

# CHAPITRE 1

## GÉOMÉTRIE DU PLAN

### PARTIE 1.1 : MODES DE REPÉRAGE DANS LE PLAN

#### 1.1.1 : Le plan affine et vectoriel

⊙ La géométrie du plan est certainement la plus ancienne des disciplines des maths, elle a été étudiée (pour l'architecture, l'agriculture, l'astronomie,...) par les égyptiens (vers -3000), puis par les babyloniens, les sumériens et les chinois (qui connaissaient le théorème de PYTHAGORE longtemps avant les grecs) entre autres. Mais c'est vraiment avec l'école grecque qu'est venue une étude systématique de la géométrie par THALÈS DE MILET (THALÈS : philosophe et mathématicien grec -625- -547), PYTHAGORE (PYTHAGORE : philosophe et mathématicien grec -580- -497), EUCLIDE avec le début de sa formulation axiomatique.

Nous donc allons étudier ici la **géométrie euclidienne**, mais on a découvert depuis différentes géométries également intéressantes : la **géométrie hyperbolique** développée par GAUSS (Carl Friedrich GAUSS : mathématicien, physicien et astronome allemand 1777-1855), et retrouvée indépendamment par LOBATCHEVSKI (Nicolai Ivanovitch LOBATCHEVSKI : mathématicien russe 1792-1856) et BOLYAI (János BOLYAI : mathématicien hongrois 1802-1860) ; mais aussi la **géométrie elliptique** inventée par RIEMANN (Georg Friedrich Bernhard RIEMANN : mathématicien allemand 1826-1866).

On suppose ici connues les propriétés de base du plan  $\mathcal{P}$  ainsi que la notion de **distance** et d'**angle**.

$\mathcal{P}$  est un ensemble de **points** mais comme deux points définissent un **vecteur**, on a donc naturellement un ensemble de vecteurs aussi appelé plan mais qu'on note  $\mathcal{P}$  (la notion de **norme** est donc supposée acquise).

- ⊙ On dispose sur cet ensemble  $\mathcal{P}$  de vecteurs de deux lois :
- l'une consiste à prendre deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et à construire leur somme  $\vec{u} + \vec{v}$  (**loi interne**),
  - l'autre consiste à prendre un réel  $\lambda$  (appelé **scalaire**), un vecteur  $\vec{v}$  et à construire le vecteur  $\lambda \cdot \vec{v}$  (celle-ci est une **loi externe** car elle mélange les scalaires et les vecteurs).

⊙ On dispose entre les ensembles  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}$  d'une somme qui associe à un point  $A \in \mathcal{P}$  et un vecteur  $\vec{v} \in \mathcal{P}$  un point  $B = A + \vec{v}$  (translaté de vecteur  $\vec{v}$  à partir du point A). Cet unique vecteur  $\vec{v}$  est noté  $\overrightarrow{AB}$ .

**REMARQUE 1.1** : • L'ensemble des vecteurs du plan a une structure d'espace vectoriel !

- L'ensemble  $\mathcal{P}$  a une structure d'espace affine sur  $\mathcal{P}$  !
- Si  $\vec{v} \in \mathcal{P}$ , l'application  $t_{\vec{v}}$  qui va de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  et qui associe à tout point A le point  $B = A + \vec{v}$  (donc tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ ) est la **translation** de vecteur  $\vec{v}$ .
- L'ensemble  $\mathcal{T}$  des translations a une structure de **groupe** pour la composition !
- Si un point  $O \in \mathcal{P}$  est fixé, l'application qui va de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  et qui à  $\vec{v}$  associe le point  $O + \vec{v}$  est une **bijection** ce qui permet d'identifier les points et les vecteurs si on fixe une origine  $O$  dans  $\mathcal{P}$ .

#### Définition 1.1

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\mathcal{P}$  sont **colinéaires** si  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} = \lambda \vec{u}$  ou  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ .

- ⊙ On fera attention au fait que " $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires" n'est pas équivalent à  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} = \lambda \vec{u}$ .

### 1.1.2 : Repères cartésiens

⊙ Voyons maintenant une manière pratique de situer des points dans le plan : celle-ci est due à DESCARTES (René DESCARTES : philosophe, mathématicien et physicien français 1596-1650).

#### Définition 1.2

Un **repère cartésien** de  $\mathcal{P}$  est la donnée d'un triplet  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  où  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires donc forment une **base** de  $\mathcal{P}$  ;  $O$  est appelé l'**origine** du repère.

Les deux droites passant par  $O$  et de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont appelées **axes du repère** et notées respectivement  $(Ox)$  et  $(Oy)$ .

