CHAPITRE 3 COMPLEXES

PARTIE 3.1 : ENSEMBLE $\mathbb{C}$ DES COMPLEXES

$\odot$ La structure de corps totalement ordonné de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est supposée connue.

3.1.1 : Présentation et structure de $\mathbb{C}$

Les nombres complexes ont vu le jour en Italie au XVI^{e} siècle avec l'introduction de la notation $\sqrt{-1}$ par BOMBELLI (Raphaël BOMBELLI : mathématicien italien 1526-1572), CARDAN (Girolamo CARDANO : mathématicien italien 1501-1576) et Niccolò FONTANA dit TARTAGLIA (TARTAGLIA : mathématicien italien 1499-1557) auquel CARDAN aurait volé la méthode de résolution des équations polynomiales de degré 3.

Il aura tout de même fallu attendre le XVIII^{e} siècle pour voir apparaître les complexes sous leur forme générale avec LEIBNIZ, EULER et DE MOIVRE (Abraham DE MOIVRE : mathématicien français 1667-1754).

$\odot$ On définit tout d'abord $\mathbb{C}$ comme l'ensemble des couples de réels $\mathbb{R}^2$ ce qui nous permet d'identifier les complexes aux points du plan par l'intermédiaire d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$: on dit qu'un complexe $z = (x, y)$ est associé à un point $M(x, y)_{\mathcal{R}}$ et réciproquement ce point M admet pour **affixe** le complexe z. Ceci constitue bien évidemment une bijection entre les points du plan $\mathcal{P}$ et l'ensemble $\mathbb{C}$: c'est alors le plan d'ARGAND-CAUCHY (Jean-Robert ARGAND : mathématicien suisse 1768-1822).

En termes d'ensemble il n'y a donc aucune différence entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$; c'est sur les opérations que va s'effectuer la distinction. On peut néanmoins profiter de cette définition des complexes sous forme de couples pour affirmer que pour deux complexes $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$, on a $z = z \iff (x = x'$ et $y = y')$.

> <u>*REMARQUE 3.1*</u> *: Puisqu'un complexe s'écrit donc de manière unique sous la forme $z = (x, y)$, on peut définir la* **partie réelle** *et la* **partie imaginaire** *de z par $\mathrm{Re}(z) = x$ et $\mathrm{Im}(z) = y$.*
>
> *On dit qu'un complexe $z = (x, y)$ est un* **réel pur** *si sa partie imaginaire est nulle et on dit qu'il est un* **imaginaire pur** *si sa partie réelle est nulle.*

$\odot$ On note l'imaginaire pur $i = (0, 1)$; c'est notre i classique.

> <u>*REMARQUE 3.2*</u> *: On identifie les réels purs aux réels (tout court) par l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = (x, 0)$. De cette manière, on pourra dire que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ car $\mathbb{R}$ est en bijection avec les réels purs et ces réels purs sont inclus dans $\mathbb{C}$. On écrira même x à la place de $(x, 0)$ pour un réel pur.*

Définition 3.1

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, on définit deux lois internes $+$ et $\times$ par :

$$\forall\big((x, y), (x', y')\big) \in \mathbb{C}^2,\ (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \ \text{ et } \ (x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)\,.$$

$\odot$ Il est très simple de construire la somme de deux complexes à l'aide des points du plan dont ce sont les affixes ; par contre, le produit trouvera son interprétation géométrique avec l'écriture trigonométrique.

Théorème 3.1

$(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

REMARQUE 3.3 : On sait déjà que, par l'application φ de la remarque 3.2, l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels peut être considéré comme une partie de $\mathbb{C}$, mais en terme de structure, on a beaucoup mieux ; les lois de $\mathbb{C}$ prolongent celles de $\mathbb{R}$, ce qui se traduit par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \varphi(x+y) = (x+y,0) = (x,0)+(y,0) = \varphi(x)+\varphi(y) \\ \varphi(xy) = (xy,0) = (xy-0^2, x0+0y) = (x,0)\times(y,0) = \varphi(x)\times\varphi(y) \end{cases}$$

REMARQUE 3.4 : Tout ceci est bien beau mais ce n'est pas la présentation classique des complexes, vérifions qu'elle correspond à celle que vous avez vu l'année dernière. Or $(x,0)+(0,1)\times(y,0) = (x,y)$ ce qui justifie qu'un complexe de partie réelle x et de partie imaginaire y peut s'écrire $x+iy$ où x est compris comme le complexe réel pur, y aussi et où i est le complexe imaginaire pur déjà défini.

