longrightarrow P_3 \quad P_3 \Longrightarrow P_5 \quad P_5 \Longleftrightarrow P_6$.

*REMARQUE 0.9 :*
- *On retiendra qu'on a toujours le droit d'intervertir deux quantificateurs identiques.*
- *Dans $P_3$ le $y$ dépend de $x$ alors que celui de $P_4$ est commun à tous les $x$.*
- *La réciproque $P_3 \Longrightarrow P_4$ est fausse en général.*
- *Bien sûr on peut nier une succession de quantificateurs comme on le fait pour un seul, par exemple la négation de $P_3$ est $(\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ \mathrm{non}(P(x,y)))$.*

***EXEMPLE 0.12 :*** • L'assertion $(\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m$ divise $n)$ est vraie (c'est $P_3$) ainsi que $(\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m$ divise $n)$ (c'est $P_4$) exceptionnellement.
• Par contre $P_3 = (\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists y \in \mathbb{R}_+^*,\ 3y \leqslant x)$ est vraie et pas $P_4 = (\exists y \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 3y \leqslant x)$.

## PARTIE 0.5 : SOMMES ET PRODUITS

**Définition 0.8**

*Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note alors $\sum_{k=1}^{n} x_k$ et $\prod_{k=1}^{n} x_k$ la somme $\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + \cdots + x_n$ et le produit $\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 \times \cdots \times x_n$ de ces complexes.*

*REMARQUE 0.10 :*
- *On peut généraliser ces notations aux réunions et intersections d'ensembles, par exemple si $A_1, \cdots, A_n$ sont des parties d'un ensemble $E$ on peut définir $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ et $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ; etc...*
- *On peut aussi considérer des sommes et des produits qui portent sur des complexes indexés sur un ensemble fini et non plus uniquement sur un intervalle d'entiers de la forme $[\![1;n]\!]$.*
- *Bien sûr dans cette écriture, la variable $k$ est muette, elle peut donc être remplacée par n'importe quelle autre variable sans changer le résultat final : $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{\heartsuit=1}^{n} x_\heartsuit$.*

***EXEMPLE 0.13 :*** $\frac{1}{N} \sum_{e \in MPSI1} n_e$ est la moyenne de la classe à un devoir si $N$ est le nombre d'élèves de la classe et $n_e$ la note obtenue par l'élève $e$ au devoir ; de plus $\bigcup_{k=1}^{n} [k; k+1] = [1; n+1]$.

**Proposition 0.7**

**Si $I$ et $J$ sont des ensembles finis disjoints :** $\sum_{i\in I} x_i + \sum_{j\in J} x_j = \sum_{k\in I\cup J} x_k$

**Plus généralement, si $\{I_1, \cdots, I_n\}$ est une partition de $I$, alors on a :** $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k=1}^{n} \Big( \sum_{i_k\in I_k} x_{i_k} \Big)$**.**

*REMARQUE 0.11 : On peut effectuer des changements d'indices :* $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_{j+1} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{n-i}$.

**Proposition 0.8**

**Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont deux familles de complexes (par exemple), $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n = \text{card}(I)$, alors on a en particulier les formules :** $\prod_{i\in I}(x_iy_i) = \big(\prod_{i\in I} x_i\big) \times \big(\prod_{i\in I} y_i\big)$**,**

$\sum_{i\in I} \lambda = n\lambda$ ; $\prod_{i\in I} \lambda = \lambda^n$ ; $\prod_{i\in I}(\lambda x_i) = \lambda^n \prod_{i\in I} x_i$ ; $\sum_{i\in I}(\lambda x_i) = \lambda\Big(\sum_{i\in I} x_i\Big)$ ; $\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \Big(\sum_{i\in I} x_i\Big) + \Big(\sum_{i\in I} y_i\Big)$.

**Définition 0.9**

*Si $I$ et $J$ sont deux ensembles finis et $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille indexée sur $I\times J$ qui est aussi un ensemble fini, on peut définir* $\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{i\in I} \Big( \sum_{j\in J} x_{i,j} \Big) = \sum_{j\in J} \Big( \sum_{i\in I} x_{i,j} \Big)$.

*REMARQUE 0.12 : • Par exemple, avec ces notations,* $\Big(\sum_{i\in I} x_i\Big) \times \Big(\sum_{j\in J} y_j\Big) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_iy_j$.

• *Il y a des sommes doubles plus générales, par exemple pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $(x_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ de complexes :* $\sum_{i=1}^{n} \Big( \sum_{j=1}^{i} x_{i,j} \Big) = \sum_{\substack{(i,j)\in [\![1;n]\!]^2 \\ j\leqslant i}} x_{i,j} = \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \Big( \sum_{i=j}^{n} x_{i,j} \Big)$ *et on a par exemple la généralisation d'une identité remarquable :* $(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j\big)$.

***EXEMPLE 0.14 :*** On utilise cette technique pour le calcul, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j}$.

**Définition 0.10**

*Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0; n]\!]$, on note* $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

*REMARQUE 0.13 : On peut disposer ces coefficients binomiaux dans le fameux triangle de* PASCAL *(Blaise* PASCAL *: mathématicien, physicien, philosophe, moraliste, théologien français 1623-1662) si pratique pour écrire le binôme de* NEWTON *(Isaac* NEWTON *: mathématicien, physicien, astronome, philosophe et alchimiste anglais 1643-1727).*

**Théorème 0.3**

**Si $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et $r \in \mathbb{C}$ avec $r \neq 1$, alors on dispose des formules :**

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ **(binôme de NEWTON).**
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x^n - y^n = (x-y)\Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k\Big)$ **donc** $\frac{r^n - 1}{r-1} = \sum_{k=0}^{n-1} r^k$**.**
- $\forall n \in \mathbb{N},\ x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)\Big(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x^{2n-k} y^k\Big)$**.**