CHAPITRE 4
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

⊙ La théorie des équations différentielles est contemporaine de la découverte du calcul infinitésimal par Newton et Leibniz (dérivée et calcul intégral) ; au début on introduit ces équations pour résoudre des problèmes géométriques et/ou physiques.

Les mathématiciens suivants déploient des trésors d'ingéniosité pour résoudre ces équations : Taylor, Bernoulli (Jacques Bernoulli : mathématicien et physicien suisse frère de Jean et oncle de Daniel et Nicolas 1654-1705), Riccati (Jacopo Francesco Riccati : mathématicien et physicien italien 1676-1754), Clairaut (Alexis Claude Clairaut : mathématicien français 1713-1765), bien sûr Euler et beaucoup d'autres.

Mais il faudra attendre encore un siècle pour que l'on s'intéresse à l'existence et l'unicité (qui allait de soi jusqu'alors) des solutions de ces équations (sous certaines conditions "initiales") auquelles vont s'attaquer Cauchy et Lipschitz (Rudolph Otto Sigismund Lipschitz : mathématicien allemand 1832-1903).

PARTIE 4.1 : ÉQUATIONS LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

4.1.1 : Dérivée des fonctions à valeurs complexes

REMARQUE 4.1 :

- *Soit* f *une fonction à variables réelles et à valeurs complexes ; c'est-à-dire que* $f : I \to \mathbb{C}$ *(où* I *est un intervalle réel). On peut alors poser* $f_1 = \mathrm{Re}(f)$ *et* $f_2 = \mathrm{Im}(f)$ *de sorte que* f_1 *et* f_2 *sont des fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *et que :* $\forall t \in I,\ f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$.
- *La dérivabilité de* f *est définie de la même manière que pour une fonction réelle : soit* $t_0 \in I$, f *est dérivable en* t_0 *si et seulement si* $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ *existe (dans* $\mathbb{C}$*) et on note alors* $f'(t_0)$ *cette limite.*
- *On dit de nouveau que* f *est dérivable sur* I *si et seulement si* f *est dérivable en chaque valeur* $t_0 \in I$.
- *On admet alors que : (*f *est dérivable sur* I*)* $\Longleftrightarrow$ *(*f_1 *et* f_2 *sont dérivables sur* I*).*
- *Dans ce cas où* f *est dérivable, on a :* $\forall t \in I,\ f'(t) = f_1'(t) + i f_2'(t)$.
- *En passant par la partie réelle et la partie imaginaire, on constate qu'une fonction dérivable à valeurs complexes est constante (sur un intervalle bien sûr) si et seulement si sa dérivée est nulle.*
- *De même, si* $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ *et* $f = f_1 + if_2$ *et* $g = g_1 + ig_2$ *sont dérivables sur un intervalle* I *à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *(bien sûr* $\lambda_1 = \mathrm{Re}(\lambda)$ $\lambda_2 = \mathrm{Im}(\lambda)$, $f_1 = \mathrm{Re}(f)$, $f_2 = \mathrm{Im}(f)$, $g_1 = \mathrm{Re}(g)$, $g_2 = \mathrm{Im}(g)$*) alors le passage par les parties réelles et imaginaires permet d'établir que* λf, $f + g$ *et* $f \times g$ *sont dérivables sur* I *avec les formules que tout le monde attend :* $(\lambda f)' = \lambda f'$, $(f+g)' = f' + g'$ *et* $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.