De plus, on vérifie bien que $(0,1)\times(0,1) = (-1,0) = -1$ par l'abus de notation des réels purs ; ce qu'on retient sous la forme $i^2 = -1$. On pourra maintenant utiliser les calculs classiques, puisque les lois $+$ et $\times$ ont les bonnes propriétés : $(x+iy)+(x'+iy') = (x+x')+i(y+y')$ (par commutativité de $+$ et distributivité de $\times$ par rapport à $+$) ; $(x+iy)\times(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+x'y)$ (par définition).

3.1.2 : Conjugaison

Définition 3.2

Soit $z \in \mathbb{C}$, on définit son **conjugué**, *noté $\overline{z}$, par : $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$.*

REMARQUE 3.5 : Par l'identification déjà évoquée entre les points du plan et les complexes par l'intermédiaire d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$, si M est d'affixe $z = x+iy$ (sous-entendu $(x,y)\in\mathbb{R}^2$), alors le point d'affixe $\overline{z} = x-iy$ est le symétrique orthogonal de M par rapport à la droite (Ox).

Théorème 3.2

Nous avons les identités algébriques suivantes, $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$:

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}, \quad \overline{z\times z'} = \overline{z}\times\overline{z'}, \quad \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

Si, de plus, z est non nul alors on a $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ et on a les caractérisations :

- **z est un réel pur $\Longleftrightarrow \overline{z} = z$,**
- **z est un imaginaire pur $\Longleftrightarrow \overline{z} = -z$.**

*REMARQUE 3.6 : L'application conjugaison $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}$, $c(z) = \overline{z}$ est donc un "***automorphisme involutif*** *de corps".*

3.1.3 : Module

Définition 3.3

Soit $z \in \mathbb{C}$, on définit son **module** *$|z|$ par : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{z\times\overline{z}}$.*

REMARQUE 3.7 : Géométriquement, le module d'un complexe est la distance OM si M est le point d'affixe z dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ d'après PYTHAGORE.

Théorème 3.3

Là aussi, nous disposons d'égalités algébriques, $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$ **:**

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}, \quad |z \times z'| = |z| \times |z'|, \quad |z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$$

De plus, pour un réel pur z**, on a** $|z| = |z|$ **(le module prolonge la valeur absolue aux complexes).**
Si z **est un complexe non nul,** $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ **et** $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$**.**
On a enfin une caractérisation utile : $z = 0 \iff |z| = 0$**.**

<u>Démonstration</u> : Seule la seconde égalité n'est pas évidente, et elle découle de l'identité algébrique de Lagrange (Joseph Louis, comte de Lagrange : mathématicien et astronome français 1736-1813), pour $(x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$, $(xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2 = (x^2 + y^2) \times (x'^2 + y'^2)$.

Proposition 3.1

Il y a même des inégalités provenant de la géométrie, $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$ **:**

$$|z| \geqslant |\mathrm{Re}\,(z)|, \quad |z| \geqslant |\,\mathrm{Im}(z)|, \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|, \quad \Big||z| - |z'|\Big| \leqslant |z - z'|,$$

les deux dernières sont les fameuses inégalités triangulaires.

<u>Démonstration</u> : On écrit $|z + z'|^2 = (z + z')\overline{(z + z')} = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + \overline{z}z'$ qui se transforme en $|z+z'|^2 = |z|^2+|z'|^2+2\mathrm{Re}\,(Z)$ en notant $Z = z\overline{z'}$; on conclut en utilisant $\mathrm{Re}\,(Z) \leqslant |Z| = |z||z'|$.

<u>REMARQUE 3.8</u> : Bien sûr si $z = 0$ *ou* $z' = 0$*, les deux inégalités triangulaires sont des égalités. Mais si* $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, $|z + z'| = |z| + |z'| \iff \Big||z| - |z'|\Big| = |z - z'| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ z' = \lambda z$ *ce qui signifie que les points* $M(z)$ *et* $M'(z')$ *sont sur une même demi-droite issue de* O*.*

PARTIE 3.2 : EXPONENTIELLE COMPLEXE

3.2.1 : Groupe unimodulaire

Définition 3.4

On définit le **groupe unimodulaire** *noté* $\mathbb{U}$ *par :* $\mathbb{U} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$.

