# CHAPITRE 2 FONCTIONS USUELLES

⊙ Le terme de fonction a été introduit à la fin du XVII siècle par Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz : philosophe, mathématicien et homme de loi allemand 1646-1716) même si elle avait été étudié bien avant. Cette notion a évolué au cours du temps avec les apports de Newton, de Bernoulli (Jean Bernoulli : mathématicien et physicien suisse 1667-1748) et Euler.

La **continuité** aussi a beaucoup changé entre la définition intuitive d'Euler et le formalisme plus rigoureux que nous utilisons aujourd'hui de Bolzano (Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano : mathématicien bohémien de langue allemande 1781-1848) et de Cauchy (Augustin Louis baron Cauchy : mathématicien français 1789-1857).

Le **calcul infinitésimal**, quant à lui, a révolutionné les mathématiques avec l'introduction des tangentes, des dérivées et du calcul intégral : il est principalement du à Euler et Leibniz.

Les théorèmes suivants admis provisoirement s'ils n'ont pas été démontré l'année dernière.

**Théorème 2.1**

**Théorème des gendarmes. Par exemple si** $f$**,** $g$ **et** $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **vérifient :** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ **et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ **alors** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$**.**

**Théorème 2.2**

**Composition des limites. Par exemple, si** $f$ **et** $g$ **sont deux fonctions de** $\mathbb{R}$ **dans** $\mathbb{R}$ **telles que** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ **et** $\lim\limits_{y\to\ell} g(y) = -\infty$ **alors on peut conclure que** $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ f(x) = -\infty$**.**

**Théorème 2.3**

**Théorème de la limite monotone. Par exemple, si** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **est une fonction croissante alors on a l'alternative :**

$$\begin{cases} \bullet \quad \text{soit } f \text{ est majorée et alors } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}, \\ \bullet \quad \text{soit } f \text{ n'est pas majorée et alors } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty. \end{cases}$$

**Théorème 2.4**

**Théorème des valeurs intermédiaires. Par exemple soit** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **continue et** $y \in [\widetilde{f(a), f(b)}]$ **alors on peut conclure :** $\exists c \in [a,b],\ f(c) = y$**.**

**Théorème 2.5**

**Par exemple si** $f$ **est strictement croissante et continue sur** $I = ]a;b[$ **alors elle réalise une bijection de** $I$ **sur** $]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$ **(**$a = -\infty$ **et** $b = +\infty$ **sont possibles).**

**Définition 2.1**

*Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}$, $f$ *est dite* **dérivable** *en* $a$ *si* $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *existe dans* $\mathbb{R}$ *et on note* $f'(a)$ *cette limite. On dit que* $f$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *si* $f'(a)$ *existe pour tout réel* $a$*.*

**Théorème 2.6**

**Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle $I$ alors :**

- **$f$ est croissante $I \iff (\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0)$.**
- **$f$ est strictement croissante $I \iff (\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$ et $f'$ ne s'annule pas sur un segment ).**
- **$f$ est constante sur $I \iff (\forall x \in I,\ f'(x) = 0)$.**

**Théorème 2.7**

**Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\lambda$ un réel alors les fonctions $\lambda f$, $f + g$ et $f \times g$ sont dérivables sur $I$ et on a les relations suivantes : $\forall x \in I,\ (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x),\ (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ et $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.**
**Si de plus la fonction $g$ ne s'annule pas sur $I$ alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont définies et dérivables sur $I$ et on a $\forall x \in I,\ \left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.**

**Théorème 2.8**

**Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur $I$ et $\forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'\big(f(x)\big)$.**

**Théorème 2.9**

**Si $f : I \to J$ est une fonction continue et bijective entre deux intervalles $I$ et $J$ alors $f$ est strictement monotone et $f^{-1} : J \to I$ est aussi continue.**

**Théorème 2.10**

**Si $f : I \to J$ est une fonction dérivable bijective entre deux intervalles $I$ et $J$ et qu'en plus $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$ alors $f^{-1}$ est dérivable sur $J$ et $\forall y \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$.**