**REMARQUE 1.2** : On construit géométriquement (par les **projections**), pour  $M \in \mathcal{P}$ , deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $\vec{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ . Le couple  $(x, y)$  est unique grâce à la non colinéarité des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

#### Définition 1.3

Pour un point  $M$  de  $\mathcal{P}$  et un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ , l'unique couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\vec{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$  est appelé **coordonnées** de  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}$ . On note  $M(x, y)_{\mathcal{R}}$ .

Pour un vecteur  $\vec{a}$  de  $\mathcal{P}$ , l'unique couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v}$  est appelé **coordonnées** de  $\vec{a}$  dans la base  $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ . On note  $\vec{a}(x, y)_{\mathcal{B}}$ .

⊙ On peut être plus précis sur les bases (de  $\mathcal{P}$ ) ou les repères (de  $\mathcal{P}$ ) et définir des bases ou des repères **orthogonaux** ou **orthonormaux**.

#### Proposition 1.1

Si les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  ont pour coordonnées  $(x, y)$  et  $(x', y')$  respectivement dans la base  $(\vec{u}, \vec{v})$ , alors on a les coordonnées  $\vec{a} + \vec{b} = (x + x', y + y')$  et  $\lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y)$ .

**REMARQUE 1.3** : Au niveau des points, si  $A(x_A, y_A)_{\mathcal{R}}$  et  $B(x_B, y_B)_{\mathcal{R}}$  alors  $\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)_{\mathcal{B}}$ . De même, si  $O(x_0, y_0)_{\mathcal{R}}$  et  $\vec{u}(x, y)_{\mathcal{B}}$  alors on a les coordonnées du point  $O + \vec{u}(x_0 + x, y_0 + y)_{\mathcal{R}}$ .

⊙ On peut par exemple utiliser le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$  pour parler d'un triangle ABC non plat.

#### Proposition 1.2

On se donne deux repères  $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$  et  $\mathcal{R}' = (O', \vec{u}', \vec{v}')$  tels que  $O' = (a, b)_{\mathcal{R}}$ ,  $\vec{u}' = (\alpha, \beta)_{\mathcal{B}}$  et  $\vec{v}' = (\gamma, \delta)_{\mathcal{B}}$  où  $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ .

Alors si un point  $M$  du plan  $\mathcal{P}$  a pour coordonnées  $M(x, y)_{\mathcal{R}}$  et  $M(x', y')_{\mathcal{R}'}$ , on a :

$$\begin{aligned} x &= a + \alpha x' + \gamma y' \\ y &= b + \beta x' + \delta y' \end{aligned}$$

⊙ On passe d'un repère orthonormal à un autre en effectuant un **déplacement** (translation, rotation) ou un **anti-déplacement** (composée d'une réflexion - symétrie orthogonale par rapport à une droite - et d'un déplacement). On dit alors que deux repères (ou deux bases) ont même **orientation** si c'est un déplacement.

Orienter le plan : c'est choisir une base orthonormale de référence ; les bases **directes** seront alors celles qui ont même orientation que celle-ci, les autres seront appelées **indirectes**.

Traditionnellement en maths, on choisit comme sens direct le sens trigonométrique ; le sens des aiguilles d'une montre est alors indirect.

**1.1.3 : Repères polaires**

**Définition 1.4**

Si on se donne un repère orthonormal direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$  et un angle  $\theta \in \mathbb{R}$ . On définit alors les deux vecteurs  $\vec{u}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)_B$  et  $\vec{v}_\theta = \vec{u}_{\theta + \frac{\pi}{2}} = (-\sin \theta, \cos \theta)_B$  où  $B = (\vec{u}, \vec{v})$ .

Le repère  $\mathcal{R}_\theta = (O, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$  est appelé **repère polaire** associé à  $\theta$  : il est aussi orthonormal direct et est l'image de  $\mathcal{R}$  par la rotation d'angle  $\theta$  de centre  $O$ .

Pour  $M \in \mathcal{P}$ , on dit que  $M$  admet  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$  pour **coordonnées polaires** dans le repère  $\mathcal{R}$  si  $\vec{OM} = r\vec{u}_\theta$ .

**REMARQUE 1.4** : Un point  $M$  du plan admet une infinité de coordonnées polaires !

**EXEMPLE 1.1** : En considérant les repères  $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_a, \mathcal{R}_{a+b}$  pour deux réels  $a$  et  $b$ , on trouve les formules classiques :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \text{et} \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) & . \end{cases}$$

**1.1.4 : Barycentres**

**Proposition 1.3**

On se donne, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , des points  $A_1, \dots, A_n$  et des réels  $(a_1, \dots, a_n)$  ; si la somme  $s = \sum_{k=1}^n a_k$  est non nulle, il existe un seul point  $G \in \mathcal{P}$  tel que :  $\sum_{k=1}^n a_k \vec{GA}_k = \vec{0}$ .