<u>REMARQUE 3.9</u> : Géométriquement, $\mathbb{U}$ *"est" le cercle de centre* O *et de rayon 1.*

<u>EXEMPLE 3.1</u> : On a $\{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{U}$ et si on pose $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, on a $j \in \mathbb{U}$ car $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

Proposition 3.2

Quelques propriétés de ce nouvel ensemble :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2,\ z \neq 0, \quad z \times z' \in \mathbb{U}, \quad \frac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U}, \quad -z \in \mathbb{U}, \quad \text{de plus, si } z \in \mathbb{C}^*, \quad \text{on a } \frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}.$$

3.2.2 : Exponentielle des imaginaires purs

Définition 3.5

*Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit l'***exponentielle** *de $i\theta$, notée $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.*

EXEMPLE 3.2 : Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On a aussi $e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

REMARQUE 3.10 : Géométriquement, le point $M(e^{i\theta})$ est situé sur le cercle unité et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}) = \theta$.

Théorème 3.4

Voici les relations entre cette exponentielle des imaginaires purs et $\mathbb{U}$:

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} \in \mathbb{U}, \quad \forall z \in \mathbb{U},\ \exists\alpha \in \mathbb{R},\ z = e^{i\alpha}, \quad \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \times e^{i\beta}$$

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}, \quad \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ e^{i\alpha} = e^{i\beta} \iff \alpha \equiv \beta\ [2\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \alpha - \beta = 2k\pi$$

Théorème 3.5

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Ce sont les formules d'Euler et de De Moivre.

REMARQUE 3.11 : La formule d'Euler sert à linéariser des puissances de cosinus et de sinus (pour calculer des primitives de telles fonctions par exemple) ; c'est-à-dire exprimer des quantités du type $\cos^n(\theta)$ sous la forme de sommes de $\cos(k\theta)$.

EXEMPLE 3.3 : $\cos^3\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}\Big((e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3\Big)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, ce qui donne $\cos^3\theta = \dfrac{1}{8}\Big(e^{i3\theta} + e^{-3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta}\Big) = \dfrac{1}{4}\Big(\cos(3\theta) + 3\cos\theta\Big)$.

REMARQUE 3.12 : La formule de De Moivre sert dans l'autre sens à exprimer des quantités du type $\cos(n\theta)$ par exemple comme somme de puissances de $\cos\theta$.

EXEMPLE 3.4 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos(0.\theta) = 1$, $\cos(1.\theta) = \cos\theta$, $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$, ou d'après l'exemple 3.3 : $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.
$\cos(4\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{4i\theta}\right) = \mathrm{Re}\left((e^{i\theta})^4\right) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^4\right)$ ce qui donne avec la formule du binôme de Newton : $\cos(4\theta) = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta(1 - \cos^2\theta) + (1 - \cos^2\theta)^2$.
Après calculs, on trouve $\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$.

REMARQUE 3.13 : Pour tout entier naturel n, on peut prouver qu'il existe un unique polynôme T_n tel que $\forall\theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, ce sont les fameux **polynômes de Tchebichev de première espèce** *(Pafnouti Lvovitch Tchebychev : mathématicien russe 1821-1894). D'après l'exemple 3.4 : $T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.*

3.2.3 : Écriture trigonométrique d'un complexe

Définition 3.6

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, *on appelle* **argument** *de* z *tout réel* θ *tel que* $z = |z|e^{i\theta}$.

EXEMPLE 3.5 **:** Comme $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$, un argument de z est $\frac{\pi}{3}$, mais aussi $-\frac{5\pi}{3}$ ou encore $\frac{7\pi}{3}$.

REMARQUE 3.14 : Un argument d'un complexe non nul est donc défini à 2π *près d'après la définition 3.6. On peut avoir unicité de l'argument si on l'impose dans l'intervalle* $[0\,;2\pi[$ *(ou* $]-\pi\,;\pi]$*) mais ce n'est pas d'un intérêt gigantesque.*

Proposition 3.3

Soit $z \in \mathbb{C}^*$**, alors :** $\exists! \rho \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = \rho e^{i\theta}$**.**

Proposition 3.4

Condition d'égalité de complexes écrits sous forme trigonométrique, soit $(\rho, \rho', \theta, \theta') \in \mathbb{R}^4$ **tel que** $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$**, alors on a les différents cas :**

- $\rho = \rho' = 0$ **et** θ, θ' **quelconques.**
- $\rho = \rho' \neq 0$ **et** $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$**.**
- $\rho = -\rho' \neq 0$ **et** $\theta - \theta' - \pi \in 2\pi\mathbb{Z}$**.**

En particulier, si $(\rho, \rho') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ **et** $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$**, on a** $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'} \Longleftrightarrow \rho = \rho'$ **et** $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$**.**

REMARQUE 3.15 : Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*, en factorisant avec l'"angle moitié", on a la transformation classique* $e^{ia} + e^{ib} = e^{\frac{i(a+b)}{2}}\left(e^{\frac{i(a-b)}{2}} + e^{\frac{-i(a-b)}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{\frac{i(a+b)}{2}}$ *et une autre relation avec le sinus :* $e^{ia} - e^{ib} = e^{\frac{i(a+b)}{2}}\left(e^{\frac{i(a-b)}{2}} - e^{\frac{-i(a-b)}{2}}\right) = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{\frac{i(a+b)}{2}} = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{\frac{i(a+b+\pi)}{2}}$.

