CHAPITRE 5 APPLICATIONS ET RELATIONS

PARTIE 5.1 : APPLICATIONS

⊙ La notion de fonction et d'application a été un peu floue dans l'histoire des mathématiques, elle a évolué de Leibniz à Euler (le premier à noter $f(x)$) en passant par Jean Bernoulli et Newton : on n'étudiait ce genre de fonctions que si l'expression $f(x)$ était issue d'une solution d'équation ou d'une expression analytique "simple".

⊙ Mais c'est au milieu du vingtième siècle avec l'école Bourbaki (Nicolas Bourbaki est le nom d'un mathématicien imaginaire sous lequel un groupe de mathématiciens écrit par exemple les "Élements de mathématique") que l'on formalise ces concepts.

5.1.1 : Définitions et opérations

Définition 5.1

On appelle **application** *(ou* **fonction***) la donnée de :*

- *un ensemble E appelé* **ensemble de départ***.*
- *un ensemble F appelé* **ensemble d'arrivée***.*
- *pour tout $x \in E$, un unique $y \in F$ appelé* **image de** x *par cette application.*

Si on note f cette application, on écrira $f(x)$ pour l'image de x par f, on dira que f est une application de E dans (ou vers) F et on écrira $\begin{cases} f: & E & \rightarrow & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{cases}$.

Définition 5.2

Si $f : E \rightarrow F$ est une application :

- *On notera Γ_f et on appellera* **graphe** *de f la partie suivante de $E \times F$: $\Gamma_f = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$.*
- *On appelle* **image** *de f, noté $\operatorname{Im} f$ la partie de F définie par : $\operatorname{Im} f = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$.*
- *Si $y \in F$ et $x \in E$ on dit que x est un* **antécédent** *de y par f si $y = f(x)$.*

REMARQUE 5.1 :

- *$f : E \rightarrow F$ et $g : E' \rightarrow F'$ sont dites* **égales***, noté $f = g$, si $E = E'$ et $F = F'$ et $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.*
- *Toutefois on pourra noter du même nom deux fonctions qui diffèrent par leurs ensembles de départ et/ou d'arrivée mais qui sont construites de la même manière ; $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$.*

Définition 5.3

Si E et F sont deux ensembles non vides, on peut définir l'ensemble de toutes les applications de E dans F noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou $\mathcal{A}(E, F)$.

Définition 5.4

Si on se donne trois ensembles non vides E, F et G et deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ alors on peut définir la **composée de** g **par** f*, notée $g \circ f : E \rightarrow G$ par : $\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g(f(x))$.*

REMARQUE 5.2 : Pour pouvoir composer les deux applications il suffit que l'ensemble d'arrivée de f soit inclus dans l'ensemble de départ de g. Plus généralement, il est même suffisant que, si $f : E \rightarrow K$ et $g : F \rightarrow G$, on ait : $\forall x \in E,\ f(x) \in F$.

EXEMPLE 5.1 : On peut composer $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : [-1;1] \to \mathbb{R}_+$ définie par la relation : $\forall x \in [-1;1],\ f(x) = \sqrt{1-x^2}$ pour obtenir : $h = f \circ \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = |\cos x|$.

Proposition 5.1

Il y a associativité de la composition, c'est-à-dire que si on se donne quatre ensembles non vides E, F et G, H et trois applications $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$ alors on a :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

REMARQUE 5.3 : Par contre, si on peut composer et comparer $f \circ g$ et $g \circ f$, il n'y a aucune raison que $f \circ g = g \circ f$: la composition n'est pas commutative en général.