Proposition 4.1

Si $\varphi : I \to \mathbb{C}$ **est une fonction dérivable et si** $g : I \to \mathbb{C}$ **est définie par :** $\forall t \in I,\ g(t) = e^{\varphi(t)}$ **alors** g **est dérivable sur** I **et on a :** $\forall t \in I,\ g'(t) = \varphi'(t)\, e^{\varphi(t)}$ **(encore une formule classique).**
En particulier, si $a \in \mathbb{C}$ **et si on définit** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **par :** $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{at}$ **alors** f **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et on a** $f' = af$**. Soit, avec l'abus de notation classique :** $\left(e^{at}\right)' = ae^{at}$**.**

Démonstration : On décompose, pour $t \in I$, $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\,\varphi_2(t)$ en partie réelle et imaginaire et on se sert de : $g(t) = e^{\varphi(t)} = \cos\left(\varphi_2(t)\right)e^{\varphi_1(t)} + i\,\sin\left(\varphi_2(t)\right)e^{\varphi_1(t)}$.
Il suffit (pour la seconde dérivée) de poser : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = a\,t = (a_1 + i\,a_2)\,t$.

4.1.2 : Équation homogène à coefficients constants

Proposition 4.2

La fonction exponentielle réelle est l'unique fonction y dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les conditions $y' = y$ avec $y(0) = 1$.

DÉMONSTRATION : Si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifie ceci, on pose $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(t)e^{-t}$.

Proposition 4.3

Soit $a \in \mathbb{C}$, la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = e^{at}$ est l'unique fonction y dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie $y' = ay$ avec $y(0) = 1$.

Proposition 4.4

Pour l'équation fonctionnelle $f(t+u) = f(t)f(u)$, les solutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivables sont la fonction nulle et toutes les fonctions $t \mapsto e^{at}$ où $a \in \mathbb{C}$.

DÉMONSTRATION : Bien sûr la fonction nulle est une solution évidente de l'équation ; sinon on a $f(0) = f(0)^2$ d'où l'on déduit que $f(0) = 1$. En dérivant l'équation par rapport à u, on trouve : $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f'(0)f(t)$ en prenant $u = 0$ ensuite. Si on pose $a = f'(0)$, on a donc d'après la proposition précédente : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{at}$.

Proposition 4.5

Soit $a \in \mathbb{C}$, les solutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = ay$ sont les fonctions $f : t \mapsto \lambda e^{at}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. En posant $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_a(t) = e^{at}$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, on a : $\mathcal{S} = \{\lambda\varphi_a \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ (droite vectorielle engendrée par φ_a).

4.1.3 : Terminologie et structure

REMARQUE 4.2 :

- *On dit qu'une* **équation** *est* **différentielle** *si elle met en jeu la dérivée d'une fonction ; cette fonction est donc à variable réelle (pour qu'on puisse dériver) mais peut être à valeurs réelles, complexes, et même vectorielles comme la vitesse d'un point matériel évoluant dans l'espace.*
- *On appelle* **ordre** *de cette équation différentielle le plus grand entier k tel que la dérivée k-ième de la fonction apparaît dans l'équation ; cette équation d'ordre p est donc de la forme $g(t, y, y', \cdots, y^{(p)}) = 0$.*
- *Cette équation est dite* **scalaire** *si la fonction à dériver prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (donc n'est pas vectorielle) ; on dit que l'équation est* **résolue** *si elle est de la forme $y^{(p)} = h(t, y, y', \cdots, y^{(p-1)})$.*
- *Cette équation est aussi dite* **linéaire** *si elle est de la forme $a_p y^{(p)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$ où par exemple $a_p, \cdots, a_0$ et b sont des fonctions si l'équation est scalaire.*

Définition 4.1

Une **équation différentielle scalaire résolue linéaire du premier ordre** *est donc du type $(E)\ :\ y' + ay = b$ où $a : A \to \mathbb{K}$ et $b : A \to \mathbb{K}$ avec A une partie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Une **solution** *de (E) est donc une fonction $y : A \to \mathbb{K}$ dérivable telle que : $\forall t \in A,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$.*

*L'ensemble des solutions de (E) est noté $\mathcal{S}_E$ et $(E_0)\ :\ y' + ay = 0$ est l'***équation homogène associée**.

Proposition 4.6

L'ensemble $\mathcal{S}_{E_0}$ des solutions de (E_0) contient la fonction nulle, est stable par somme et par multiplication par un scalaire appartenant à $\mathbb{K}$ (on abrège : "$\mathcal{S}_{E_0}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel").