**Théorème 2.11**

**Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle $I$ alors si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ sont fixés, il existe une unique primitive sur $I$ de $f$ qui prenne la valeur $y_0$ en $x_0$ et c'est la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in I,\ F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt + y_0$.**

**Théorème 2.12**

**Avec les mêmes notations, si on connaît une primitive $F_0$ de $f$ sur $I$ alors il existe une infinité de primitives de $f$ sur $I$ et elles sont de la forme $F = F_0 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.**

**Théorème 2.13**

**Soit deux fonctions $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a; b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\displaystyle\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$ (c'est la linéarité de l'intégrale).**

**Théorème 2.14**

**Soit** $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ **continue sur le segment** $[a;b]$**, alors si on connaît une primitive** $F$ **de** $f$ **sur** $[a;b]$**, on a** $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$**.**

**Théorème 2.15**

**Soit** $u, v : [a;b] \to \mathbb{R}$ **dérivables avec une dérivée continue alors on a par intégration par parties (IPP)** $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$**.**

**Théorème 2.16**

**Soit** $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ **continue et** $\varphi : [\alpha;\beta] \to [a;b]$ **bijective, dérivable avec une dérivée continue, alors on a par changement de variables** $(u = \varphi(t))$ **:** $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)du = \int_\alpha^\beta \varphi'(t)\, f\big(\varphi(t)\big)dt$**.**

# PARTIE 2.1 : EXPONENTIELLES, LOGARITHMES ET PUISSANCES

## 2.1.1 : Le logarithme népérien

Voici une fonction géniale créée par Napier (John Napier : théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais 1550-1617) : bien sûr ce n'est pas sous la forme ci-dessous qu'elle a été initialement définie.

**Définition 2.2**

*On appelle* **logarithme népérien***, notée* $\ln$*, l'unique primitive de la fonction* $x \to \dfrac{1}{x}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *qui s'annule en 1 ; c'est-à-dire :* $\forall x > 0,\ \ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

**Proposition 2.1**

**On a les relations suivantes concernant la fonction** $\ln$ **:**

- $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$**.**
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$**.**
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(x^n) = n\ln(x)$**.**
- $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$**.**

Démonstration : Il suffit de considérer, pour $y > 0$ fixé, la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par la relation : $\forall x > 0,\ f(x) = \ln(xy) - \ln(x)$ pour la première relation. Les autres suivent assez facilement.

*REMARQUE 2.1 : Comme* $\forall x > 0,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, *la fonction* $\ln$ *est strictement croissante donc admet une limite finie ou* $+\infty$ *en* $+\infty$ *d'après le théorème de la limite monotone. De plus, d'après 2.1 :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(2^n) = n\ln(2)$ *et* $\ln(2) > 0$ *ce qui prouve que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2^n) = +\infty$. *Par conséquent :*

**Proposition 2.2**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$.

*REMARQUE 2.2 : Ainsi,* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *est bijective. De plus, en étudiant* $x \mapsto \ln(x) - x + 1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *on se rend compte simplement que* $\forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x - 1$ *; cette inégalité nous servira par la suite.*

*On a aussi la limite qui traduit la dérivée de* $\ln$ *en 1 :* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

## 2.1.2 : L'exponentielle réelle

**Définition 2.3**

*D'après ce qui précède, on peut définir la fonction* **exponentielle** *comme réciproque du logarithme népérien sur* $\mathbb{R}$, *c'est-à-dire que* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *est la réciproque de* $\ln$.

*REMARQUE 2.3 : Pour l'exponentielle nous disposons des équations fonctionnelles* $\exp(0) = 1$ *et :*

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \exp(nx) = \big(\exp(x)\big)^n$ *donc* $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

*On note alors* $e = \exp(1)$ *de sorte que l'on a* $\ln(e) = 1$ *et les équations fonctionnelles ci-dessus prouvent donc que* $\forall n \in \mathbb{Z},\ \exp(n) = e^n$ *ce qui nous conduit à adopter la notation :*

**Définition 2.4**

*On note dorénavant, pour* $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp(x)$.