REMARQUE 3.16 : Soit $\theta \in [0\,;2\pi[$ *et posons* $z = 1 + e^{i\theta}$ *alors* $z = e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{-i\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$.
Trois cas peuvent se présenter :

- *si* $\theta \in [0\,;\pi[$ *alors* $|z| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *et un argument de* z *est* $\frac{\theta}{2}$.
- *si* $\theta \in]\pi\,;2\pi[$ *alors* $|z| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *et un argument de* z *est* $\frac{\theta}{2} + \pi$.
- *si* $\theta = \pi$ *alors* $z = 0$ *qui est bien sûr de module* 0 *mais qui n'a pas d'argument.*

On en déduit une propriété classique sur l'angle inscrit par rapport à l'angle au centre dans un cercle.

REMARQUE 3.17 : On dispose donc de deux manières d'écrire les complexes, $z = x + iy$ *(écriture cartésienne) et* $z = \rho e^{i\theta}$ *(écriture trigonométrique). On choisira la première quand on aura affaire à un problème additif car* $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$ *et on préférera la seconde s'il s'agit d'un problème multiplicatif car* $(\rho e^{i\theta}) \times (\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$.

3.2.4 : Généralisation de l'exponentielle à tous les complexes

Définition 3.7

*Soit $z \in \mathbb{C}$, on définit l'***exponentielle** *de z, noté e^z, par : $e^z = e^{\mathrm{Re}\,(z)} \times e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$.*

EXEMPLE 3.6 : Si $z = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{3i\pi}{4}$ alors $e^z = e^{\frac{\ln(2)}{2}} \times e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}\big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\big) = -1 + i$.

REMARQUE 3.18 : On constate encore que cette définition de l'exponentielle prolonge celle déjà vue pour les réels et pour les imaginaires purs ; en effet, si $z = x \in \mathbb{R}$ on a $e^z = e^x \times e^{i0} = e^x$ et si $z = iy$ est un imaginaire pur alors $e^z = e^0 \times e^{iy} = e^{iy}$.

Théorème 3.6

On prolonge maintenant à $\mathbb{C}$ les propriétés classiques de l'exponentielle :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |e^z| = e^{\mathrm{Re}\,(z)} > 0 \ \text{ et } \mathrm{Im}(z) \text{ est un argument de } e^z,\ e^{\overline{(z)}} = \overline{(e^z)}\,, \quad \forall z' \in \mathbb{C}^*,\ \exists z \in \mathbb{C},\ z' = e^z\,,$$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \quad e^z = e^{z'} \Longleftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}\,.$$

PARTIE 3.3 : ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

3.3.1 : Équation du second degré

Proposition 3.5

Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^*$ (avec $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$), alors l'équation $z^2 = z_0$ possède deux solutions distinctes et opposées ; il y a trois cas :

- **si $y_0 = 0$ et $x_0 > 0$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\sqrt{x_0}, -\sqrt{x_0}\right\}$.**
- **si $y_0 = 0$ et $x_0 < 0$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{i\sqrt{-x_0}, -i\sqrt{-x_0}\right\}$.**
- **si $y_0 \neq 0$, en posant $\varepsilon = \mathrm{sgn}(y_0)$ alors $\mathcal{S} = \left\{ \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + x_0}{2}} + i\varepsilon\sqrt{\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - x_0}{2}}\right)\right\}$.**

REMARQUE 3.19 : **On n'écrit surtout pas $\sqrt{z}$ pour la racine carrée d'un complexe !**

EXEMPLE 3.7 : Les racines carrés de $1 + i$ sont donc les complexes $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}\right)$.

Théorème 3.7

On se donne $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ et l'équation $(E)\ :\ az^2 + bz + c = 0$, on pose alors le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, alors on a l'alternative suivante :

- **Si $\Delta = 0$, (E) admet une unique solution $z = \frac{-b}{2a}$.**
- **Si $\Delta \neq 0$, (E) admet deux solutions distinctes $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$, $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ où $\delta^2 = \Delta$.**

EXEMPLE 3.8 : Trouver les solutions de $(E)\ :\ z^2 - 3z + 3 + i = 0$.