REMARQUE 4.3 : On associe à une équation du premier ordre générale $(E)\ :\ g(t, y, y') = 0$ (sur A) le **problème de** CAUCHY*, avec les notations précédentes ; on veut savoir, si on se donne $t_0 \in A$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, combien il existe de solution(s) de (E) telle(s) que $y(t_0) = y_0$.*

Proposition 4.7

Avec ces notations, si on connaît une solution particulière φ de (E) alors on peut énoncer : (y solution de (E)) $\iff$ ($y-\varphi$ est solution de (E_0)).

Les solutions de (E) sont donc toutes les fonctions de la forme $\varphi+z$ où $z\in\mathcal{S}_{E_0}$ ($\mathcal{S}_E=\varphi+\mathcal{S}_{E_0}$).

***EXEMPLE 4.1* :** Les solutions réelles de $(E)\ :\ y'-y=3$ sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions du type $y_\lambda : x\mapsto \lambda e^x-3$ (avec $\lambda\in\mathbb{R}$) car -3 est une solution particulière évidente de (E) et qu'on sait résoudre $(E_0)\ :\ y'-y=0$ d'après la proposition 4.5.

Proposition 4.8

Si $A\subset\mathbb{R}$, $a, b_1,\cdots,b_n$ des fonctions de A dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on pose $(E)\ :\ y'+ay=\sum_{k=1}^n b_k$ et $\forall k\in[\![1;n]\!]$, $(E_k)\ :\ y'+ay=b_k$. Si, pour $k\in[\![1;n]\!]$, φ_k est une solution de (E_k), alors $\sum_{k=1}^n\varphi_k$ est une solution de (E) (c'est le principe de superposition des solutions).

REMARQUE 4.4 : Dans certains cas, on peut trouver une solution particulière par **identification** *:*

- *Solution complexe "a priori" pour (E) : $y'(t)-ay(t)=P(t)e^{\alpha t}$ où $(a,\alpha)\in\mathbb{C}^2$ et P est polynomiale :*
  - *Si $a=\alpha$, il existe une solution $y(t)=tQ(t)e^{at}$ de (E) avec Q polynomiale et $\deg(Q)=\deg(P)$.*
  - *Si $a\neq\alpha$ il existe une solution $y(t)=Q(t)e^{\alpha t}$ de (E) avec Q polynomiale et $\deg(Q)=\deg(P)$.*
- *Solution réelle pour (E) : $y'(t)-ay(t)=P(t)e^{\alpha t}$ où $(a,\alpha)\in\mathbb{R}^2$ et P est polynomiale réelle :*
  - *Si $a=\alpha$ il existe une solution $y(t)=tQ(t)e^{at}$ avec Q polynomiale et $\deg(Q)=\deg(P)$.*
  - *Si $a\neq\alpha$ il existe une solution $y(t)=Q(t)e^{\alpha t}$ avec Q polynomiale et $\deg(Q)=\deg(P)$.*
- *Solution réelle pour (E) : $y'(t)-ay(t)=\big(P_1(t)\cos(\beta t)+P_2(t)\sin(\beta t)\big)e^{\alpha t}$ où $(a,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^*$ et où P_1 et P_2 sont deux fonctions polynomiales réelles :*
  - *Il existe une solution particulière de la forme $y(t)=\big(Q_1(t)\cos(\beta t)+Q_2(t)\sin(\beta t)\big)e^{\alpha t}$ avec Q_1 et Q_2 polynomiales et $\mathrm{Max}\big(\deg(Q_1),\deg(Q_2)\big)=\mathrm{Max}\big(\deg(P_1),\deg(P_2)\big)$.*

***EXEMPLE 4.2* :** Résoudre $y'+y=e^{-t}+2e^t+t^2+2t+1+\big((2t+1)\cos(t)-t\sin(t)\big)e^t$.

4.1.4 : Équation homogène résolue

Proposition 4.9

Soit $a : I\to\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec I <u>intervalle</u> et a continue, on pose alors $(E_0)\ :\ y'+ay=0$ (équation homogène). En notant $A : I\to\mathbb{K}$ une primitive de a sur I, on a l'équivalence suivante : y solution de $(E_0)\iff\exists\lambda\in\mathbb{K},\ y=\lambda e^{-A}$.