*REMARQUE 2.4 : On doit la notation* $e$ *pour cette constante à* EULER *dans une lettre que celui-ci adresse à* GOLDBACH *en* 1731 *:* $e$ *pour exponentielle voyons !*

**Proposition 2.3**

**Voilà alors les équations fonctionnelles traditionnelles,** $e^0 = 1$ **et :**

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{x+y} = e^x.e^y$ **et** $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ e^{nx} = (e^x)^n$, **notamment** $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

**Proposition 2.4**

**La fonction** $\exp$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et :** $\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp)'(x) = e^x = (e^x)'$ **(par abus de notation). On a aussi** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

### 2.1.3 : Exponentielle et logarithme de base différente

**Définition 2.5**

*Soit* $a \in \mathbb{R}_+^*$, *on définit l'***exponentielle de base** $a > 0$, *notée* $\exp_a$, *c'est la fonction* $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *telle que* $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a(x) = e^{x\ln(a)}$.

<u>*REMARQUE 2.5*</u> *: L'exponentielle de base* $e$ *est celle rencontrée plus haut car* $\ln(e) = 1$ *et on a donc comme pour celle-ci les relations :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$ *et* $\exp_a(x-y) = \dfrac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \exp_a(nx) = \big(\exp_a(x)\big)^n$ *d'où* $\exp_a(-x) = \dfrac{1}{\exp_a(x)}$.

*On constate que* $\forall n \in \mathbb{Z},\ \exp_a(n) = \big(\exp_a(1)\big)^n = a^n$ *ce qui conduit encore à poser :*

**Définition 2.6**

*On pose, pour* $a > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x\ln(a)} = \exp_a(x)$.

**Proposition 2.5**

**On a pour** $a > 0$ **et avec cette nouvelle notation :**

- $\forall x \in \mathbb{R},\ a^x = e^{x\ln(a)}$**,** $\ln(a^x) = x\ln(a)$ **et** $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$**.**
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a^{x+y} = a^x a^y$ **et** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$**.**
- **De plus,** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (a^x)^y = a^{xy}$ **et** $\forall x \in \mathbb{R},\ (ab)^x = a^x b^x$**.**

**Proposition 2.6**

**Pour** $a > 0$**, la fonction** $\exp_a$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et on a la formule :** $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a'(x) = \ln(a).a^x$**. On en déduit que** $\exp_a$ **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$ **pour** $a > 1$ **et strictement décroissante sur** $\mathbb{R}$ **pour** $a < 1$ **(constante pour** $a = 1$ **bien sûr).**

<u>*REMARQUE 2.6*</u> *: • Il faut s'imprégner des graphes de cette famille de fonctions exponentielles.*

- *Si* $u : I \to \mathbb{R}_+^*$ *et* $v : I \to \mathbb{R}$ *sont deux fonctions dérivables sur un intervalle* $I$ *alors la fonction* $w : I \to \mathbb{R}$ *définie par* $\forall x \in I,\ w(x) = u(x)^{v(x)}$ *est dérivable sur* $I$ *par composition et produit. Et on a, en revenant à la définition :* $\forall x \in I,\ w'(x) = \Big[v'(x)\ln\big(u(x)\big) + \dfrac{u'(x)}{u(x)}v(x)\Big]u(x)^{v(x)}$.

**Définition 2.7**

*Si* $a > 0$ *mais* $a \neq 1$, *on définit le* **logarithme en base** $a$, *noté* $\log_a$, *comme réciproque de* $\exp_a$. *Ainsi :* $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

<u>*REMARQUE 2.7*</u> *: Pour* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $y \in \mathbb{R}$ *on a facilement l'équivalence suivante :*

$$y = \log_a(x) \iff x = \exp_a(y) \iff x = e^{y\ln(a)} \iff y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.\ \text{ Ainsi :}$$

**Proposition 2.7**

**Pour** $a > 0$**, on a :** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$**. La fonction** $\log_a$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}_+^*$ **et** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \log'_a(x) = \dfrac{1}{x\ln a}$**. De plus, on généralise les propriétés de** $\ln$ **:**

- $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \log_a(x^n) = n\log_a(x)$.
- $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

*REMARQUE 2.8 : Là encore, il faut mémoriser les graphes de ces fonctions logarithmes.*

### 2.1.4 : Les fonctions puissances

**Définition 2.8**

*Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*, on définit la fonction "***puissance** $\alpha$*" de* $p_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ *par :* $\forall x > 0,\ p_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$.