REMARQUE 3.20 : En fait, dans le théorème précédent, quand le **discriminant** Δ *est nul, on préfère dire que l'équation* (E) *possède une* **solution double** *car* $az^2+bz+c=0 \iff \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ *dans ce cas. Quand* $\Delta \neq 0$, *on dira que l'équation* (E) *possède deux* **solutions simples**. *Par conséquent :*

Proposition 3.6

Soit $(s,p)\in\mathbb{C}^2$ **(**s **pour somme et** p **pour produit), alors :**

$$\forall (u,v)\in\mathbb{C}^2,\quad \left(\begin{cases} u+v & =s \\ u\times v & =p\end{cases}\right) \iff \left(u \text{ et } v \text{ sont les solutions de l'équation } z^2-sz+p=0\right).$$

EXEMPLE 3.9 : D'après 3.8, $\begin{cases} u+v & =3 \\ u\times v & =3+i\end{cases} \iff \Big((u,v)=(2-i,1+i) \text{ ou } (u,v)=(1+i,2-i)\Big)$.

3.3.2 : Racines n-ièmes de l'unité et d'un complexe non nul

Définition 3.8

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, *on appelle* **racine** n**-ième de l'unité** *tout complexe* z *tel que* $z^n=1$. *L'ensemble contenant toutes les racines* n*-ièmes de l'unité est noté* $\mathbb{U}_n$.

EXEMPLE 3.10 : $j\in\mathbb{U}_3$ car $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ donc $j^3=e^{2i\pi}=1$. De plus, $\mathbb{U}_4=\{1,i,-1,-i\}$.

Proposition 3.7

On a les renseignements suivants pour $n\in\mathbb{N}^*$ **:**

$$1\in\mathbb{U}_n,\quad \mathbb{U}_n\subset\mathbb{U},\quad \forall (z,z')\in\mathbb{U}_n^2,\ zz'\in\mathbb{U}_n \text{ et } z^{-1}=\overline{z}\in\mathbb{U}_n.$$

REMARQUE 3.21 : Si $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ *avec* $m|n$ *alors* $\mathbb{U}_m\subset\mathbb{U}_n$.

Théorème 3.8

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$**, le groupe** $\mathbb{U}_n$ **admet exactement** n **élément(s) :**

$$\mathbb{U}_n=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k\in[\![0;n-1]\!]\right\}=\left\{1,\omega_n,\omega_n^2,\cdots,\omega_n^{n-1}\right\} \text{ en notant } \omega_n=e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

REMARQUE 3.22 : • *On constate que* $\mathbb{U}_n$ *est "***cyclique***" puisqu'il est engendré par* ω_n *seulement.*

• *On dit aussi que* ω_n *est une* **racine primitive** n**-ième de l'unité** *car c'est un "***générateur***" de* $\mathbb{U}_n$ *; il n'y a pas que* ω_n *qui soit une racine primitive* n*-ième de l'unité, par exemple* i *et* $-i$ *sont des générateurs de* $\mathbb{U}_4$ *donc des racines primitives quatrièmes de l'unité.*

• *De plus, si on représente dans le plan les* n *points dont les affixes sont dans* $\mathbb{U}_n$, *on dessine un* **polygone régulier** *à* n *côtés tracé sur le cercle unité* $\mathbb{U}$.

Proposition 3.8

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ **et** $z\in\mathbb{U}_n$ **alors** $1+z+\cdots+z^{n-1}=\begin{cases} 0 & \textbf{si } z\neq 1 \\ n & \textbf{si } z=1\end{cases}$

EXEMPLE 3.11 : Comme $j\in\mathbb{U}_3$ et $j\neq 1$, on a $1+j+j^2=0$ et aussi $j^3=1$.

REMARQUE 3.23 : Cette formule ci-dessus appliquée à $\omega_n\neq 1$ *(si* $n\geqslant 2$*) montre grâce au théorème 3.8 que la somme de toutes les racines* n*-ièmes de l'unité est égale à 0 ce qui ne fait que traduire le fait que le centre de gravité du polygone régulier déjà évoqué est en* O.

EXEMPLE 3.12 **:** Par exemple, $1+e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{\frac{4i\pi}{5}}+e^{\frac{6i\pi}{5}}+e^{\frac{8i\pi}{5}}=0$ qui donne $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Théorème 3.9

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $z_0=\rho_0 e^{i\theta_0}\in\mathbb{C}^*$ avec $\rho_0\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta_0\in\mathbb{R}$, alors l'équation $z^n=z_0$ possède exactement n solutions distinctes, ce sont les $\rho_0^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $k\in[\![0;n-1]\!]$.

REMARQUE 3.24 : Les points dont les affixes sont ces racines n-ièmes de z_0 forment un polygone régulier mais il se trouve sur le cercle de centre O de rayon $\rho_0^{\frac{1}{n}}$ et il est tourné de $\frac{\theta_0}{n}$ par rapport à $\mathbb{U}_n$.

