CHAPITRE 6
COURBES DU PLAN

PARTIE 6.1 : COURBES PARAMÉTRÉES

6.1.1 : Terminologie des courbes paramétrées

Définition 6.1

On appelle **courbe paramétrée** *(ou* **arc paramétré***) la donnée d'une application* $\varphi : A \to \mathcal{P}$ *où* A *est une partie de* $\mathbb{R}$ *et* $\mathcal{P}$ *le plan des points. On appelle support ou* **trajectoire** *de la courbe l'ensemble des points atteints par le mouvement :* $\mathcal{C} = \{ M \in \mathcal{P} \mid \exists t \in A,\ M = \varphi(t) \} = \widehat{\varphi}(A)$.

REMARQUE 6.1 :

- *Si le plan est rapporté à un repère cartésien* $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$*, ceci revient à donner deux fonctions* $x : A \to \mathbb{R}$ *et* $y : A \to \mathbb{R}$ *telles que :* $\forall t \in A,\ \varphi(t) = \big(x(t), y(t)\big)_{\mathcal{R}}$*. Cela revient aussi à donner une fonction vectorielle* $\overrightarrow{f} : A \to P$ *telle que :* $\forall t \in A,\ \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{O\varphi(t)}$*. On note* $M_t = \varphi(t)$ *;* $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{OM_t}$.
- *Une courbe paramétrée n'est pas qu'une courbe du plan, il y a aussi une idée de* **mouvement***, donc de* **vitesse***, de* **sens de parcours***, d'***accélération** *: c'est de la* **dynamique**.
- *On peut définir une même courbe en* **cartésiennes***, en* **polaires***, par une* **fonction numérique**.

EXEMPLE 6.1 : Le demi-cercle de centre O et de rayon 1 privé des points $(1,0)_{\mathcal{R}}$ et $(-1,0)_{\mathcal{R}}$ (en supposant $\mathcal{R}$ orthonormé direct) peut être donné par $x(\theta) = \cos(\theta)$ et $y(\theta) = \sin(\theta)$ (en cartésiennes) mais aussi par $\rho(\theta) = 1$ (en polaires) pour $\theta \in]0, \pi[$ ou par $x_1(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y_1(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ (en cartésiennes) pour $t \in]0, +\infty[$ et même par $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ (fonction) pour $x \in]-1, 1[$.

6.1.2 : Limite et dérivée d'une fonction vectorielle de la variable réelle

Définition 6.2

Soit $\overrightarrow{f} : A \to P$ *une fonction vectorielle de la variable réelle. Si* $a \in A$ *et* $\overrightarrow{v} \in P$*, on dira que* f *admet pour* **limite** $\overrightarrow{v}$ *en* a *qu'on écrira* $\lim\limits_{t \to a} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{v}$ *si* $\lim\limits_{t \to a} ||\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{v}|| = 0$.

REMARQUE 6.2 :

- *Avec ces notations, si on note* $\overrightarrow{f}(t) = \big(x(t), y(t)\big)_{\mathcal{B}}$ *et* $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)_{\mathcal{B}}$ *les coordonnées dans une base orthonormée* $\mathcal{B}$ *, alors* $\lim\limits_{t \to a} \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{v} \iff \big(\lim\limits_{t \to a} x(t) = v_1$ *et* $\lim\limits_{t \to a} y(t) = v_2\big)$.
- *On peut aussi définir la dérivée d'une fonction vectorielle et on a un résultat similaire qui dit que* $\overrightarrow{f}$ *est dérivable en* a *ssi les fonctions coordonnées* x *et* y *le sont et qu'on a alors :* $\overrightarrow{f}'(a) = \big(x'(a), y'(a)\big)_{\mathcal{B}}$.