*REMARQUE 2.9 : Pour un entier relatif* $n$ *et un réel* $x$*, on a d'après les propriétés vues avant que* $x^n = e^{n\ln x}$ *est la puissance de* $x$ *au sens usuel. Même pour un rationnel* $\dfrac{p}{q}$ *avec* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$ *et pour un réel strictement positif* $x$*, on a* $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = x^p$ *donc* $x^{\frac{p}{q}}$ *est le réel auquel on s'attend.*

**Proposition 2.8**

**La fonction** $p_\alpha$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}_+^*$ **et on a :** $\forall x > 0,\ p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

- **Si** $\alpha > 0$**, on a les limites** $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha = 0$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$**, on peut donc poser** $0^\alpha = 0$.
- **Si** $\alpha < 0$**, on a aussi** $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0+$.

### 2.1.5 : Croissances comparées de ces fonctions

*REMARQUE 2.10 : D'après la remarque 2.2, on a* $\forall x > 0,\ \ln(x) < x$ *donc, si* $0 < \alpha < \beta$*, on a aussi* $\forall x > 1,\ 0 < \dfrac{\ln(x)}{x^\beta} < \dfrac{x^{\alpha-\beta}}{\alpha}$*, ce qui permet d'affirmer d'après le théorème des gendarmes :*

**Proposition 2.9**

**Pour deux réels strictement positifs** $\alpha$ **et** $\beta$**, on a les limites classiques :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\beta} = 0$ **; puis** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ **; et enfin** $\lim\limits_{x\to 0} x^\beta \ln(x) = 0$.

DÉMONSTRATION : Il suffit de passer à la puissance dans la première limite pour avoir la seconde puis de changer de variable pour obtenir la dernière.

**Proposition 2.10**

**Pour** $\alpha > 0$ **et** $\beta > 0$**, on a aussi** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$.

DÉMONSTRATION : Il suffit d'écrire, pour $x > 0$, $\dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = e^{\alpha x(1-\frac{\beta\ln x}{\alpha x})}$ et de composer les limites.

***EXEMPLE 2.1 :*** Étude de $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x > 0,\ f(x) = x^x$ et pourquoi $0^0 = 1$.

# PARTIE 2.2 : FONCTIONS HYPERBOLIQUES DIRECTES ET RÉCIPROQUES

## 2.2.1 : Les hyperboliques directes

*REMARQUE 2.11 : Cherchons deux fonctions* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *paire et* $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *impaire telles que* $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = p(x) + i(x)$. *Alors on a aussi :* $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = p(x) - i(x)$ *par construction d'où* $p(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *et* $i(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. *Les deux fonctions définies par ces expressions sont effectivement paire et impaire respectivement. Cette décomposition est très générale.*

**Définition 2.9**

*On définit les fonctions* **cosinus et sinus hyperboliques** $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

**Proposition 2.11**

$\mathrm{sh}$ **et** $\mathrm{ch}$ **sont dérivables et** $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$ **et** $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$**.** $\mathrm{sh}$ **est impaire et** $\mathrm{ch}$ **est paire.** $\mathrm{sh}$ **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$ **et** $\mathrm{ch}$ **ne l'est que sur** $\mathbb{R}_+$**.**
**On a aussi** $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) < \dfrac{e^x}{2} < \mathrm{ch}(x)$ **;** $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$**.**
**Et enfin la relation fonctionnelle croisée :** $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ **;** $\mathrm{ch}(0) = 1$ **et** $\mathrm{sh}(0) = 0$**.**

**Définition 2.10**

*On définit comme il se doit par analogie les fonctions* **tangente hyperbolique** *et* **cotangente hyperbolique**, *ce sont* $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $\mathrm{coth} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *définies par :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathrm{coth}(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$ *de sorte que pour les réels non nuls* $x$ *on a* $\mathrm{coth}(x) = \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)}$.