REMARQUE 4.5 :

- *On constate a posteriori qu'une solution y de (E_0) s'annule toujours (pour $\lambda=0$) ou jamais.*
- *Il faut résister dans la rédaction de la résolution d'une telle équation à la formidable tentation d'écrire $y'+ay=0\iff\dfrac{y'}{y}=-a\iff\ln(|y|)=-A+k\iff y=\pm e^ke^{-A}$ car c'est déjà totalement impossible si la fonction y est à valeurs complexes, c'est aussi interdit si elle est nulle et c'est délicat (dans les autres cas) de justifier a priori que y garde un signe constant sur I donc qu'un tel calcul est valide.*
- *Le résultat du théorème est suffisamment simple et puissant pour qu'on l'utilise tel quel.*

***EXEMPLE 4.3* :** On résout $(E_0)\ :\ (t^2-1)y'+ty=0$.

4.1.5 : Variation de la constante

Théorème 4.1

Soit $a, b : I \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec I <u>intervalle</u> et a et b continues, on pose alors $(E)\ :\ y' + ay = b$. En notant $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a sur I et B une primitive de be^{A}, on a de nouveau une équivalence : y solution de $(E) \iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ y = Be^{-A} + \lambda e^{-A} = (B + \lambda)e^{-A}$.

<u>*REMARQUE 4.6*</u> *:*

• *La méthode de "***variation de la constante***" tire son nom du paramétrage suivant et du calcul qui s'en suit. On aurait pu dire que, e^{A} ne s'annulant jamais sur I, on peut écrire toute fonction dérivable $y : I \to \mathbb{K}$ sous la forme $y = \lambda e^{-A}$ avec $\lambda : I \to \mathbb{K}$ dérivable aussi.*

On a alors : y solution de $(E) \iff (\lambda e^{-A})' + a\lambda e^{-A} = b \iff \lambda' = be^{A} \iff \lambda = B + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$.

La constante λ de la proposition 4.9 s'est transformée en une fonction (donc qui "varie") pour nous permettre de trouver une solution particulière à cette équation différentielle.

• *Il faut effectuer tous les calculs car on vérifie ainsi qu'on ne s'est pas trompé dans la phase homogène si les termes en λ se simplifient.*

• *Cette expression des solutions fournit une solution au problème de* Cauchy *car si $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, comme une primitive de a et $A : I \to \mathbb{K}$ définie par : $\forall t \in I,\ A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)du$ et qu'une primitive de be^{A} est $B : I \to \mathbb{K}$ définie par : $\forall t \in I,\ B(t) = \int_{t_0}^{t} b(u)e^{A(u)}du$, on en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions $y : I \to \mathbb{K}$ définies par : $\forall t \in I,\ y(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(u)e^{A(u)}du + \alpha\right)e^{-A(t)}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$.*

Il vient alors facilement : $y(t_0) = y_0 \iff (B(t_0) + \alpha)e^{-A(t_0)} = y_0 \iff \alpha = y_0$.

• *Il y a donc* **existence et unicité au problème de** Cauchy *: l'unique solution y de (E) qui vérifie $y(t_0) = y_0$ est telle que : $\forall t \in I,\ y(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(u)e^{A(u)}du + y_0\right)e^{-A(t)}$ avec $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)du$.*

Méthode

Quand on se trouve confronté à une équation $(E)\ :\ ay' + by = c$:

- **On détermine les intervalles où a ne s'annule pas.**
- **Sur chacun de ceux-ci, on résout l'équation homogène $(E_0)\ :\ y' + \frac{b}{a}y = 0$ (on essaie de se débarrasser des valeurs absolues autant que possible) en faisant intervenir une constante λ (réelle ou complexe selon le contexte).**
- **Sur chaque intervalle, on résout (E) en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante, par identification ou parce qu'elle est "évidente".**
- **On écrit alors la forme générale des solutions de (E).**
- **S'il y a lieu, on tente de raccorder les solutions aux points singuliers (c'est-à-dire aux points où la fonction a s'annule).**
- **On dessine l'allure des solutions de (E) : prolongement, limites, asymptotes, ... en s'appuyant sur le théorème de Cauchy-Lipschitz qui implique que ces graphes remplissent le plan et qu'ils ne se croisent jamais (sauf éventuellement en les points singuliers).**

<u>***EXEMPLE 4.4***</u> ***:*** On résout $(E)\ :\ (t^2 - 1)y' + ty = 1$.

PARTIE 4.2 : ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

4.2.1 : Équation homogène complexe

⊙ On considère dans ce paragraphe des équations du type $(E_0)\ :\ ay'' + by' + cy = 0$ où l'on cherche des solutions à variable réelle mais à valeurs complexes et où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$.

Définition 4.2

*On associe à une telle équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants l'***équation caractéristique** $(E_c)\ :\ az^2 + bz + c = 0$.

Théorème 4.2

On sait résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}$ en posant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- **si $\Delta \neq 0$, en notant z_1 et z_2 les deux solutions de (E_c), les solutions de (E_0) sont les fonctions y de la forme $y(t) = \alpha_1 e^{z_1 t} + \alpha_2 e^{z_2 t}$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$.**
- **si $\Delta = 0$, en notant $z_1 = -\dfrac{b}{2a}$ l'unique solution (double) de (E_c), les solutions de (E_0) sont les fonctions y de la forme $y(t) = (\alpha_1 t + \alpha_2)e^{z_1 t}$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$.**

Démonstration : Soit z_1 une solution de (E_c), alors $\varphi_1 = e^{z_1 t}$ est une solution de (E_0).
On prend $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction deux fois dérivable et on pose $y = \lambda\varphi_1$, alors :

$$y \text{ solution de } (E) \iff [a(\lambda'' + 2z_1\lambda' + z_1^2\lambda) + b(\lambda' + z_1\lambda) + c\lambda]\varphi_1 = 0 \iff a\lambda'' + (2az_1 + b)\lambda' = 0\,.$$

EXEMPLE 4.5 : On résout $(E_1)\ :\ y'' + y' + y = 0$ et $(E_2)\ :\ y'' - 2iy' - y = 0$.

4.2.2 : Équation homogène réelle

⊙ Le passage par les complexes nous fournit les solutions réelles d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants mais réels, c'est-à-dire de $(E_0)\ :\ ay'' + by' + cy = 0$ où l'on cherche des solutions à variable réelle et à valeurs réelles avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.

Théorème 4.3

On sait résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}$ en posant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- **si $\Delta > 0$, en notant z_1 et z_2 les deux solutions réelles de (E_c), les solutions de (E_0) sont les fonctions y de la forme $y(t) = \alpha_1 e^{z_1 t} + \alpha_2 e^{z_2 t}$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.**
- **si $\Delta = 0$, en notant $z_1 = -\dfrac{b}{2a} \in \mathbb{R}$ l'unique solution (double) de (E_c), les solutions réelles de (E_0) sont les fonctions y de la forme $y(t) = (\alpha_1 t + \alpha_2)e^{z_1 t}$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.**
- **si $\Delta < 0$, en notant $z_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ et $z_2 = \alpha - i\beta$ ($(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$) les deux solutions complexes conjuguées de (E_c), les solutions réelles de (E_0) sont les fonctions y de la forme $y(t) = \big(\alpha_1 \cos(\beta t) + \alpha_2 \sin(\beta t)\big)e^{\alpha t}$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.**

REMARQUE 4.7 : Dans les trois cas, l'ensemble des solutions de (E_0) peut-être vu comme un plan de fonctions ; il est engendré par deux fonctions (qui jouent le même rôle que les deux vecteurs $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$).