Définition 5.5

Si E et F sont des ensembles non vide, A une partie non vide de E et B une partie non vide de F alors :

- *On définit $\mathrm{id}_E : E \to E$ par : $\forall x \in E,\ \mathrm{id}_E(x) = x$ (* **application identité de** *E).*
- *On définit $i_A : A \to E$ par $\forall x \in A,\ i_A(x) = x$ (* **injection canonique de** *A* **dans** *E).*
- *Si $f : E \to F$, on définit la* **restriction** *$f|_A : A \to F$ de f à A par : $\forall x \in A,\ f|_A(x) = f(x)$.*
- *Si $g : A \to F$ existe, on dit que f est un* **prolongement** *de g à E si g est la restriction de f à A.*
- *On définit la restriction $f|^B : E \to B$ de f à B à l'arrivée, si $\mathrm{Im}\, f \subset B$, par : $\forall x \in E, f|^B(x) = f(x)$.*

REMARQUE 5.4 : On a bien sûr les relations, pour $f : E \to F$ une application, $A \subset E$ et $B \subset F$:

• $f \circ \mathrm{id}_E = f$, • $\mathrm{id}_F \circ f = f$, • $f \circ i_A = f|_A$ *et si cela a un sens* • $i_B \circ f|^B = f$.

5.1.2 : Injections, surjections, bijections

Définition 5.6

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application, on dit que :

- *f est* **injective** *si $\forall y \in F$, y possède au plus un antécédent par f.*
- *f est* **surjective** *si $\forall y \in F$, y possède au moins un antécédent par f.*
- *f est* **bijective** *si $\forall y \in F$, y possède exactement un antécédent par f.*

On dit aussi dans ces trois cas que f est une **injection**, *une* **surjection** *ou une* **bijection**.

EXEMPLE 5.2 : • $\cos : [0;\pi] \to \mathbb{R}$ est injective, non surjective.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - x$ est surjective, non injective.
- $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est injective et surjective donc elle est bijective.

Proposition 5.2

Avec ces notations, on peut traduire ceci avec les quantificateurs :

- **f est injective** $\iff \big(\forall (x_1,x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2\big)$.
- **f est injective** $\iff \big(\forall (x_1,x_2) \in E^2,\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\big)$.
- **f est surjective** $\iff \big(\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\big)$.
- **f est bijective** $\iff \big(\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)\big)$.

Méthode

Soit $f : E \to F$ une application :

- **Pour montrer "f injective" ; soit $(x_1,x_2) \in E^2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$,... on prouve $x_1 = x_2$.**
- **Pour montrer "f injective" ; soit $(x_1,x_2) \in E^2$ tels que $x_1 \neq x_2$,... on prouve $f(x_1) \neq f(x_2)$.**
- **Pour montrer "f surjective" ; soit $y \in F$, on trouve un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.**
- **Pour montrer "f bijective", on montrera souvent qu'elle est injective et surjective.**

REMARQUE 5.5 : Bien sûr, l'injection canonique de A *dans* E *est une injection : en effet si* $A \subset E$ *et* $(x_1, x_2) \in A^2$ *tel que* $i_A(x_1) = i_A(x_2)$ *alors on a par définition* $x_1 = x_2$.

REMARQUE 5.6 : Avec les restrictions, on peut modifier les caractéristiques d'une application :

- *Si* $f : E \to F$ *est une application non injective (resp. non surjective), on peut la rendre injective en réduisant son ensemble de départ (resp. d'arrivée).*
- *Si* $f : E \to F$ *est une application quelconque, l'application* $f|^{\operatorname{Im} f}$ *est toujours surjective.*

EXEMPLE 5.3 : C'est ce principe qu'on peut utiliser pour la fonction sinus, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est ni injective ni surjective ; on la rend tout d'abord injective en la restreignant son ensemble de départ : $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ mais celle-ci est injective sans être surjective alors on restreint à l'arrivée et on considère $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$ qui est bijective.