**Proposition 2.12**

**Les fonctions** $\mathrm{th}$ **et** $\mathrm{coth}$ **sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs et l'on a :**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x) \textbf{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathrm{coth}'(x) = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)} = 1 - \mathrm{coth}^2(x).$$

*REMARQUE 2.12 : La fonction* $\mathrm{th}$ *est donc strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *impaire, avec les expressions* $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ *ce qui amène* $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$.

*La fonction* $\mathrm{coth}$ *est strictement décroissante sur son ensemble de définition, aussi impaire, avec des expressions inverses par rapport à celles de* $\mathrm{th}(x)$ *et les limites* $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{coth}(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{coth}(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to0-} \mathrm{coth}(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to0+} \mathrm{coth}(x) = +\infty$.

*Voir le polycopié généreusement distribué pour un aperçu de la trigonométrie hyperbolique qui ressemble fortement à la trigonométrie circulaire classique.*

### 2.2.2 : Définition des hyperboliques réciproques

*REMARQUE 2.13 : D'après les théorèmes rappelés au début de ce chapitre, la stricte croissance, la continuité et les limites de* sh *aux bornes de son ensemble de départ, on en déduit que* sh *crée une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

**Définition 2.11**

*On définit donc la fonction* **argument sinus hyperbolique** $\text{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *comme étant la réciproque de la fonction* $\text{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

*REMARQUE 2.14 : On a donc l'équivalence, pour* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *:* $y = \text{sh}(x) \iff x = \text{Argsh}(y)$ *et les relations :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Argsh}\big(\text{sh}(x)\big) = x$ *et* $\forall y \in \mathbb{R},\ \text{sh}\big(\text{Argsh}(y)\big) = y$.

**Proposition 2.13**

Argsh **est impaire, dérivable sur** $\mathbb{R}$ **avec :** $\forall y \in \mathbb{R},\ \text{Argsh}'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}}$.

**On dispose de plus de l'expression :** $\forall y \in \mathbb{R},\ \text{Argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

*REMARQUE 2.15 : De même,* ch *réalise une bijection de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $[1; +\infty[$.

**Définition 2.12**

*La réciproque de la fonction* $\text{ch} : \mathbb{R}_+ \to [1; +\infty[$ *est appelée* **argument cosinus hyperbolique** *et est notée* $\text{Argch} : [1; +\infty[ \to \mathbb{R}_+$.

*REMARQUE 2.16 : On a donc, pour* $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times [1; +\infty[$ *:* $y = \text{ch}(x) \iff x = \text{Argch}(y)$ *et les relations suivantes :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Argch}\big(\text{ch}(x)\big) = |x|$ *et* $\forall y \in [1; +\infty[,\ \text{ch}\big(\text{Argch}(y)\big) = y$ *(*ch *est paire).*

**Proposition 2.14**

Argch **est continue sur** $[1; +\infty[$**, mais elle est dérivable uniquement sur** $]1; +\infty[$ **avec la formule :** $\forall y \in ]1; +\infty[,\ \text{Argch}'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$. **De plus :** $\forall y \in [1; +\infty[,\ \text{Argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$.

DÉMONSTRATION : La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée ne s'y annule pas d'où le résultat. Par contre $\text{ch}'(0) = \text{sh}(0) = 0$ donc la fonction Argch n'est pas dérivable en 1.

*REMARQUE 2.17 : On prouve de la même manière que* th *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $]-1; 1[$.

**Définition 2.13**

*On définit comme ci-dessus la fonction* **argument tangente hyperbolique** $\text{Argth} : ]-1; 1[ \to \mathbb{R}$ *comme étant la réciproque de* $\text{th} : \mathbb{R} \to ]-1; 1[$.

*REMARQUE 2.18 : On a donc l'équivalence, pour* $(x, y) \in \mathbb{R} \times ]-1; 1[$ *:* $y = \text{th}(x) \iff x = \text{Argth}(y)$ *et les relations :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Argth}\big(\text{th}(x)\big) = x$ *et* $\forall y \in ]-1; 1[,\ \text{th}\big(\text{Argth}(y)\big) = y$.