EXEMPLE 4.6 : On résout (en cherchant les solutions réelles) les trois équations suivantes :
$(E_1)\ :\ y'' - 14y' + 45y = 0$, $(E_2)\ :\ y'' - 2y' + y = 0$ et $(E_3)\ :\ y'' - y' + y = 0$.

4.2.3 : Second membre exponentielle-polynôme

⊙ On considère maintenant le même type d'équations mais avec second membre : $(E) \ : \ ay'' + by' + cy = f$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On sait trouver facilement une solution particulière de cette équation quand f a une forme simple : si c'est une fonction exponentielle-polynôme dans le cas complexe et même si c'est une fonction exponentielle-polynôme-cosinus (ou sinus) dans le cas réel. On admet les résultats suivants :

Théorème 4.4

Si $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, $f(t) = P(t)e^{zt}$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$, on a trois cas :

- **Si z n'est pas solution de (E_c), il existe une solution complexe de (E) de la forme $y = Q(t)e^{zt}$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(Q) = \deg(P)$.**
- **Si z est solution simple de (E_c), il existe une solution complexe de (E) de la forme $y = tQ(t)e^{zt}$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(Q) = \deg(P)$.**
- **Si z est solution double de (E_c) (seul z est solution de (E_c)), il existe une solution complexe de (E) de la forme $y = t^2Q(t)e^{zt}$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(Q) = \deg(P)$ (on a même dans ce cas $a(t^2Q(t))'' = P(t)$).**

EXEMPLE 4.7 : Quelle est la forme d'une solution particulière pour les équations suivantes ? $(E_1) \ : \ y'' + y' + y = e^{jt} + t$ et $(E_2) \ : \ y'' - 2iy' - y = te^{it} + e^{2t}$.

REMARQUE 4.8 : On peut passer par les complexes pour trouver une solution particulière de (E) *si ses coefficients sont réels sachant que la partie réelle d'une solution* y *de* $(E') \ : \ ay'' + by' + cy = f$ *(si* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$*) est solution de* $(E) \ : \ ay'' + by' + cy = \mathrm{Re}(f)$*. Mais on peut aussi utiliser le résultat admis suivant :*

Théorème 4.5

C'est un peu plus lourd dans le cas réel :

Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$, $f(t) = P(t)e^{zt}$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{R}$, on a trois cas :

- **Si z n'est pas solution de (E_c), il existe une solution réelle de (E) de la forme $y = Q(t)e^{zt}$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(Q) = \deg(P)$.**
- **Si z est solution simple de (E_c), il existe une solution réelle de (E) de la forme $y = tQ(t)e^{zt}$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(Q) = \deg(P)$.**
- **Si z est solution double de (E_c), il existe une solution réelle de (E) de la forme $y = t^2Q(t)e^{zt}$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(Q) = \deg(P)$ (on a même $a(t^2Q(t))'' = P(t)$).**

Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$, $f(t) = \Big(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)\Big)e^{\alpha t}$ avec $(P_1, P_2) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors on a trois cas :

- **Si $\alpha + i\beta$ n'est pas solution de (E_c), il existe une solution réelle de (E) de la forme $y = \Big(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)\Big)e^{\alpha t}$ avec $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel qu'on ait l'inégalité $\mathrm{Max}\big(\deg(Q_1), \deg(Q_2)\big) \leqslant \mathrm{Max}\big(\deg(P_1), \deg(P_2)\big)$.**
- **Si $\alpha + i\beta$ est solution simple de (E_c), il existe une solution réelle de (E) de la forme $y = t\Big(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)\Big)e^{\alpha t}$ avec $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel qu'on ait l'inégalité $\mathrm{Max}\big(\deg(Q_1), \deg(Q_2)\big) \leqslant \mathrm{Max}\big(\deg(P_1), \deg(P_2)\big)$.**