EXEMPLE 3.13 **:** En calculant les racines carrées de $z_0=1+i=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ et en les comparant avec celles trouvées à l'exemple 3.7, on trouve $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$.

3.3.3 : Autres équations

REMARQUE 3.25 : Soit $z_0=\rho_0 e^{i\theta_0}\in\mathbb{C}^*$ avec $\rho_0\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta_0\in\mathbb{R}$, alors l'équation $e^z=z_0$ admet pour solutions les complexes de la forme $z=\ln(\rho_0)+i(\theta_0+2k\pi)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

EXEMPLE 3.14 **:** Pour $z\in\mathbb{C}$, $e^z=1+i\iff\left(\exists k\in\mathbb{Z},\ z=\frac{\ln(2)}{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)$.

*REMARQUE 3.26 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et l'**équation réciproque** $(E)\ :\ a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0=0$ où $a_0=a_n\neq 0$, $a_1=a_{n-1}$ etc... On pose $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$.*

- *Si n est impair alors -1 est forcément solution et on peut factoriser $P(z)=(z+1)Q(z)$ et $Q(z)=0$ sera encore une équation réciproque : la vérification est laissée à l'élève consciencieux(se).*
- *Si n est pair, $z=0$ n'est pas solution donc, pour $z\neq 0$, on pose $u=z+\frac{1}{z}$ et on peut simplifier en $P(z)=0\iff z^{\frac{n}{2}}\left(a_0(z^{\frac{n}{2}}+z^{\frac{-n}{2}})+a_1(z^{\frac{n-1}{2}}+z^{\frac{-(n-1)}{2}})+\cdots\right)=0$. Il se trouve que ces quantités entre parenthèses s'expriment en fonction de u ; par exemple $z^2+\frac{1}{z^2}=u^2-2$, $z^3+\frac{1}{z^3}=u^3-3u$, etc... et on se ramène à la résolution d'un équation polynomiale de degré $\frac{n}{2}$ en u.*

EXEMPLE 3.15 **:** Résoudre $(E)\ :\ z^7+3z^6-6z^5-16z^4-16z^3-6z^2+3z+1=0$.

REMARQUE 3.27 : Quand on vous demande de résoudre des équations polynomiales à coefficients complexes de degré 3 ou 4 (ou plus encore soyons fous !), on attend de vous que vous cherchiez des solutions réelles (ou imaginaires pures) pour vous ramener à des degrés inférieurs.

EXEMPLE 3.16 **:** Résoudre l'équation $(E)\ :\ z^3-(6+4i)z^2+(8+17i)z+3-15i=0$ en cherchant d'abord une racine réelle x (on résoudra alors un système).

PARTIE 3.4 : COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE PLANE

3.4.1 : Généralités vectorielles et affines

$\odot$ On se sert toujours de la bijection qui existe entre les points du plan $\mathcal{P}$ (et même les vecteurs du plan P) et les complexes si on associe à un complexe $z = x + iy$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) le point $M(x, y)_{\mathcal{R}}$ (ou le vecteur $\vec{u}(x, y)_{\mathcal{B}}$) si $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est un repère orthonormé direct et $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ la base correspondante.

On dira aussi qu'un vecteur $\vec{u}$ admet pour affixe $z = x + iy$ si $\vec{u}(x, y)_{\mathcal{B}}$ et on écrira $\vec{u}(z)$.

Bien sûr, si $\vec{u}(z)$ et $\vec{u'}(z')$ alors $\vec{u} + \vec{u}'(z + z')$ et on a aussi $\lambda\vec{u}(\lambda z)$ si $\lambda \in \mathbb{R}$.

On en déduit que l'affixe d'un barycentre de points est le barycentre de leurs affixes.

De plus, si M et M' ont pour affixes respectives z et z', il est clair que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z$.

Tout ce qui vient d'etre dit aurait pu l'être même si le repère n'avait pas été orthonormé direct.

Par contre on a besoin de cette hypothèse pour affirmer : la distance entre O et $M(z)$ est égale à $|z|$, et plus généralement, la distance entre $M(z)$ et $M'(z')$ vaut $|z'-z|$. Le disque ouvert de centre $A(a)$ et de rayon $r > 0$ a donc pour équation complexe : $|z - a| < r$ alors que le même disque fermé aura pour équation $|z - a| \leqslant r$. Enfin, le cercle de centre $A(a)$ et de rayon $r > 0$ a pour équation complexe $|z - a| = r$.