**DÉMONSTRATION** : On définit l'application  $\varphi$  qui va de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  et qui à un point  $M$  associe le vecteur  $\varphi(M) = \sum_{k=1}^n a_k \vec{MA}_k$ . Alors, pour  $O \in \mathcal{P}$ , on a  $\varphi(M) = s\vec{MO} + \varphi(O)$ , etc...

**Définition 1.5**

Avec ces notations, on appelle cet unique point le **barycentre** des points  $A_1, \dots, A_n$  affectés des coefficients  $a_1, \dots, a_n$  et on le note  $G = \sum_{k=1}^n a_k A_k$  (ce qui est un abus de notation).

Si  $a_1 = \dots = a_n$ , ce barycentre est appelé **isobarycentre** ou **centre de gravité**.

**Proposition 1.4**

Avec ces notations, on a l'équivalence entre :

- $G$  est le barycentre des points  $A_1, \dots, A_n$  affectés des coefficients  $a_1, \dots, a_n$ .
- $\forall M \in \mathcal{P}, \sum_{k=1}^n a_k \vec{MA}_k = s\vec{MG}$ .

**REMARQUE 1.5** : Il y a "commutativité, associativité et homogénéité" du barycentre.

- Cela signifie que si on considère les points dans un autre ordre ça ne change pas le barycentre.
- Pour l'associativité, on peut donner un exemple assez simple : si  $G$  est le barycentre de  $(A, a), (B, b), (C, c)$  et  $(D, d)$  (donc  $a + b + c + d \neq 0$ ), si  $H$  est le barycentre de  $(A, a)$  et  $(B, b)$  (donc  $a + b \neq 0$ ) et si  $K$  est le barycentre de  $(C, c)$  et  $(D, d)$  ( $c + d \neq 0$ ) alors  $G$  est le barycentre de  $(H, a + b)$  et  $(K, c + d)$ .
- On ne change pas le barycentre si on multiplie tous les coefficients par une même constante non nulle.

**Proposition 1.5**

Avec ces notations, si  $A_1, \dots, A_n$  ont pour coordonnées respectives  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  dans  $\mathcal{R}$ ,

alors  $G \left( \frac{\sum_{k=1}^n a_k x_k}{\sum_{k=1}^n a_k}, \frac{\sum_{k=1}^n a_k y_k}{\sum_{k=1}^n a_k} \right)_{\mathcal{R}}$  (coordonnées du barycentre = barycentres des coordonnées).

## PARTIE 1.2 : PRODUIT SCALAIRE ET DÉTERMINANT

### 1.2.1 : Définition et interprétation du produit scalaire

#### Définition 1.6

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  de  $\mathcal{P}$ , on définit alors le **produit scalaire** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $(\vec{u}|\vec{v})$  ou  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  si l'un des deux vecteurs est nul.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$  sinon (où  $\theta$  est l'angle orienté entre les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ).

⊙ Pour la proposition suivante, on dit que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires de même sens s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\vec{v} = \lambda \vec{u}$  ou  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$  ; et bien sûr de sens contraire si  $\lambda \in \mathbb{R}_-$ .

#### Proposition 1.6

Si  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{P}^2$  alors :

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$       •  $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires de même sens  $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ .
- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires de sens contraire  $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ .

#### Proposition 1.7

On se donne 3 points A, B et C de  $\mathcal{P}$  tels que A et B sont distincts et on note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) ; alors  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$ .

DÉMONSTRATION : Il suffit de distinguer selon que l'angle  $\theta$  est aigu ou obtus.

#### Proposition 1.8

Soit une base orthonormale directe  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ , on se donne deux vecteurs  $\vec{u}(x, y)_{\mathcal{B}}$  et  $\vec{v}(x', y')_{\mathcal{B}}$ , alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ .

DÉMONSTRATION : On passe par les coordonnées polaires (avec rayon strictement positif) de ces deux vecteurs (dans le cas où aucun de ces deux vecteurs n'est nul bien sûr) en utilisant une formule de trigonométrie.

### 1.2.2 : Propriétés du produit scalaire

#### Théorème 1.1

Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $\mathcal{P}$  :

- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{P}^2, \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$  (forme).
- $\forall \vec{u} \in \mathcal{P}, \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$  (positive).
- $\forall \vec{u} \in \mathcal{P}, \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$  (définie).
- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{P}^2, \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  (symétrique).
- $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{P}^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{w} + \mu \vec{v} \cdot \vec{w}$  (linéaire en la variable 1) et  $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} + \mu \vec{u} \cdot \vec{w}$  (linéaire en la variable 2 donc au total bilinéaire).

DÉMONSTRATION : Il suffit de calculer dans une base orthonormale directe.

REMARQUE 1.6 : La linéarité en la seconde variable découle de la linéarité par rapport à la première et de la symétrie : cet axiome est redondant.