Proposition 6.1

Soit $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ deux fonctions vectorielles dérivables sur A, alors $\overrightarrow{f}.\overrightarrow{g}$, $||\overrightarrow{f}||$ (si $\overrightarrow{f}$ ne s'annule pas sur A) et $\mathrm{Det}(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})$ le sont aussi sur A et on a les formules suivantes : $(\overrightarrow{f}.\overrightarrow{g})' = \overrightarrow{f}'.\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f}.\overrightarrow{g}'$, $||\overrightarrow{f}||' = \dfrac{\overrightarrow{f}.\overrightarrow{f}'}{||\overrightarrow{f}||}$ et $\mathrm{Det}(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})' = \mathrm{Det}(\overrightarrow{f}', \overrightarrow{g}) + \mathrm{Det}(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}')$.

6.1.3 : Point régulier, stationnaire, tangente

⊙ On reprend les mêmes notations qu'avant : on note $M_t = \varphi(t)$ un point de la courbe et $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{OM_t}$ le vecteur entre l'origine du repère orthonormé direct $\mathcal{R}$ et le point M_t de la courbe.

Définition 6.3

On suppose dans les définitions suivantes que la courbe est "assez" dérivable :

- *On dit que* M_{t_0} $(t_0 \in A)$ *est un* **point régulier** *si* $\overrightarrow{f}'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.
- *On dit que* M_{t_0} *est un* **point stationnaire** *s'il n'est pas régulier.*
- *On dit que la* **courbe** *est* **régulière** *si tout point de la courbe est régulier.*
- *On dit que le point* M_{t_0} *est un* **point birégulier** *si* $\overrightarrow{f}'(t_0)$ *et* $\overrightarrow{f}''(t_0)$ *ne sont pas colinéaires.*
- *On dit que la* **courbe** *est* **birégulière** *si tout point de la courbe est birégulier.*

REMARQUE 6.3 : En un point régulier M_{t_0}, *si* $t \in A$ *et* $t \neq t_0$ *et* $M_t \neq M_{t_0}$ *alors le vecteur* $\dfrac{\overrightarrow{M_{t_0}M_t}}{t-t_0}$ *est un vecteur directeur de la droite* $(M_tM_{t_0})$. *Ce vecteur a pour vecteur limite la dérivée* $\overrightarrow{f}'(t_0)$ *qui oriente donc la tangente à la courbe en* M_{t_0}.

Proposition 6.2

La tangente à la courbe en un point régulier M_{t_0} a donc pour équation cartésienne $\big(x - x(t_0)\big)y'(t_0) - \big(y - y(t_0)\big)x'(t_0) = 0$.

REMARQUE 6.4 :

- *En un point stationnaire* M_{t_0}, *on pourra tout de même avoir une équation de la tangente en calculant* $\dfrac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$ *: cela donnera la pente de la tangente en* M_{t_0} *à la courbe.*
- *Le* **mouvement** *est dit* **rectiligne** *s'il existe une droite* $\mathcal{D}$ *telle que :* $\forall t \in A,\ M_t \in \mathcal{D}$.
- *Le* **mouvement** *est dit* **à accélération centrale** *si :* $\exists C \in \mathcal{P},\ \forall t \in A,\ \overrightarrow{f}''(t)$ *et* $\overrightarrow{CM_t}$ *colinéaires.*

REMARQUE 6.5 :
On se place au voisinage d'un point M_{t_0}, *on suppose la fonction* $\overrightarrow{f}$ *suffisamment dérivable pour pouvoir définir* $p \geqslant 1$ *le plus petit entier tel que la dérivée* $\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ *et* $q > p$ *le plus petit entier tel que* $\big(\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0), \overrightarrow{f}^{(q)}(t_0)\big)$ *non colinéaires. En appelant* (X, Y) *les coordonnées de* M_{t_0+h} *dans le repère* $\big(M_{t_0}, \overrightarrow{f}^{(p)}(t_0), \overrightarrow{f}^{(q)}(t_0)\big)$, *on a :* $\begin{cases} X \underset{0}{=} & \alpha h^p(1+\cdots) & +\beta h^q & +o(h^q) \\ Y \underset{0}{=} & & \gamma h^q & +o(h^q) \end{cases}$

Ainsi, on a 4 cas à considérer pour l'allure locale de la courbe au voisinage de M_{t_0} *:*