REMARQUE 3.28 :

- *Si* $\vec{u}(z = x + iy)$ *et* $\vec{u'}(z' = x' + iy')$ *alors* $\vec{u}.\vec{u'} = xx' + yy'$ *et* $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{u'}) = xy' - x'y$ *car* $\mathcal{R}$ *est orthonormé direct donc* $\overline{z} \times z' = \vec{u}.\vec{u'} + i\,\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{u'})$, *ce qui donne les formules suivantes :* $\vec{u}.\vec{u'} = \dfrac{z\overline{z'} + z'\overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{u'}) = \dfrac{\overline{z}\,z' - \overline{z'}\,z}{2i}$. *On a aussi* $||\vec{u}|| = |z|$.
- *Soit* $\vec{u}(u)$ *et* $\vec{v}(v)$ *deux vecteurs non nuls de* P, *alors on a les caractérisations :*
$$\Big(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff \frac{v}{u} \in \mathbb{R} \iff v\overline{u} = u\overline{v}\Big)\ ;\ \Big(\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{v}{u} \in i\,\mathbb{R} \iff v\overline{u} + u\overline{v} = 0\Big).$$
De plus, les inégalités triangulaires donnent ici : $||\vec{u} + \vec{v}|| \leqslant ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ *et* $\Big|\,||\vec{u}|| - ||\vec{v}||\,\Big| \leqslant ||\vec{u} - \vec{v}||$.

Proposition 3.9

Soit $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan distincts deux à deux alors le module de $\dfrac{c-a}{b-a}$ est égal à $\dfrac{AC}{AB}$ et un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$ est l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

DÉMONSTRATION : Si on pose $\beta = (\vec{\imath}, \overrightarrow{AB})$ et $\gamma = (\vec{\imath}, \overrightarrow{AC})$ alors $b - a = ABe^{i\beta}$ et $c - a = ACe^{i\gamma}$. Ainsi $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{AC}{AB}e^{i(\gamma-\beta)}$ et on conclut avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\vec{\imath}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}) = \gamma - \beta$ d'après CHASLES.

REMARQUE 3.29 : Droite définie par un point et un vecteur directeur :

- *Soit* $\vec{u}(u)$ *un vecteur non nul du plan* P, $A(a)$ *un point de* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{D}$ *la droite passant par* A *et de vecteur directeur* $\vec{u}$ *; alors* $M(z) \in \mathcal{D} \iff \dfrac{z-a}{u} \in \mathbb{R} \iff \dfrac{z-a}{u} = \overline{\left(\dfrac{z-a}{u}\right)}$ *; une équation complexe de* $\mathcal{D}$ *est donc* $\overline{u}\,(z - a) = u\,(\overline{z} - \overline{a})$, *c'est-à-dire* $\overline{u}\,z - u\,\overline{z} + u\,\overline{a} - \overline{u}\,a = 0$.
- *Réciproquement, soit* $u \in \mathbb{C}^*$ *et* $c \in \mathbb{C}$, *l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des points du plan dont les affixes vérifient l'équation* $\overline{u}z - u\overline{z} + c = 0$ *est vide si* $c \notin i\,\mathbb{R}$ *et c'est une droite de vecteur directeur* $\vec{u}(u)$ *si* $c \in i\,\mathbb{R}$.

REMARQUE 3.30 : Droite définie par un point et un vecteur normal :

- *Soit* $\vec{u}(u)$ *un vecteur non nul du plan* P, $A(a)$ *un point de* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{D}$ *la droite passant par* A *et de vecteur normal* $\vec{u}$ *; alors* $M(z) \in \mathcal{D} \iff \dfrac{z-a}{u} \in i\,\mathbb{R} \iff \dfrac{z-a}{u} = -\overline{\left(\dfrac{z-a}{u}\right)}$ *; une équation complexe de* $\mathcal{D}$ *est donc* $\overline{u}\,(z - a) = -u\,(\overline{z} - \overline{a})$, *c'est-à-dire* $\overline{u}\,z + u\,\overline{z} - u\,\overline{a} - \overline{u}\,a = 0$.
- *Réciproquement, soit* $u \in \mathbb{C}^*$ *et* $c \in \mathbb{C}$, *l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des points du plan dont les affixes vérifient l'équation* $\overline{u}z + u\overline{z} + c = 0$ *est vide si* $c \notin \mathbb{R}$ *et c'est une droite de vecteur normal* $\vec{u}(u)$ *si* $c \in \mathbb{R}$.