#### Proposition 1.9

On dispose des quatre formules suivantes, pour  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{P}^2$  :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$       •  $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ .
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$  (identité du parallélogramme).
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$  (identité de polarisation).

**REMARQUE 1.7 :** Même si on a supposé connues les propriétés de la norme dans  $\mathcal{P}$ , on peut revenir sur quelques inégalités classiques dont celle due à CAUCHY (Augustin Louis CAUCHY : mathématicien français 1789-1857) et SCHWARZ (Hermann Amandus SCHWARZ : mathématicien allemand 1843-1921).

**Proposition 1.10**

Quels que soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan  $\mathcal{P}$ , on a :

- $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$  (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ) avec égalité si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  (inégalité triangulaire) avec égalité si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires de même sens.
- $|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$  (seconde inégalité triangulaire) avec égalité si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires de même sens.

**DÉMONSTRATION :** Grâce à la relation  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$  et à l'inégalité évidente  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$  on retrouve la classique inégalité triangulaire.

**REMARQUE 1.8 :** La norme a toutes les propriétés d'une norme (ce qui est rassurant) ; elle vérifie bien :

- $\forall \vec{u} \in \mathcal{P}, \|\vec{u}\| \in \mathbb{R}_+$ .
- $\forall \vec{u} \in \mathcal{P}, \|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ .
- $\forall (\lambda, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}, \|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$ .
- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{P}^2, \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .

**Proposition 1.11**

Soit  $\vec{u}(x, y)_\mathcal{B}$  et  $\vec{v}(x', y')_\mathcal{B}$  avec  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  une base orthonormale :

- $x = \vec{u} \cdot \vec{i}$  et  $y = \vec{u} \cdot \vec{j}$ ,  $x' = \vec{v} \cdot \vec{i}$  et  $y' = \vec{v} \cdot \vec{j}$ .
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ ,  $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$  et  $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$ .

**DÉMONSTRATION :** Exploiter la bilinéarité du produit scalaire et la définition d'une base orthonormale.

**Proposition 1.12**

Soit un point  $A \in \mathcal{P}$  et un vecteur  $\vec{u} \in \mathcal{P}$  non nul ; on note  $\mathcal{D}$  la droite passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ . Alors, pour tout point  $M \in \mathcal{P}$ , si on note  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ , on a :  $\overrightarrow{AH} = \left( \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \right) \vec{u}$ .

**REMARQUE 1.9 :** Avec les mêmes notations, soit  $E_k = \{ M \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k \}$ , alors la proposition précédente montre que c'est l'ensemble des points dont le projeté orthogonal sur la droite  $\mathcal{D}$  est  $H_k$  tel que  $\overrightarrow{AH_k} = \frac{k}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$ . Ainsi  $E_k$  est la droite passant par  $H_k$  qui est orthogonale à  $\mathcal{D}$ .

**1.2.3 : Définition et interprétation du déterminant**

**Définition 1.7**

On se donne deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\mathcal{P}$ , on définit alors le **déterminant** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v})$  par :

- $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  si l'un des deux vecteurs est nul.
- $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$  sinon (où  $\theta$  est l'angle orienté entre les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ).

On a de nouveau une caractérisation des vecteurs colinéaires ou des vecteurs orthogonaux.

**Proposition 1.13**

Si  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{P}^2$  alors :

- $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \pm \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ .
- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires  $\iff \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ .
- $(\vec{u}, \vec{v})$  est une base de  $\mathcal{P} \iff \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ .

**REMARQUE 1.10** : Si  $\mathcal{B} = (\vec{v}, \vec{\gamma})$  est une base orthonormale alors elle est directe si et seulement si  $\text{Det}(\vec{v}, \vec{\gamma}) = 1$  et elle est indirecte si et seulement si  $\text{Det}(\vec{v}, \vec{\gamma}) = -1$ .

**Proposition 1.14**

Si  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{P}^2$  et  $(A, B, C) \in \mathcal{P}^3$  tels que  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$ , alors  $|\text{Det}(\vec{u}, \vec{v})|$  est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Si on suppose de plus que A et B sont distincts, alors la distance de C à la droite (AB) est donnée par la formule  $d(C, (AB)) = \frac{|\text{Det}(\vec{AB}, \vec{AC})|}{\|\vec{AB}\|}$ .

**DÉMONSTRATION** : Si les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, cela donne  $0 = 0$ . Sinon, on note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et on a  $\|\vec{CH}\| = \|\vec{AC}\| \sin \theta$  où  $\theta$  est l'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$ . Par conséquent, l'aire de ce parallélogramme est  $AB \times CH = \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \sin \theta = |\text{Det}(\vec{u}, \vec{v})|$ .