- *si* <u>p *est impair et* q *est pair*</u> M_{t_0} *est un* **point à allure normale** *(la courbe traverse localement toutes les droites passant par* M_{t_0} *sauf la tangente).*
- *si* <u>p *est impair et* q *est impair*</u> M_{t_0} *est un* **point d'inflexion** *(la courbe traverse localement toutes les droites passant par* M_{t_0}*).*
- *si* <u>p *est pair et* q *est impair*</u> M_{t_0} *est un* **point de rebroussement de première espèce** *(la courbe ne traverse localement aucune droite passant par* M_{t_0} *sauf la tangente).*
- *si* <u>p *est pair et* q *est pair*</u> M_{t_0} *est un* **point de rebroussement de seconde espèce** *(la courbe ne traverse localement aucune droite passant par* M_{t_0}*).*

REMARQUE 6.6 :

- *Pour une courbe donnée* <u>*en cartésiennes*</u> *par* $M_t = \big(x(t), y(t)\big)_{\mathcal{R}}$, *l'expression de l'accélération (si elle existe bien sûr) et* $\overrightarrow{f}'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)_{\mathcal{B}}$ *et* $\overrightarrow{f}''(t) = \big(x''(t), y''(t)\big)_{\mathcal{B}}$.
- *Pour une courbe donnée* <u>*en polaires*</u> *par* $\rho = \rho(\theta)$, *c'est-à-dire par* $\overrightarrow{f}(\theta) = \overrightarrow{OM_\theta} = \rho(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$, *on a donc, puisque* $\overrightarrow{u_\theta}' = \overrightarrow{v_\theta}$ *et* $\overrightarrow{v_\theta}' = -\overrightarrow{u_\theta}$, $\overrightarrow{f}'(\theta) = \rho'(\theta)\overrightarrow{u_\theta} + \rho(\theta)\overrightarrow{v_\theta}$ *et* $\overrightarrow{f}''(\theta) = \big(\rho''(\theta) - \rho(\theta)\big)\overrightarrow{u_\theta} + 2\rho'(\theta)\overrightarrow{v_\theta}$.

PARTIE 6.2 : COURBES EN CARTÉSIENNES

$\odot$ On se donne donc dans cette partie une courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes (il est sous-entendu que le repère considéré est le repère canonique donc orthonormé direct) par : $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}$

6.2.1 : Domaine d'étude et tableau de variations

$\odot$ On détermine d'abord le **domaine de définition** $\mathcal{D}_f$ de la courbe paramétrée qui est donc l'intersection des domaines de définition des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.

> ***EXEMPLE 6.2 :*** Si on se donne une courbe paramétrée par $x(t) = \ln(t)$ et $y(t) = \sqrt{1-t^2}$ alors le domaine de définition est $\mathbb{R}_+^* \cap [-1;1] =]0;1]$.

$\odot$ On détermine ensuite le **domaine d'étude** : c'est-à-dire un domaine inclus dans le domaine de définition et qui permet, si on étudie correctement la courbe sur cette partie-là, de retrouver toute la courbe par des considérations de symétrie, de rotation, de translation, etc...

REMARQUE 6.7 : Voici quelques exemples parmi tant d'autres :

- *Si x et y sont T-périodiques alors on peut étudier la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ ou $\mathcal{D}_f \cap [0;T]$ et on repassera une infinité de fois par chacun des points de la courbe.*

- *Si x et y sont paires on peut étudier la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ et on repassera deux fois par chacun des points de la courbe.*

- *Si x est paire et y impaire alors on peut étudier et tracer la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une symétrie d'axe (Ox).*

- *Si x est impaire et y paire alors on peut étudier et tracer la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une symétrie d'axe (Oy).*

- *Si x et y sont impaires alors on peut étudier et tracer la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une symétrie centrale autour de O.*

> ***EXEMPLE 6.3 :*** Si on veut étudier la **cycloïde** $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$ (avec $a \in \mathbb{R}_+^*$), on voit que l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$, on a $x(t+2\pi) = x(t) + 2\pi a$ et $y(t+2\pi) = y(t)$ donc on en déduit que la courbe est stable par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(2\pi a, 0)$ et on peut n'étudier que $[-\pi;\pi]$; de plus x est impaire et y est paire et on peut étudier sur $[0;\pi]$ et retrouver toute la courbe en faisant une symétrie orthogonale par rapport à la droite (Oy).