Proposition 5.3

Pour $f : E \to F$**, on a une caractérisation simple de la surjectivité :** f **surjective** $\iff \operatorname{Im} f = F$**.**

Théorème 5.1

Soit $f : E \to F$ **et** $g : F \to G$ **deux applications, on a :**

- f **et** g **injectives** $\Longrightarrow g \circ f$ **injective.**
- f **et** g **surjectives** $\Longrightarrow g \circ f$ **surjective.**
- f **et** g **bijectives** $\Longrightarrow g \circ f$ **bijective.**
- $g \circ f$ **injective** $\Longrightarrow f$ **injective.**
- $g \circ f$ **surjective** $\Longrightarrow g$ **surjective.**

REMARQUE 5.7 : • *Si ce ne sont que des implications, c'est que les réciproques sont toutes fausses.*

- *Bien sûr, avec les mêmes notations, on a l'implication suivante mais rien de plus dans le cas général :*

$$g \circ f \text{ bijective} \Longrightarrow (f \text{ injective et } g \text{ surjective}).$$

Définition 5.7

Soit E *un ensemble non vide, une bijection de* E *dans* E *est appelée une* **permutation** *de* E *et l'ensemble des permutations de* E *est noté* $\boldsymbol{\sigma}(E)$.
Une application f *de* E *dans* E *telle que* $f \circ f = \mathrm{id}_E$ *est appelée une* **involution**.

Proposition 5.4

Soit $f : E \to F$ **une application, les deux assertions suivantes sont équivalentes :**

(i) f **est bijective.**
(ii) **il existe une application** $g : F \to E$ **telle que** $g \circ f = \mathrm{id}_E$ **et** $f \circ g = \mathrm{id}_F$**.**

REMARQUE 5.8 : Attention, il est possible d'avoir $f \circ g = \mathrm{id}_F$ *sans avoir* $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

EXEMPLE 5.4 : Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \sqrt{x}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Alors on a $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$ alors que $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

REMARQUE 5.9 : Dans la proposition précédente, si f *est bijective, l'application* $g : F \to E$ *vérifiant* (ii) *est unique en utilisant l'associativité de la composition.*

Définition 5.8

Soit $f : E \to F$ *bijective, on appelle* **réciproque de** f*, notée* f^{-1}*, l'unique application* $f^{-1} : F \to E$ *telle que* $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ *et* $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.

Proposition 5.5

Soit $f : E \to F$ **et** $g : F \to G$ **deux applications bijectives, alors on a :**
f^{-1} **est bijective et** $(f^{-1})^{-1} = f$ **et** $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$**.**

REMARQUE 5.10 : Si f *est une involution de* E*, alors on a* f *bijective donc* f *est une permutation de* E *et on a toujours grâce à la proposition 5.4 :* $f^{-1} = f$.

5.1.3 : Images directes et réciproques

Définition 5.9

Soit $f : E \to F$ *une application et* $A \subset E$, $B \subset F$*. On définit :*
- *l'***image directe de** A **par** f*, notée* $\widehat{f}(A)$*, par* $\widehat{f}(A) = \{\, y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \,\}$.
- *l'***image réciproque de** B **par** f*, notée* $f^{<-1>}(B)$*, par* $f^{<-1>}(B) = \{\, x \in E \mid f(x) \in B \,\}$.

REMARQUE 5.11 :

- *Avec ces notations,* $\widehat{f}(A)$ *est l'ensemble des éléments de l'ensemble d'arrivée qui sont des images d'éléments de* A *;* $f^{<-1>}(B)$ *est l'ensemble des éléments de* E *dont l'image est dans* B *ou, autrement dit, ce sont tous les antécédents des éléments de* B.