**Proposition 1.15**

Si  $\mathcal{B} = (\vec{v}, \vec{\gamma})$  est une **base** et si  $\vec{u}(x, y)_{\mathcal{B}} \in \mathcal{P}$  et  $\vec{v}(x', y')_{\mathcal{B}} \in \mathcal{P}$  alors  $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$ .

**REMARQUE 1.11** : On note habituellement,  $(x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$ ,  $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$ .

**1.2.4 : Propriétés du déterminant****Théorème 1.2**

Det est une forme bilinéaire antisymétrique alternée, c'est-à-dire :

- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{P}^2$ ,  $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}$  (forme).
- $\forall \vec{u} \in \mathcal{P}$ ,  $\text{Det}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$  (alternée).
- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{P}^2$ ,  $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = -\text{Det}(\vec{v}, \vec{u})$  (antisymétrique).
- $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{P}^3$ ,  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\text{Det}(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \vec{w}) = \lambda \text{Det}(\vec{u}, \vec{w}) + \mu \text{Det}(\vec{v}, \vec{w})$  (linéaire en la première variable) et  $\text{Det}(\vec{u}, \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) + \mu \text{Det}(\vec{u}, \vec{w})$  (en la seconde).

**Définition 1.8**

(HP) Soit  $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$  une base quelconque de  $\mathcal{P}$ ,  $u(x, y)_{\mathcal{B}}$  et  $v(x', y')_{\mathcal{B}}$  dans  $\mathcal{P}$ . On définit alors le **déterminant de  $(\vec{u}, \vec{v})$  dans la base  $\mathcal{B}$**  par :  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$ .

**REMARQUE 1.12** : Ce qui suit est hors programme (HP) mais c'est néanmoins très utile et important :

- Soit  $\mathcal{B}_0 = (\vec{v}, \vec{\gamma})$  une base orthonormale directe et on reprend les notations de la définition précédente : on sait d'après la proposition 1.16 que  $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \det_{\mathcal{B}_0}(\vec{u}, \vec{v})$ .
- Par bilinéarité, alternance et antisymétrie du déterminant :  
 $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Det}(x\vec{a} + y\vec{b}, x'\vec{a} + y'\vec{b}) = (xy' - x'y)\text{Det}(\vec{a}, \vec{b}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})\text{Det}(\vec{a}, \vec{b})$ .
- Or  $\text{Det}(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$  car  $(\vec{a}, \vec{b})$  est une base de  $\mathcal{P}$ , ainsi  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  :

**Proposition 1.16**

(HP) Soit  $\mathcal{B}$  une base et  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{P}^2$  :  $\begin{cases} \bullet & \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} & \iff & \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0, \\ \bullet & (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est une base de } \mathcal{P} & \iff & \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0. \end{cases}$

## PARTIE 1.3 : DROITES ET CERCLES

### 1.3.1 : Équations paramétrique, cartésienne et polaire d'une droite

**REMARQUE 1.13** : On définit une droite par un point et un vecteur directeur (non nul donc), deux points distincts ou enfin un point et un vecteur normal.

On a 2 types de représentation des droites : paramétrique ou cartésienne.

#### Proposition 1.17

Soit  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère quelconque de  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  la base correspondante et  $\mathcal{D}$  la droite passant par  $A(x_0, y_0)_{\mathcal{R}}$  et de vecteur directeur  $\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2)_{\mathcal{B}}$ .

Alors  $M(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{D} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha_1 \\ y = y_0 + \lambda\alpha_2 \end{cases}$  (une représentation paramétrique de  $\mathcal{D}$ ).

**EXEMPLE 1.2** : Une équation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$  passant par le point  $A(1, 2)_{\mathcal{R}}$  (dans  $\mathcal{R}$  quelconque) et de vecteur directeur  $\vec{u}(1, 1)_{\mathcal{B}}$  est  $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$  mais aussi  $\begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \end{cases}$  (avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) car elle passe par le point  $B(3, 4)_{\mathcal{R}}$  et admet pour vecteur directeur le vecteur  $3\vec{u}(3, 3)_{\mathcal{B}}$ .

#### Proposition 1.18

Avec les mêmes notations,  $M(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{D} \iff \alpha_2x - \alpha_1y - \alpha_2x_0 + \alpha_1y_0 = 0$  (une équation cartésienne de  $\mathcal{D}$ ).

**DÉMONSTRATION** : Cette fois-ci on utilise le déterminant dans la base  $\mathcal{B}$  en remarquant que, d'après la proposition 1.16 :  $M(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{D} \iff \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM}, \vec{\alpha}) = 0$ , ainsi :  $M \in \mathcal{D} \iff \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha_1 \\ y - y_0 & \alpha_2 \end{vmatrix} = 0$ .