$\odot$ On calcule les limites de x et y aux bornes de leurs domaines de définition. Si les fonctions x et y sont dérivables, on calcule ces dérivées là où elles existent et on fait l'étude du signe de ces dérivées pour connaître les variations de x et de y. On dispose enfin toutes ces informations dans un **tableau de variations** qui se présente comme ceci :

- la première ligne est celle contenant les valeurs permises de t,
- la seconde contient le signe de $x'(t)$,
- la troisième donne les valeurs, les variations et les limites de $x(t)$,
- la quatrième donne les valeurs, les variations et les limites de $y(t)$,
- la cinquième contient le signe de $y'(t)$.

6.2.2 : Branches infinies et point multiples

Définition 6.4

On dit que la courbe paramétrée $f : I \to \mathcal{P}$ *présente une* **branche infinie** *lorsque* t *tend vers* t_0 *si* $\lim_{t\to t_0} ||\overrightarrow{OM_t}|| = +\infty$ *(*t_0+, t_0-, $t_0 = +\infty$ *et* $t_0 = -\infty$ *sont possibles).*
On dit qu'une droite $\mathcal{D}$ *est* **asymptote** *à la courbe lorsque* t *tend vers* t_0 *si* $\lim_{t\to t_0} d(M_t, \mathcal{D}) = 0$.

REMARQUE 6.8 :

- *Bien sûr, si* $\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ *et* $\lim_{t\to t_0} y(t) = y_0$ *alors la droite* $y = y_0$ *est asymptote à la courbe. De même, si* $\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0$ *et* $\lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$ *alors* $x = x_0$ *est asymptote.*
- *Dans les autres cas, quand* x *et* y *tendent toutes les deux vers* $\pm\infty$ *quand* t *tend vers* t_0*, on essaie d'estimer la quantité* $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ *quand* t *tend vers* t_0*. On a alors plusieurs cas :*
  - $\lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ *: la courbe admet une* **branche parabolique** *de direction* (Oy) *en* t_0.
  - $\lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$ *: la courbe admet une branche parabolique de direction* (Ox) *en* t_0.
  - $\lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{t\to t_0} \big(y(t) - ax(t)\big) = \pm\infty$ *: la courbe admet une branche parabolique de* **direction asymptotique** $y = ax$ *en* t_0.
  - $\lim_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{t\to t_0} \big(y(t) - ax(t)\big) = b \in \mathbb{R}$ *: la courbe admet la droite d'équation* $y = ax + b$ *pour asymptote quand* t *tend vers* t_0*. On pourra dans ce dernier cas s'intéresser à la position locale de la courbe par rapport à l'asymptote, c'est-à-dire au signe de* $y(t) - ax(t) - b$ *au voisinage de* t_0.

EXEMPLE 6.4 *:* La courbe $x(t) = \mathrm{ch}(t)$ et $y(t) = \mathrm{sh}(t)$ vérifie $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{th}(t) = 1$ et $\lim_{t\to+\infty} \big(y(t) - x(t)\big) = 0-$ donc la droite $y = x$ est asymptote à la courbe et la courbe est en-dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$. De même, la droite $y = -x$ est asymptote à la courbe et celle-ci est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $-\infty$. De plus, la courbe est symétrique par rapport à la droite (Ox) car x est paire et y est impaire.