- *On vient donc de définir deux nouvelles applications associées à* f*, et qui sont :*

$$\widehat{f} : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & \widehat{f}(A) \end{cases} \quad \text{et} \quad f^{<-1>} : \begin{cases} \mathcal{P}(F) & \to & \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{<-1>}(B) \end{cases}$$

- *Attention à la confusion entre* f^{-1} *(qui n'est définie que si* f *est bijective et qui est alors une application entre* F *et* E*) et* $f^{<-1>}$ *(qui est définie même si* f *n'est pas bijective et qui va de* $\mathcal{P}(F)$ *dans* $\mathcal{P}(E)$*).*

- *Il est immédiat qu'on a les résultats suivants :* $\widehat{f}(E) = \operatorname{Im} f$, $\widehat{f}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{<-1>}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{<-1>}(F) = E$, $\forall x \in E,\ \widehat{f}(\{x\}) = \{f(x)\}$ *et, si* $A \subset E$, $A \neq \emptyset \Longrightarrow \widehat{f}(A) \neq \emptyset$ *; de plus, si* $y \in F$, $f^{<-1>}(\{y\})$ *est la partie de* E *contenant tous les antécédents de* y *par* f.

- *Attention encore à la différence suivante, pour* $A \in \mathcal{P}(E)$, $B \in \mathcal{P}(F)$, $x \in E$*, on a l'équivalence pratique* $f(x) \in B \iff x \in f^{<-1>}(B)$ *alors qu'on n'a que l'implication :* $x \in A \Longrightarrow f(x) \in \widehat{f}(A)$ *; en effet si* $f(x) \in \widehat{f}(A)$ *c'est que* $f(x)$ *admet un antécédent dans* A *mais celui-ci n'est pas forcément* x.

EXEMPLE 5.5 : Si on définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ alors on a : $\widehat{f}([0;1]) = [0;1]$, $f^{<-1>}([0;1]) = [-1;1]$, $f^{<-1>}([-1;1]) = [-1;1]$, $\widehat{f}([-1;1]) = [0;1]$.

REMARQUE 5.12 : On voit sur cet exemple que, dans le cas général, la fonction $f^{<-1>}$ *n'est pas la réciproque de la fonction* $\widehat{f}$ *: c'est-à-dire que, pour* $A \subset E$*, on a en général* $f^{<-1>}(\widehat{f}(A)) \neq A$ *et pour* $B \subset F$*, on a en général* $\widehat{f}(f^{<-1>}(B)) \neq B$.

Définition 5.10

Toujours pour une application $f : E \to F$ *et deux parties* $A \in \mathcal{P}(E)$ *et* $B \in \mathcal{P}(F)$*, on peut, seulement si* $\widehat{f}(A) \subset B$*, définir la* **corestriction de** f **à** A **au départ et** B **à l'arrivée***, et c'est l'application* $f|_A^B : A \to B$ *définie par :* $\forall x \in A,\ f|_A^B(x) = f(x)$.

Proposition 5.6

Avec les notations précédentes, pour $(A, A') \in (\mathcal{P}(E))^2$ **et** $(B, B') \in (\mathcal{P}(F))^2$ **:**

- $A \subset A' \Longrightarrow \widehat{f}(A) \subset \widehat{f}(A')$ **et** $B \subset B' \Longrightarrow f^{<-1>}(B) \subset f^{<-1>}(B')$ **(croissance de** $\widehat{f}$ **et** $f^{<-1>}$**).**
- $\widehat{f}(A \cup A') = \widehat{f}(A) \cup \widehat{f}(A')$ **et** $\widehat{f}(A \cap A') \subset \widehat{f}(A) \cap \widehat{f}(A')$**.**
- $f^{<-1>}(B \cup B') = f^{<-1>}(B) \cup f^{<-1>}(B')$ **et** $f^{<-1>}(B \cap B') = f^{<-1>}(B) \cap f^{<-1>}(B')$**.**

<u>REMARQUE 5.13</u> : Attention au fait que trois des quatre dernières relations sont des égalités alors que l'une est seulement une inclusion, on peut très bien avoir une inclusion stricte.