**EXEMPLE 1.3** : Soit  $A_1(x_1, y_1)_{\mathcal{R}}$  et  $A_2(x_2, y_2)_{\mathcal{R}}$  deux points distincts du plan, alors la droite  $(A_1A_2)$  a pour équation cartésienne :  $(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - x_1y_2 + x_2y_1 = 0$ .

#### Proposition 1.19

Soit  $(a, b) \neq (0, 0)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère quelconque de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  la base correspondante, l'ensemble  $\mathcal{D}$  des points  $M(x, y)_{\mathcal{R}}$  tels que  $ax + by + c = 0$  est une droite de vecteur directeur  $\vec{u}(-b, a)_{\mathcal{B}}$ .

**DÉMONSTRATION** : Comme  $(a, b) \neq (0, 0)$ , on peut supposer par exemple que  $b \neq 0$ , alors le point  $A\left(0, -\frac{c}{b}\right) \in \mathcal{D}$ . Alors, pour  $M(x, y)_{\mathcal{R}}$ , on a :  $M \in \mathcal{D} \iff a(x - 0) - (-b)\left(y - \left(-\frac{c}{b}\right)\right) = 0$ .

#### Proposition 1.20

Soit  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère quelconque de  $\mathcal{P}$  et deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  d'équations cartésiennes respectives (dans  $\mathcal{R}$ )  $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ ,  $\mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0$ .

- $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \iff \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0$ .
- $\mathcal{D} = \mathcal{D}' \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' = \lambda c)$ .

**REMARQUE 1.14** : On peut utiliser cette caractérisation pour la résolution des systèmes linéaires à deux équations et deux inconnues ; soit  $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$  et (S)  $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ , alors :

- (S) possède une unique solution  $(x, y)$  si et seulement si  $ad - bc \neq 0$  et cette solution est (on le vérifie aisément) donnée par :  $x = \frac{ed - bf}{ad - bc}$ ,  $y = \frac{af - ec}{ad - bc}$ .
- (S) possède une infinité de solutions ou aucune si  $ad - bc = 0$ .

⊙ On voudrait maintenant utiliser le produit scalaire pour obtenir des équations, il faut donc dans la suite se placer dans un repère orthonormé  $\mathcal{R}$ .

#### Proposition 1.21

Soit  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé de  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  la base orthonormale correspondante et  $\mathcal{D}$  la droite passant par  $A(x_0, y_0)_{\mathcal{R}}$  et de vecteur normal  $\vec{n}(a, b)_{\mathcal{B}}$ . Alors  $\mathcal{D}$  a pour équation cartésienne :  $\mathcal{D} : ax + by - ax_0 - by_0 = 0$ .

#### Proposition 1.22

Avec les mêmes notations, si  $(a, b) \neq (0, 0)$ , l'ensemble  $\mathcal{D}$  des points tels que  $ax + by + c = 0$  est une droite de vecteur normal  $\vec{n} = (a, b)_{\mathcal{B}}$ .

#### Méthode

Pour trouver une équation cartésienne d'une droite  $\mathcal{D}$  on se sert :

- du déterminant si on connaît deux points de  $\mathcal{D}$ .
- du déterminant si on connaît un point et un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .
- du produit scalaire si on connaît un point de  $\mathcal{D}$  et un vecteur normal à  $\mathcal{D}$  ( $\mathcal{R}$  ron).

*REMARQUE 1.15* : Soit  $\mathcal{D}$  une droite passant par l'origine d'un repère  $\mathcal{R}$  orthonormé direct et de vecteur directeur  $\vec{u}(\cos \alpha, \sin \alpha)_{\mathcal{B}}$  alors  $\mathcal{D}$  admet pour équation polaire  $\theta \equiv \alpha \pmod{\pi}$  (à part O).

#### Proposition 1.23

Soit  $\mathcal{D}$  une droite ne passant pas par l'origine O d'un repère  $\mathcal{R}$  orthonormé direct, si on note H le projeté de O sur  $\mathcal{D}$ ,  $R > 0$  la distance OH et qu'on pose  $\alpha$  tel que  $\vec{OH} = R\vec{u}_{\alpha}$  alors l'équation polaire de  $\mathcal{D}$  est :  $r = \frac{R}{\cos(\theta - \alpha)}$ .

*DÉMONSTRATION* : Il suffit de faire un schéma et de se servir de la définition d'un cosinus ou alors d'écrire que  $M \in \mathcal{D} \iff \vec{OM} \cdot \vec{u}_{\alpha} = \vec{OH} \cdot \vec{u}_{\alpha}$  d'après la remarque 1.8.