Définition 6.5

On dit qu'un point M *de la courbe est* **point multiple** *(au moins double) s'il existe un couple de paramètres* $(t_1, t_2) \in \mathcal{D}_f^2$ *tel que* $t_1 \neq t_2$ *et* $M = M_{t_1} = M_{t_2}$ *(bien sûr il ne faut pas que cette égalité provienne de manière évidente d'une périodicité, d'une parité, etc...).*

Méthode

Quand on rencontre une courbe paramétrée en cartésiennes $x = x(t)$ et $y = y(t)$:

- **On détermine d'abord le domaine de définition de la courbe.**
- **On cherche aussi le plus petit domaine d'étude possible grâce aux propriétés de x et y et on écrit les transformations géométriques qui permettent de retrouver ensuite toute la courbe.**
- **On calcule les dérivées de x et y et on dresse le tableau de variations global.**
- **On étudie les branches infinies : asymptotes et position locale par rapport à celles-ci.**
- **On trace la courbe en indiquant le sens de parcours et en positionnant les points à dérivées horizontales, verticales, les croisements avec les axes, ...**
- **Si on voit apparaître des points multiples, on essaie de les calculer.**

PARTIE 6.3 : COURBES EN POLAIRES

⊙ On se donne donc dans cette partie une courbe paramétrée en coordonnées polaires (le repère considéré est donc un repère orthonormé direct et traditionnellement le repère canonique) par : $\rho = \rho(\theta)$.

6.3.1 : Quelques formules générales utiles

REMARQUE 6.9 : En supposant que $\overrightarrow{f}$ (donc ρ) est dérivable, pour un point M_θ (de coordonnées polaires (ρ, θ)) régulier de la courbe, on définit les vecteurs $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{v_\theta}$, $\varphi = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{f}'(\theta)\right)$ et $V = \left(\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{f}'(\theta)\right)$ (qui dépendent de θ sans qu'on le mentionne dans le nom de ces angles).

On se rappelle que $\overrightarrow{f}'(\theta) = \rho'(\theta)\overrightarrow{u_\theta} + \rho(\theta)\overrightarrow{v_\theta}$ et $\overrightarrow{f}''(\theta) = \left(\rho''(\theta) - \rho(\theta)\right)\overrightarrow{u_\theta} + 2\rho'(\theta)\overrightarrow{v_\theta}$.

Avec un dessin, on découvre que $V = \dfrac{\pi}{2}$ si $\rho'(\theta) = 0$ et que $\tan V = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$ sinon ; on a aussi $\varphi = \theta + V$.

6.3.2 : Domaine d'étude et tableau de variations

⊙ Comme pour une courbe en coordonnées cartésiennes, on détermine d'abord l'ensemble des θ possibles, c'est-à-dire le domaine de définition de la fonction ρ.

⊙ Ensuite on essaie de réduire ce domaine à un domaine d'étude plus petit mais qui contient les informations relatives à la courbe entière.

REMARQUE 6.10 : Voici à nouveau quelques exemples :

- *Si ρ est 2π-périodique alors on peut étudier la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap [0; 2\pi]$ ou $\mathcal{D}_f \cap [-\pi; \pi]$ et on repassera une infinité de fois par chacun des points de la courbe.*
- *Si ρ est π-périodique on peut étudier et tracer la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap [0; \pi]$ ou $\mathcal{D}_f \cap \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et on obtiendra toute la courbe en effectuant une symétrie de centre O.*
- *Si ρ est T-périodique en général, on peut étudier et tracer la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap [0; T]$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une infinité de rotations d'angle T.*
- *Si ρ est paire alors on peut étudier et tracer la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une symétrie d'axe (Ox).*
- *Si ρ est impaire alors on peut étudier et tracer la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une symétrie d'axe (Oy).*
- *Si $\forall \theta \in \mathcal{D}_f,\ \rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$ alors on peut étudier et tracer la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap \left[-\infty; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une symétrie d'axe (Oy).*
- *Si $\forall \theta \in \mathcal{D}_f,\ \rho(\pi - \theta) = -\rho(\theta)$ alors on peut étudier et tracer la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap \left[-\infty; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une symétrie d'axe (Ox).*
- *Si $\forall \theta \in \mathcal{D}_f,\ \rho\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho(\theta)$ alors on peut étudier et tracer la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap \left[-\infty; \dfrac{\pi}{4}\right]$ et on obtiendra ensuite toute la courbe par une symétrie d'axe $\Delta\ :\ y = x$.*

EXEMPLE 6.5 : On se donne la courbe d'équation polaire $\rho = 1 + \cos(\theta)$ qui est appelée une **cardioïde**. Son ensemble de définition est bien sûr $\mathbb{R}$, la fonction ρ est 2π-périodique donc on peut étudier sur $[-\pi; \pi]$ et on repassera ensuite une infinité de fois en chaque point de la courbe. De plus ρ est paire donc on peut restreindre le domaine d'étude à $[0; \pi]$ et on retrouvera toute la courbe en faisant une symétrie par rapport à la droite (Ox).