REMARQUE 3.31 : Cercle :
- *Soit* $C(c)$ *un point du plan* $\mathcal{P}$, *un réel* $r \geqslant 0$ *et* $\mathcal{C}$ *le cercle de centre* C *et de rayon* r, *alors on a :* $M(z) \in \mathcal{C} \iff |z-c| = r \iff |z-c|^2 = r^2 \iff (z-c)(\overline{z}-\overline{c}) = r^2$ *donc* $\mathcal{C}$ *admet une équation complexe du type* $z\,\overline{z} - c\,\overline{z} - \overline{c}\,z + c\,\overline{c} - r^2 = 0$.
- *Réciproquement, soit* $(c, d) \in \mathbb{C}^2$, *l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des points du plan dont les affixes vérifient l'équation* $z\,\overline{z} - c\,\overline{z} - \overline{c}\,z + d = 0$ *est vide si* $d \notin \mathbb{R}$ *ou si* $(d \in \mathbb{R}$ *et* $|c|^2 - d < 0)$ *; par contre* $\mathcal{E}$ *est le cercle de centre* $C(c)$ *et de rayon* $r = \sqrt{|c|^2 - d}$ *si* $(d \in \mathbb{R}$ *et* $|c|^2 - d \geqslant 0)$.

REMARQUE 3.32 : (HP) Un joli résultat hors programme : soit $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ *et* $D(d)$ *4 points du plan distincts 2 à 2, alors* A, B, C, D *sont cocycliques ou alignés* $\iff [a, b, c, d] = \dfrac{d-a}{c-a} \times \dfrac{c-b}{d-b} \in \mathbb{R}$ *(c'est le* **birapport** *associé aux quatre points). Il y a 24 birapports possibles :* $[a, c, d, b] = \dfrac{b-a}{d-a} \times \dfrac{d-c}{b-c}$, $[d, c, b, a] = \dfrac{a-d}{b-d} \times \dfrac{b-c}{a-c}$ *par exemple. Ce que dit ce résultat, c'est que si un des 24 birapports est réel alors les 23 autres le sont aussi et les points sont cocycliques ou alignés.*

3.4.2 : Transformations du plan

REMARQUE 3.33 : On peut "coder" les transformations classiques du plan en complexe :

translation de vecteur $\overrightarrow{u}(u)$	$z \mapsto z + u$
homothétie de centre O et de rapport k	$z \mapsto kz$
rotation de centre O d'angle θ	$z \mapsto ze^{i\theta}$
homothétie de centre $C(c)$ de rapport k	$z \mapsto k(z-c) + c$.
rotation de centre $C(c)$ d'angle θ	$z \mapsto e^{i\theta}(z-c) + c$
similitude de centre $C(c)$ de rapport k et d'angle θ	$z \mapsto ke^{i\theta}(z-c) + c$
symétrie orthogonale par rapport à (Ox)	$z \mapsto \overline{z}$

Proposition 3.10

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, si on définit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b$, f "est" la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(b)$ si $a = 1$ et la similitude de centre $C\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ de rapport $|a|$ et d'angle un argument de a si $a \neq 1$.

DÉMONSTRATION : Si $a \neq 1$ et si on pose θ un argument de a, en posant $c = \dfrac{b}{1-a}$, on a pour $z \in \mathbb{C}$ $f(z) = az + b = az - ac + c = a(z-c) + c = |a|e^{i\theta}(z-c) + c$. On reconnaît la similitude directe ci-dessus.

REMARQUE 3.34 : Si on considère l'ensemble G *contenant les similitudes directes du plan et les translations : les éléments de* G *se codent donc d'après ce qui précède par* $z \mapsto az + b$ *avec* $a \neq 0$. *Comme* $a(a'z + b') + b = aa'z + ab' + b$, *la composition est une loi interne dans* G, *l'identité est dans* G *(avec* $a = 1$ *et* $b = 0$*) et la réciproque de* $z \mapsto az+b$ *est* $z \mapsto a^{-1}z - ba^{-1}$ *donc* $(G, \circ)$ *est un groupe non abélien.*

REMARQUE 3.35 : Soit $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ *et* $D(d)$ *4 points du plan distincts 2 à 2 et* $A'(a')$, $B'(b')$, $C'(c')$ *et* $D'(d')$ *leurs images par la similitude directe* $f : z \mapsto \alpha z + \beta$ $(\alpha \neq 0)$. *Alors* f *conserve le rapport des distances et les angles , ce qu'on peut écrire* $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{C'D'}{A'B'}$ *et* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'})$ *car on a la relation* $\dfrac{d'-c'}{b'-a'} = \dfrac{(\alpha d + \beta) - (\alpha c + \beta)}{(\alpha b + \beta) - (\alpha a + \beta)} = \dfrac{d-c}{b-a}$.