**Proposition 2.15**

Argth **est dérivable sur** $]-1; 1[$ **avec :** $\forall y \in ]-1; 1[,\ \text{Argth}'(y) = \dfrac{1}{1-y^2}$.

Argth **est de plus impaire avec l'expression :** $\forall y \in ]-1; 1[,\ \text{Argth}(y) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.

# PARTIE 2.3 : FONCTIONS CIRCULAIRES DIRECTES ET RÉCIPROQUES

## 2.3.1 : Les circulaires directes

*REMARQUE 2.19 : Grâce à un petit dessin et à des calculs d'aires on obtient* $0 < \sin(x) < x < \tan(x)$ *pour* $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$*. Ces encadrements et le théorème des gendarmes prouvent alors que* $\sin$ *est continue en 0, et comme pour ces valeurs de* $x$ *on a* $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$ *on a aussi la continuité de* $\cos$ *en 0.*
*Les relations fonctionnelles (formules de trigonométrie classiques) amènent alors à la continuité de* $\sin$ *et* $\cos$ *partout sur* $\mathbb{R}$*. Cette même inégalité justifie aussi la dérivabilité de* $\sin$ *en 0 avec* $\sin'(0) = 1$ *et, avec une petite transformation trigonométrique, on a aussi la dérivabilité de* $\cos$ *en 0 avec* $\cos'(0) = 0$*.*

**Proposition 2.16**

$\sin$ **et** $\cos$ **sont dérivables sur** $\mathbb{R}$ **et :** $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos(x)$ **et** $\cos'(x) = -\sin(x)$**, ce qu'on peut aussi écrire** $\sin'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **et** $\cos'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$**.**

**On montre alors que, pour** $n \in \mathbb{N}$ **et** $x \in \mathbb{R}$**,** $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ **et** $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$**.**

DÉMONSTRATION : Encore des formules de trigonométrie pour avoir les dérivées partout à partir de celles en 0, puis une récurrence simple pour les dérivées successives.

**Définition 2.14**

*On définit la fonction* **tangente***, notée* $\tan$*, c'est* $\tan : \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$ *qui vérifie la relation* $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *pour des* $x$ *convenables.*

**Proposition 2.17**

$\tan$ **est impaire,** $\pi$**-périodique, dérivable sur son ensemble de définition, strictement croissante et :** $\forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$**.**

## 2.3.2 : Les circulaires réciproques

*REMARQUE 2.20 :* $\sin$ *crée une bijection strictement croissante de* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *dans* $[-1; 1]$*.*

**Définition 2.15**

*On définit la fonction* **arc sinus** $\mathrm{Arcsin} : [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *comme réciproque de cette fonction* $\sin$*.*

*REMARQUE 2.21 : On a donc, pour* $(x, y) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \times [-1; 1]$*,* $y = \sin(x) \iff x = \mathrm{Arcsin}(y)$ *et la relation* $\forall y \in [-1; 1],\ \sin\big(\mathrm{Arcsin}(y)\big) = y$*. Par contre, on n'a* $\mathrm{Arcsin}\big(\sin(x)\big) = x$ *que si* $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$*.*
*Par exemple* $\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$*.*

**Proposition 2.18**

$\mathrm{Arcsin}$ **est continue sur** $[-1;1]$**, mais elle est uniquement dérivable sur** $]-1;1[$ **avec la formule :** $\forall y \in ]-1;1[,\ \mathrm{Arcsin}'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$**. Elle est strictement croissante sur** $[-1;1]$ **et impaire.**

*REMARQUE 2.22 : De même* $\cos$ *réalise une bijection de* $[0;\pi]$ *dans* $[-1;1]$.

**Définition 2.16**

*On définit donc la fonction* **arc cosinus** $\mathrm{Arccos} : [-1;1] \to [0;\pi]$ *comme réciproque de cette fonction* $\cos$.