5.1.4 : Familles

Définition 5.11

Soit I *et* E *deux ensembles non vides, on appelle* **famille d'éléments de** E **indexée par** I *(indices) toute application* f *de* I *dans* E *où l'on note l'image* x_i *plutôt que* $f(i)$ *: on note cette famille* $(x_i)_{i \in I}$*. L'ensemble de toutes ces familles est noté* E^I*.*

<u>EXEMPLE 5.6</u> : En notant $[\![1; 6]\!] = [1; 6] \cap \mathbb{N}$, $(2^i)_{i \in [\![1;6]\!]} = (2, 4, 8, 16, 32, 64)$ est une famille d'entiers indexée par $[\![1; 6]\!]$, on dit aussi que c'est un sextuplet d'entiers.

<u>REMARQUE 5.14</u> :

- *Une suite de réels* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une famille de réels indexée par* $\mathbb{N}$.
- *On retrouve la définition du produit cartésien d'ensembles vue précédemment, si* n *est un entier et* E *un ensemble, on peut en pratique confondre* E^n *et* $E^{[\![1;n]\!]}$.

Définition 5.12

Soit I *et* E *deux ensembles non vides et* $(A_i)_{i \in I}$ *une famille de parties de* E *indexée par* I*, c'est-à-dire que* $\forall i \in I,\ A_i \in \mathcal{P}(E)$*. On définit alors l'***intersection et la réunion de cette famille** *par :*

- $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$
- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$.

<u>REMARQUE 5.15</u> : Si $I = [\![1; n]\!]$ *pour un entier* $n \in \mathbb{N}^*$*, on peut aussi noter* $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ *à la place de* $\displaystyle\bigcap_{i \in [\![1;n]\!]} A_i$ *(idem pour la réunion). On pourra aussi remplacer* $\displaystyle\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ *par* $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$.

<u>EXEMPLE 5.7</u> : • $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k; k+1[= \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; $\displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left]-\frac{1}{2^k}; \frac{1}{2^k}\right[= \{0\}$.

• $\displaystyle\cos^{<-1>}(]0; 1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

PARTIE 5.2 : RELATIONS BINAIRES

5.2.1 : Définition et caractéristiques d'une relation

Définition 5.13

Soit E un ensemble non vide, on appelle **relation binaire** *sur E une application qui à chaque couple (x, y) de $E \times E$ associe une valeur de vérité : vrai ou faux. On note une relation binaire $\mathcal{R}$ de la manière suivante : si $(x, y) \in E^2$, on note $x\mathcal{R}y$ cette valeur de vérité.*

***EXEMPLE 5.8* :**

- Si E est l'humanité, on peut définir la relation $\mathcal{R}_1$ par $x\mathcal{R}_1y$ si x a déjà vu (en vrai) y.
- si $E = \mathbb{N}^*$ on peut définir $\mathcal{R}_2$ par $n\mathcal{R}_2m$ si tous les diviseurs premiers de n sont des diviseurs premiers de m. Par exemple $60\ \mathcal{R}_2\ 30$ alors que $\mathrm{non}(6\ \mathcal{R}_2\ 10)$.

Définition 5.14

Pour une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E, on dit que :

- *$\mathcal{R}$ est* **réflexive** *si $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$.*
- *$\mathcal{R}$ est* **symétrique** *si $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$.*
- *$\mathcal{R}$ est* **antisymétrique** *si $\forall (x, y) \in E^2,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y$.*
- *$\mathcal{R}$ est* **transitive** *si $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.*

***EXEMPLE 5.9* :** Dans l'exemple précédent : $\mathcal{R}_1$ n'est ni réflexive, ni symétrique, ni antisymétrique ni transitive ; $\mathcal{R}_2$ est réflexive, non symétrique, non antisymétrique mais transitive.

REMARQUE 5.16 : Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire dans E et que $A \subset E$, on peut définir la relation $\mathcal{R}_A$ induite par $\mathcal{R}$ dans A par : $\forall (x, y) \in A^2,\ x\mathcal{R}_Ay \iff x\mathcal{R}y$. Bien sûr, $\mathcal{R}_A$ récupère les mêmes propriétés que $\mathcal{R}$: elle est réflexive si $\mathcal{R}$ l'est par exemple ; par contre, $\mathcal{R}_A$ peut avoir des propriétés que $\mathcal{R}$ n'a pas.