EXEMPLE 4.8 : Quelle est la forme d'une solution particulière pour les 3 équations suivantes ?

$$\begin{array}{rcrcl} (E_1) & : & y'' - 14y' + 45y & = & \cos(t) + e^t + te^{5t} \\ (E_2) & : & y'' + 2y' + y & = & t\sin(t)e^t + t^2e^{-t} + e^{2t} \\ (E_3) & : & y'' - 2y' + 2y & = & t\cos(t)e^t + t^2 + t + 1 + te^t \end{array}$$

Méthode

Quand on cherche les solutions réelles d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = f$:

- **On résout l'équation caractéristique $(E_c)\ : az^2 + bz + c = 0$ associée.**
- **On en déduit la forme des solutions de l'équation homogène $(E_0)\ :\ ay'' + by' + cy = 0$ en faisant intervenir deux constantes λ_1 et λ_2.**
- **On cherche une solution particulière de (E) la plupart du temps par identification si le second membre f est une somme d'exponentielle-polynôme.**
- **On écrit enfin la forme générale des solutions réelles de (E).**

4.2.4 : Propriétés des solutions

REMARQUE 4.9 : Les trois points qui viennent sont utiles mais hors programme (HP) :

- *Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 résolue $(E)\ :\ y'' + ay' + by = f$ où a, b, f sont des fonctions de I (intervalle) dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue ; alors d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ : $\forall t_0 \in I,\ \forall (y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2,\ \exists! y : I \to \mathbb{K}$ solution de (E) telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$. On sait qu'alors l'ensemble des solutions de (E_0) est engendré par deux fonctions φ_1 et φ_2 et qu'il existe une solution particulière φ de (E) sur I de sorte que par linéarité les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y = \varphi + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.*
- *Quand on n'a trouvé que φ_1 solution de (E_0), pour trouver φ_2 on peut effectuer une variation de la constante en cherchant φ_2 sous la forme $\lambda_1\varphi_1$ avec $\lambda_1 : I \to \mathbb{K}$ dérivable : ça marche !*
- *Quand on a trouvé φ_1 et φ_2 solutions de (E_0) telles que $\mathcal{S}_{E_0} = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$ on trouve une solution particulière $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ en résolvant le système $\begin{cases} \lambda_1'\varphi_1 + \lambda_2'\varphi_2 &= 0 \\ \lambda_1'\varphi_1' + \lambda_2'\varphi_2' &= f \end{cases}$ (c'est encore une variation mais ici de deux constantes) et en intégrant ensuite pour avoir <u>les fonctions</u> λ_1 et λ_2.*

⊙ Sans tenir compte de ces considérations générales qui dépassent le programme, on peut quand même établir l'existence et l'unicité au problème de CAUCHY dans le cadre des équations différentielles linéaires à coefficients constants avec second membre "classique" :

Proposition 4.10

Soit $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = f$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction exponentielle-polynôme (et même peut-être avec des cosinus ou des sinus) ; alors :
$\forall t_0 \in \mathbb{R},\ \forall (y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2,\ \exists! y : I \to \mathbb{K}$ solution de (E) telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$.

PARTIE 4.3 : ANNEXES

REMARQUE 4.10 : **Équations à variables séparables** *: ce sont des équations du premier ordre de la forme* $(E)\ :\ y'f(y) = g(t)$ *où* f *et* g *sont des fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Si* F *(resp.* G*) est une primitive de* f *(resp.* g*) sur des bons intervalles, une solution* y *de* (E) *sur* $J \subset I$ *vérifie* $F(y) = G(t) + k$ *avec* $k \in \mathbb{K}$ *; il faut espérer ensuite que* F *soit bijective pour qu'on puisse écrire* $y = F^{-1}(G(t) + k)$ *qu'il faut ensuite tracer. Les* **solutions maximales** *ne sont pas forcément définies sur les mêmes intervalles comme c'était le cas pour les équations linéaires.*