$\odot$ On calcule les limites de ρ aux bornes de son domaine de définition. Si ρ est dérivable, on calcule sa dérivée et on étudie son signe là où elle existe pour connaître les variations de ρ. On dispose enfin ces informations dans un tableau de variations :
- la première ligne est celle contenant les valeurs permises de θ,
- la seconde contient le signe de $\rho'(\theta)$,
- la troisième donne les valeurs, les variations et les limites de $\rho(\theta)$.

REMARQUE 6.11 :
- *Avec ce type de paramétrage, pour qu'un point soit stationnaire, il faut que $\rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0$ donc seul l'origine O du repère peut être un point stationnaire.*
- *De plus, lorsque $\lim_{\theta\to\theta_0} \rho(\theta) = 0$, donc quand on passe au pôle, on a aussi $\lim_{\theta\to\theta_0} \dfrac{\overrightarrow{OM_\theta}}{OM_\theta} = \pm\overrightarrow{u_{\theta_0}}$ donc le passage au pôle s'effectue toujours selon le vecteur $\overrightarrow{u_{\theta_0}}$.*

6.3.3 : Branches infinies et point multiples

REMARQUE 6.12 : On a la même définition d'une branche infinie quand θ tend vers θ_0 qu'en cartésiennes, il faut que $\lim_{\theta\to\theta_0} |\rho(\theta)| = +\infty$; si c'est le cas alors on se place dans le nouveau repère $(O, \overrightarrow{u_{\theta_0}}, \overrightarrow{v_{\theta_0}})$ dans lequel le point M_θ admet pour coordonnées cartésiennes (X, Y) avec $X = \rho(\theta)\cos(\theta - \theta_0)$ et $Y = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$. On a bien sûr $X \underset{\theta\to\theta_0}{\mapsto} \pm\infty$, par contre :
- *si Y n'a pas de limite en θ_0 et on dit juste que la courbe admet pour* **direction asymptotique** $\theta = \theta_0$.
- *si $\lim_{\theta\to\theta_0} Y = \pm\infty$ on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction $\theta = \theta_0$ (ou $\overrightarrow{u_{\theta_0}}$).*
- *si $\lim_{\theta\to\theta_0} Y = Y_0$ la courbe admet une droite asymptote d'équation $Y = Y_0$ dans ce nouveau repère.*

REMARQUE 6.13 : Un point de la courbe est dit multiple s'il est associé à deux paramètres différents (mais pas issu de la périodicité) sachant que, pour un point M on a :
$M = M_{\theta_1} = M_{\theta_2} \Longleftrightarrow \Big((\theta_1 \equiv \theta_2[2\pi]$ *et* $\rho(\theta_1) = \rho(\theta_2))$ *ou* $(\theta_1 \equiv \theta_2 + \pi[2\pi]$ *et* $\rho(\theta_1) = -\rho(\theta_2))\Big)$.

Méthode

Pour étudier une courbe donnée en polaires par $\rho = \rho(\theta)$:
- **On détermine d'abord le domaine de définition de la courbe.**
- **On cherche aussi le plus petit domaine d'étude possible grâce aux propriétés de ρ et on écrit les transformations géométriques qui permettent de retrouver ensuite toute la courbe.**
- **On calcule la dérivée de ρ et on dresse le tableau de variations global.**
- **On étudie les branches infinies : asymptotes et position locale par rapport à celles-ci.**
- **On trace la courbe en indiquant le sens de parcours et en positionnant les points à tangentes orthoradiales, les passages au pôle, les croisements avec les axes, ...**
- **Si on voit apparaître des points multiples, on essaie de les calculer.**