5.2.2 : Relation d'ordre

Définition 5.15

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, on dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** *si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre* **total** *si elle vérifie en plus des propriétés précédentes : $\forall (x, y) \in E^2,\ (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x)$. Un ordre qui n'est pas total est dit* **partiel***.*

***EXEMPLE 5.10* :**

- Les relations $=$, $\subset$, $\leqslant$, $|$ (divise) sont des relations d'ordre.
- Pour les noms en français, on utilise l'ordre lexicographique (ou alphabétique) : qui est total.

Définition 5.16

Soit E un ensemble ordonné par $\mathcal{R}$, A une partie de E et x un élément de E.
On dit que x est un **minorant** *(resp.* **majorant***) de A si $\forall a \in A,\ x\mathcal{R}a$ (resp. $\forall a \in A,\ a\mathcal{R}x$).*
On dit que A est **minorée** *(resp.* **majorée***) s'il existe un minorant de A (resp. majorant).*

REMARQUE 5.17 : Si x est un majorant de A et que $y \in E$ vérifie $x\mathcal{R}y$ alors par transitivité on a aussi y est un majorant de A : il y a donc rarement unicité du majorant si A est majorée.

Définition 5.17

Soit E *un ensemble ordonné par* $\mathcal{R}$, A *une partie de* E *et* x *un élément de* E.
On dit que x *est le* **plus grand élément** *de* A *(ou le* **maximum** *de* A*) si* x *vérifie deux propriétés :* $x \in A$ *et* x *est un majorant de* A. *On note dans ce cas :* $x = \mathrm{Max}(A)$.
On dit que x *est le* **plus petit élément** *de* A *(ou le* **minimum** *de* A*) si* x *vérifie deux propriétés :* $x \in A$ *et* x *est un minorant de* A. *On note dans ce cas :* $x = \mathrm{Min}(A)$.

REMARQUE 5.18 : Pour avoir le droit d'appeler un tel élément le plus grand élément, il faut vérifier que son existence implique son unicité ce qui se fait sans problème par antisymétrie de $\mathcal{R}$.

Définition 5.18

Soit E *et* F *ordonnés respectivement par* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{R}'$ *et* $f : E \to F$. *On dit que :*
- f *est* **croissante** *si* $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Longrightarrow f(x)\mathcal{R}'f(y)$.
- f *est* **décroissante** *si* $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Longrightarrow f(y)\mathcal{R}'f(x)$.
- f *est* **strictement croissante** *si* $\forall (x, y) \in E^2,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } x \neq y) \Longrightarrow (f(x)\mathcal{R}'f(y) \text{ et } f(x) \neq f(y))$.
- f *est* **strictement décroissante** *si* $\forall (x, y) \in E^2,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } x \neq y) \Longrightarrow (f(y)\mathcal{R}'f(x) \text{ et } f(x) \neq f(y))$.

EXEMPLE 5.11 : L'application $f : \mathbb{N}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = \mathcal{D}_n$ (l'ensemble des diviseurs positifs de n) est strictement croissante si on munit $\mathbb{N}^*$ de $|$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ de $\subset$.

REMARQUE 5.19 : Si la relation d'ordre $\mathcal{R}$ *est totale, on a même :*

$$\begin{aligned} f \text{ est strictement croissante} \quad &\Longleftrightarrow \quad \Big(\forall (x, y) \in E^2,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } x \neq y) \Longleftrightarrow (f(x)\mathcal{R}'f(y) \text{ et } f(x) \neq f(y))\Big) \\ &\Longleftrightarrow \quad \Big(\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x)\mathcal{R}'f(y)\Big). \end{aligned}$$

5.2.3 : Bornes supérieures et inférieures et éléments extrémaux (HP)