### 1.3.2 : Différents résultats sur les droites

*REMARQUE 1.16* : Si une droite  $\mathcal{D}$  a pour équation  $ax + by + c = 0$  dans un repère  $\mathcal{R}$  orthonormé alors on peut diviser par  $\pm\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$  pour avoir une équation de  $\mathcal{D}$  de la forme  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$  (c'est une **équation normale** de droite). Il y a exactement deux équations de ce type pour une même droite  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$  et  $x \cos(\alpha + \pi) + y \sin(\alpha + \pi) = -p$ .

Ceci nous ramène à des équations polaires de cette droite :  $r \cos(\theta - \alpha) = p$  où  $r \cos(\theta - \alpha - \pi) = -p$ . Ici, contrairement à ce qui précède, on n'a pas imposé  $p > 0$ .

#### Proposition 1.24

Si une droite  $\mathcal{D}$  a pour équation  $ax + by + c = 0$  dans un repère  $\mathcal{R}$  orthonormé et si  $M_0(x_0, y_0)_{\mathcal{R}}$  alors on a la formule :  $d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

*DÉMONSTRATION* : On sait que  $d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|\text{Det}(\vec{AM}_0, \vec{u})|}{\|\vec{u}\|}$  où  $A \in \mathcal{D}$ ,  $\vec{u}$  vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ . On peut prendre, par exemple si  $a \neq 0$ ,  $A(-\frac{c}{a}, 0)_{\mathcal{R}}$ ,  $\vec{u}(-b, a)_{\mathcal{B}}$ , etc...

#### Définition 1.9

Soit deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$ , on définit l'angle orienté  $\theta$  entre les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  par  $\theta \in [0; \pi[$  et  $\theta = (\vec{u}, \vec{u}')$  ou  $\theta = (\vec{u}, -\vec{u}')$ .



**Définition 1.10**

(HP) Soit  $\mathcal{R}$  un repère quelconque et  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites d'équations respectives  $e = ax + by + c = 0$  et  $e' = a'x + b'y + c' = 0$ . On appelle **faisceau de droites engendré par  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$** , noté  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}$ , l'ensemble des droites du plan qui ont pour équation  $e + \lambda e' = 0$  pour un certain réel  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 1.25**

Ceci est hors programme (HP) mais encore une fois bien pratique :

- Si  $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$  on a  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'} = \{\mathcal{D}\}$ .
- Si  $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$  mais  $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$  alors  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}$  est l'ensemble des droites parallèles à  $\mathcal{D}$  à part  $\mathcal{D}'$ .
- Si  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont sécantes en  $I$ ,  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}$  est l'ensemble des droites contenant  $I$  à part  $\mathcal{D}'$ .

**EXEMPLE 1.4** : Soit dans un repère  $\mathcal{R}$  quelconque les droites  $\mathcal{D} : x + 2y - 2 = 0$  et  $\mathcal{D}' : 3x - y = 0$ . L'équation de la droite  $\Delta$  contenant  $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$  et le point  $A(1, 2)$  est  $x + 2y - 2 + \lambda(3x - y) = 0$  avec  $1 + 4 - 2 + (3 - 2)\lambda = 0 \iff \lambda = -3$ . Ainsi la droite  $\Delta$  a pour équation  $-8x + 5y - 2 = 0$ .

**1.3.3 : Équations paramétrique, cartésienne et polaire (s'il passe par O) d'un cercle****Définition 1.11**

Soit un point  $\Omega \in \mathcal{P}$  et un réel  $R \in \mathbb{R}_+^*$ , on appelle **cercle de centre  $\Omega$  de rayon  $R$**  l'ensemble des points  $M \in \mathcal{P}$  tels que  $\Omega M = R$ .

**Proposition 1.26**

Si  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé et  $\Omega(a, b)_{\mathcal{R}}$  et  $R > 0$ , le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  a pour équation cartésienne (dans  $\mathcal{R}$ ) :  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$ .

**Proposition 1.27**

Avec ces notations, réciproquement soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points de  $\mathcal{P}$  tels que  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ , alors on a 3 cas en notant  $p = a^2 + b^2 - c$  et  $\Omega(-a, -b)_{\mathcal{R}}$  :

- $\mathcal{C} = \emptyset$  si  $p < 0$ .
- $\mathcal{C} = \{\Omega\}$  si  $p = 0$ .
- $\mathcal{C}$  est le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R = \sqrt{p}$  si  $p > 0$ .