REMARQUE 4.11 : **Équations homogènes** *: ce sont des équations de la forme* $(E)\ :\ y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$ *où* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue. Si* y *est solution de* (E) *sur* I *et que* $\lambda \neq 0$, *alors la fonction* $y_\alpha : \frac{I}{\alpha} \to \mathbb{R}$ *définie par* $\forall t \in \frac{I}{\alpha},\ y_\alpha(t) = \frac{y(\alpha t)}{\alpha}$ *vérifie aussi* (E) *donc l'image par toute homothétie de centre* O *dans* $\mathbb{R}^2$ *d'un graphe de solution est encore un graphe de solution.*

On cherche d'abord les fonctions linéaires $y = \lambda x$ *solutions de* (E), *c'est-à-dire les* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels que* $\lambda = f(\lambda)$ *; ensuite pour des solutions* $y : I \to \mathbb{R}$ $(0 \notin I)$ *telles que* $\forall t \in I,\ f\left(\frac{y}{t}\right) \neq \frac{y}{t}$, *on pose* $z = \frac{y}{t}$ *et on obtient :* $\forall t \in I,\ \frac{z'}{f(z) - z} = \frac{1}{t}$ *qui est à variables séparables. On trouve alors* t *dépendant de* z *et d'une constante* $\lambda \in \mathbb{R}$ *d'où un paramétrage de* $t = h_\lambda(z)$ *et* $y = z \times h_\lambda(z)$ *des courbes solutions.*

REMARQUE 4.12 : **Équations de** BERNOULLI *: ce sont des équations du type* $(E)\ :\ ay' + by + cy^\alpha = 0$ *où* a, b *et* c *sont des fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *et* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. *Sur des intervalles où ni* a *ni* y *ne s'annule, on pose* $z = y^{1-\alpha}$ *si* y *solution de* (E) *et* y *n'est pas la fonction nulle, on trouve alors* $z' = (\alpha - 1)\frac{bz + c}{a}$ *qu'on sait de nouveau résoudre.*

REMARQUE 4.13 : **Équations de** RICCATI *: ce sont des équations de la forme* $(E)\ :\ ay' + by + cy^2 = d$ *où* a, b, c *et* d *sont des fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$. *Si on trouve une solution particulière* y_0 *de* (E) *alors en posant* $z = y - y_0$, *la fonction* z *vérifie une équation de* BERNOULLI *qu'on sait maintenant résoudre.*

REMARQUE 4.14 : **Méthode d'**EULER *: c'est une méthode inventée par* EULER *vers 1750 pour approcher les solutions d'équations différentielles scalaires* $(E)\ :\ y' = f(t, y)$ *: on se donne en plus* t_0 *et* y_0 *et on cherche l'unique solution* y *de* (E) *qui vérifie* $y(t_0) = y_0$.

L'idée consiste, à partir de t_0, *à estimer la fonction* y *un peu plus loin (à une distance* h *fixée et qui s'appelle le* **pas***) en se servant de* $y'(t_0) = f\big(t_0, y(t_0)\big)$ *et en assimilant localement la courbe à sa tangente en* t_0 *: cela consiste à confondre* $y(t_0 + h)$ *avec* $y(t_0) + y'(t_0)h = y(t_0) + h f\big(t_0, y(t_0)\big)$ *(ou* $y(t_0 - h)$ *avec* $y(t_0) - h f\big(t_0, y(t_0)\big)$*). On continue ensuite vers la droite à partir de cet instant* $t_1 = t_0 + h$ *(resp.* $t_{-1} = t_0 - h$ *vers la gauche) avec la valeur qu'on vient de calculer et qui approche* $y(t_1)$ *(resp.* $y(t_{-1})$*).*

Il faut ensuite contrôler la précision de la méthode en faisant décroître le pas et en majorant l'erreur commise ; avec des conditions raisonnables de continuité de la fonction f, *on a convergence de l'approximation vers l'unique solution de l'équation différentielle (admis).*
Comme ceci on trouve $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t$ *avec* $y' = y$ *et* $y(0) = 1$.