*REMARQUE 2.23 : On a donc, pour* $(x,y) \in [0;\pi] \times [-1;1]$, $y = \cos(x) \Longleftrightarrow x = \mathrm{Arccos}(y)$ *et la relation* $\forall y \in [-1;1],\ \cos\big(\mathrm{Arccos}(y)\big) = y$. *Par contre, on n'a* $\mathrm{Arccos}\big(\cos(x)\big) = x$ *que si* $x \in [0;\pi]$.

**Proposition 2.19**

$\mathrm{Arccos}$ **est continue sur** $[-1;1]$**, mais elle est uniquement dérivable sur** $]-1;1[$ **avec la formule :** $\forall y \in ]-1;1[,\ \mathrm{Arccos}'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$**. Elle est strictement décroissante sur** $[-1;1]$**.**

*REMARQUE 2.24 : On montre aussi que* $\tan$ *réalise une bijection entre* $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ *et* $\mathbb{R}$.

**Définition 2.17**

*Soit enfin la fonction* **arc tangente** $\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \to \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ *comme réciproque de cette fonction* $\tan$.

*REMARQUE 2.25 : On a donc, pour* $(x,y) \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[ \times \mathbb{R}$, $y = \tan(x) \Longleftrightarrow x = \mathrm{Arctan}(y)$ *et la relation* $\forall y \in \mathbb{R},\ \tan\big(\mathrm{Arctan}(y)\big) = y$. *Par contre, on n'a* $\mathrm{Arctan}\big(\tan(x)\big) = x$ *que si* $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

**Proposition 2.20**

$\mathrm{Arctan}$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **avec :** $\forall y \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arctan}'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$**.**

**Elle est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$ **et impaire. De plus,** $\lim\limits_{y \to +\infty} \mathrm{Arctan}(y) = \dfrac{\pi}{2}$**.**

**Proposition 2.21**

**On a les deux relations classiques suivantes :**

$$\forall x \in [-1;1],\ \mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2} \textbf{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

**Méthode**

**En général, quand on doit montrer une relation du type** $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$ **(**$I$ **est un intervalle) faisant intervenir des fonctions circulaires et/ou hyperboliques, on a deux choix :**

- **Montrer que** $f$ **et** $g$ **sont dérivables sur** $I$ **et établir que** $\forall x \in I,\ f'(x) = g'(x)$**, alors il existe** $k \in \mathbb{R}$ **tel que** $\forall x \in I,\ f(x) = g(x) + k$**. Reste à prendre un point particulier ou une limite pour avoir** $k = 0$**.**
- **Trouver un paramétrage** $x = \varphi(\theta)$ **de tout** $x \in I$ **(déterminer ou choisir l'intervalle** $J$ **pour** $\theta$**) et utiliser les formules de trigonométrie pour simplifier l'expression (attention aux domaines de définition des fonctions réciproques usuelles).**

# PARTIE 2.4 : DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

## 2.4.1 : Définitions et propriétés

**Définition 2.18**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $0$ ($I$ est un intervalle contenant $0$) et un entier $n \in \mathbb{N}$. On dit que $f$ possède un* **développement limité à l'ordre $n$ en $0$** *s'il existe un polynôme $P$ à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à $n$ tel que $f(x) - P(x) \underset{0}{=} o(x^n)$.*

*REMARQUE 2.26* :
- *Ceci signifie que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-P(x)}{x^n} = 0$ : $f(x)-P(x)$ est* **négligeable** *devant $x^n$.*
- *On fera l'abus de notation suivant : $f(x) \underset{0}{=} P(x) + o(x^n)$ : c'est l'usage !*
- *On admet provisoirement que le polynôme $P$ de la définition est unique et on l'appelle* **partie régulière** *du développement limité à l'ordre $n$ de $f$ en $0$ (noté $DL_n(0)$).*
- *Cette unicité permet d'affirmer que : $f$ est paire $\Longrightarrow$ $P$ est pair (les coefficients de degrés impairs sont nuls) et que $f$ est impaire $\Longrightarrow$ $P$ est impair (les coefficients de degrés pairs sont nuls).*

**Proposition 2.22**

**Soit $n \in \mathbb{N}$, le $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1-x}$ est $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$.**

*REMARQUE 2.27* : *Pour $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, la partie régulière du $DL_n(0)$ de $f$ est $P = 1 + X + \cdots + X^n$.*