**Proposition 1.28**

Soit  $(A, B) \in \mathcal{P}^2$  deux points distincts, alors pour un point  $M \in \mathcal{P}$  :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff M \in \mathcal{C} \text{ où } \mathcal{C} \text{ est le cercle de diamètre } [AB].$$

**REMARQUE 1.17** :

- On peut, toujours dans un repère orthonormé, représenter les points du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega(a, b)_{\mathcal{R}}$  de rayon  $R > 0$  :  $M \in \mathcal{C} \iff (\exists \theta \in \mathbb{R}, x = a + R \cos \theta, y = b + R \sin \theta)$ .
- On a une autre représentation de ce cercle privé du point  $W$  (à l'ouest) de  $\mathcal{C}$  :

$$M \in \mathcal{C} \setminus \{W\} \iff \left( \exists t \in \mathbb{R}, x = a + R \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = b + R \cdot \frac{2t}{1+t^2} \right).$$

**Proposition 1.29**

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle contenant  $O$  de rayon  $R > 0$ , alors une équation polaire de  $\mathcal{C}$  dans un repère orthonormé direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  est  $r = 2R \cos(\theta - \alpha)$  si le centre de  $\mathcal{C}$  est  $\Omega(R \cos \alpha, R \sin \alpha)_{\mathcal{R}}$ .

**DÉMONSTRATION** : On passe par l'équation cartésienne :  $(x - R \cos \alpha)^2 + (y - R \sin \alpha)^2 = R^2$  et on utilise  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ . On peut aussi faire un dessin.

### 1.3.4 : Différents résultats sur les cercles

⊙ On peut "sentir" la proposition suivante ou la démontrer en passant par les équations de ces cercles dans un repère orthonormé :

#### Proposition 1.30

Soit  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  les deux cercles de centres respectifs  $\Omega$  et  $\Omega'$  et de rayons respectifs  $R$  et  $R'$  alors on a les 7 cas suivants pour l'intersection  $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$  :

- $\Omega\Omega' < R' - R$  ( $\mathcal{C}$  est strictement intérieur à  $\mathcal{C}'$ ).
- $\Omega\Omega' < R - R'$  ( $\mathcal{C}'$  est strictement intérieur à  $\mathcal{C}$ ).
- $\Omega\Omega' = R' - R$  ( $\mathcal{C}$  est tangent intérieurement à  $\mathcal{C}'$ ).
- $\Omega\Omega' = R - R'$  ( $\mathcal{C}'$  est tangent intérieurement à  $\mathcal{C}$ ).
- $|R' - R| < \Omega\Omega' < R + R'$  ( $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont sécants en deux points distincts).
- $\Omega\Omega' = R' + R$  ( $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont tangents extérieurement).
- $\Omega\Omega' > R + R'$  ( $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont strictement extérieurs l'un à l'autre).

**EXEMPLE 1.5** : On détermine la position relative des deux cercles d'équations cartésiennes  $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$  et  $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 10x - 10y + 41 = 0$  dans un repère orthonormé.

⊙ On dispose aussi en matière d'intersection de :

#### Proposition 1.31

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  et  $\mathcal{D}$  une droite du plan, alors on a les 3 cas suivants pour l'intersection  $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$  :

- $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$  ( $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  ne sont pas sécants).
- $d(\Omega, \mathcal{D}) = R$  ( $\mathcal{D}$  est tangente au cercle  $\mathcal{C}$ ).
- $d(\Omega, \mathcal{D}) < R$  ( $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  se rencontrent en 2 points distincts).

#### Proposition 1.32

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle d'équation  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$  dans un repère  $\mathcal{R}$  orthonormé, alors la tangente  $T_{M_0}$  en un point  $M_0(x_0, y_0)$  de ce cercle est d'équation cartésienne (dans  $\mathcal{R}$ ) :

$$T_{M_0} : xx_0 + yy_0 + a(x + x_0) + b(y + y_0) + c = 0.$$

**DÉMONSTRATION** : On exprime que cette tangente est la droite passant par  $M_0$  et de vecteur normal  $\overrightarrow{\Omega M_0}$  où  $\Omega(-a, -b)_{\mathcal{R}}$  est le centre de  $\mathcal{C}$ .

**REMARQUE 1.18** : On constate que cette équation de droite a été obtenue par **dédoublé** par rapport à celle du cercle : c'est-à-dire que  $x^2 = xx$  et devenu  $xx_0$ ,  $y^2 = yy$  est devenu  $yy_0$ ,  $2x = x + x$  s'est transformé en  $x + x_0$  et  $2y = y + y$  a été changé en  $y + y_0$ .

**REMARQUE 1.19** : Si  $A$  et  $B$  sont deux points distincts du plan :

- l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\frac{MA}{MB} = k$  ( $k \in \mathbb{R}_+$ ) est la médiatrice de  $[AB]$  si  $k = 1$ ,  $\{A\}$  si  $k = 0$  et sinon un cercle dont le centre est sur la droite  $(AB)$  (ces cercles font partie d'un faisceau de cercles à points limites).
- l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta$  modulo  $\pi$  ( $\theta \in [0, \pi[$ ) est la droite  $(AB)$  si  $\theta = 0$  et sinon un cercle dont le centre est sur la médiatrice de  $[AB]$  (ces cercles font partie d'un faisceau de cercles à points de base).