Définition 5.19

Soit E *un ensemble ordonné par* $\mathcal{R}$, A *une partie de* E *et* x *un élément de* E.
On note M_a *l'ensemble des majorants de* A *(resp.* M_i *l'ensemble des minorants de* A*).*
On dit que x *est la* **borne supérieure** *(resp.* **inférieure***) de* A, *noté* $x = \mathrm{Sup}(A)$ *(resp.* $x = \mathrm{Inf}(A)$*) si* x *est le minimum (resp. maximum) de* M_a *(resp.* M_i*) : on a donc dans ce cas* $x = \mathrm{Sup}(A) = \mathrm{Min}(M_a)$ *(resp.* $x = \mathrm{Inf}(A) = \mathrm{Max}(M_i)$.

REMARQUE 5.20 :
- *Comme le maximum et le minimum sont uniques, il y a aussi unicité de la borne supérieure (resp. inférieure) si elle existe.*
- *Pour un élément* $x \in A$, *on a :* $x = \mathrm{Min}(A) \Longleftrightarrow x = \mathrm{Inf}(A)$ *par exemple.*

Définition 5.20

Soit E *un ensemble ordonné par* $\mathcal{R}$ *et* $x \in E$ *; on dit que* x *est un élément* **maximal** *(resp.* **minimal***) de* E *si* $\forall y \in E,\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x = y$ *(resp.* $\forall y \in E,\ y\mathcal{R}x \Longleftrightarrow x = y$*).*

REMARQUE 5.21 : Bien sûr être un élément maximum implique qu'on est maximal.

EXEMPLE 5.12 : Dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ muni de la relation d'ordre divisibilité, les éléments minimaux sont les nombres premiers et il n'y a pas d'élément maximal.

5.2.4 : Relation d'équivalence (HP)

Définition 5.21

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, on dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** *si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

EXEMPLE 5.13 :
- L'égalité est une relation d'équivalence dans n'importe quel ensemble.
- Pour les noms en français, la relation "être un anagramme de " est une relation d'équivalence.

Définition 5.22

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et $x \in E$; on définit la **classe d'équivalence** *de x, noté $\overline{x}$, par : $\overline{x} = \{ y \in E \mid x\mathcal{R}y \}$.*

Proposition 5.7

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et $(x, x') \in E^2$, alors on a l'alternative :
- $x\mathcal{R}x' \iff \overline{x} = \overline{x'}$
- $\mathrm{non}(x\mathcal{R}x') \iff \overline{x} \cap \overline{x'} = \emptyset$.

L'ensemble des différentes classes d'équivalence constitue une partition de E.

REMARQUE 5.22 : (HP) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, si on on définit la relation de **congruence modulo m dans $\mathbb{Z}$**, *pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $a \equiv b\ [m] \iff (\exists k \in \mathbb{Z},\ a - b = km)$ alors c'est une relation d'équivalence.*

Elle vérifie les compatibilités suivantes, pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^2$ et $p \in \mathbb{N}$:
- $(a \equiv b\ [m]) \implies (-a \equiv -b\ [m])$;
- $(a \equiv b\ [m]$ *et* $c \equiv d\ [m]) \implies (a + c \equiv b + d\ [m])$;
- $(a \equiv b\ [m]$ *et* $c \equiv d\ [m]) \implies (ac \equiv bd\ [m])$;
- $(a \equiv b\ [m]) \implies (a^p \equiv b^p\ [m])$.

Par la division euclidienne, il n'existe que m classes d'équivalence pour cette relation : $\overline{0}$, $\overline{1}$,..., $\overline{m-1}$.

On note $\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ l'ensemble contenant ces m classes d'équivalence : $\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} = \{ \overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1} \}$.

EXEMPLE 5.14 : Dans $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$, $\overline{3} \times \overline{5} = \overline{1}$ et $\overline{5}^6 = \overline{1}$.