**Proposition 2.23**

**Si, avec les notations précédentes, $f$ admet un $DL_n(0)$ dont $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ est la partie régulière et que $p \in [\![0;n]\!]$, alors $f$ admet un $DL_p(0)$ de partie régulière $a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$ (c'est la troncature des développements limités).**

*REMARQUE 2.28* : *Comme on a les limites évidentes suivantes $\lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, on peut composer à droite les développements limités dont on dispose pour en avoir d'autres. Par exemple, on obtient $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$, $\dfrac{1}{1-x^2} \underset{0}{=} 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n})$.*

⊙ On admet provisoirement le théorème de TAYLOR-YOUNG (Brook TAYLOR : scientifique britannique 1685-1731 et William Henry YOUNG : mathématicien anglais 1863-1942) suivant :

**Théorème 2.17**

**Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur l'intervalle $I$ qui contient 0, si on suppose que $f$ est indéfiniment dérivable, alors $f$ admet un $DL_n(0)$ pour tout entier $n$ qui est donné par :**

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

*REMARQUE 2.29* : *On retrouve bien le $DL_n(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ en 0 en calculant ses dérivées successives :*

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in ]-\infty;1[,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ *d'où* $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1$.

### 2.4.2 : Classique et opérations

⊙ Grâce au théorème de Taylor-Young et en se restreignant à des ordres raisonnables, on a :

**Théorème 2.18**

**Ces développements limités sont à connaître par cœur, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ :**

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2) \qquad \ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2) \qquad \ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \mathrm{Arcsin}(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^{-x} \underset{0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \mathrm{Argsh}(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + o(x^2) \qquad \mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad \tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \qquad \mathrm{Argth}(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad \mathrm{th}(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$$

**Proposition 2.24**

**Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions avec $I$ un intervalle réel contenant $0$, on suppose que $f$ et $g$ admettent des $DL_3(0)$ de partie régulière $P$ et $Q$ respectivement. Alors $\lambda f$ admet un $DL_3(0)$ de partie régulière $\lambda P$, $f+g$ admet un $DL_3(0)$ de partie régulière $P+Q$ et $f \times g$ admet un $DL_3(0)$ de partie régulière $R$ obtenue en ne gardant dans $P \times Q$ que les termes de degrés inférieurs ou égaux à 3. Ainsi, si $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ et $g(x) \underset{0}{=} b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + o(x^3)$ alors on a :**

$$\lambda f(x) \underset{0}{=} \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \lambda a_3 x^3 + o(x^3),$$

$$f(x) + g(x) \underset{0}{=} a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + o(x^3) \quad \text{et}$$

$$f(x) \times g(x) \underset{0}{=} a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + o(x^3).$$

***EXEMPLE 2.2*** **:** Calculons le $DL_3(0)$ de $\tan(x)\cos(x)$.

*REMARQUE 2.30 : La* **partie principale** *d'un $DL_n(0)$ d'une fonction $f$ est le premier terme non nul dans la partie régulière, si l'on a $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1x + \cdots + a_{r-1}x^{r-1} + a_rx^r + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$ avec $a_0 = a_1 = \cdots = a_{r-1} = 0$ alors cette partie principale est $a_rx^r$. On obtient $f(x) \underset{0}{\sim} a_rx^r$ ce qui signifie que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{a_rx^r} = 1$ : $f(x)$ est à peu près égal à $a_rx^r$ ; cela servira en physique.*

**Proposition 2.25**

**Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec $I$ un intervalle réel contenant $0$, admettant un $DL_2(0)$ qui commence par une constante $a_0$ non nulle ; alors $\frac{1}{f}$ (définie au voisinage de $0$) possède un $DL_2(0)$. Si $f(x) \underset{0}{=} a_0\big(1 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)\big)$ alors $\frac{1}{f(x)} \underset{0}{=} \frac{1}{a_0} \times \big(1 - a_1x + (a_1^2 - a_2)x^2 + o(x^2)\big)$.**

***EXEMPLE 2.3*** **:** Calculons le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ de cette manière.